Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

Primošten, 7. travnja 2008.

Zadatak 1. Neka su a, b, c proizvoljni realni brojevi. Dokaži da je barem jedan od brojeva

$$(a+b+c)^2 - 9ab, \quad (a+b+c)^2 - 9bc, \quad (a+b+c)^2 - 9ca$$

nenegativan.

Zadatak 2. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva oblika $\overline{37abc}$ takvih da je svaki od brojeva $\overline{37abc}$, $\overline{37bca}$ i $\overline{37cab}$ djeljiv s 37?

Zadatak 3. Neka je OAB četvrtina kruga sa središtem O polumjera 1. Nad dužinama $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$, kao promjerima, konstruirane su polukružnice s unutarnje strane dane četvrtine kruga. Izračunaj polumjer kružnice koja dodiruje te dvije polukružnice i luk $\overset{\frown}{AB}$.

Zadatak 4. Nađi sva realna rješenja jednadžbe

$$(16x^{200} + 1)(y^{200} + 1) = 16(xy)^{100}.$$

Zadatak 5. Nazovimo prirodan broj n "sretan" ako mu je zbroj svih znamenaka višekratnik od 7, i "supersretan" ako je "sretan" i niti jedan od brojeva

$$n+1,\ n+2,\ \ldots,\ n+12$$

nije "sretan". Koji je najmanji "supersretan" prirodan broj?

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

Primošten, 7. travnja 2008.

Zadatak 1. Nađi sva realna rješenja jednadžbe

$$\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x.$$

Zadatak 2. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a^2+b^2+c^2=3$. Dokaži nejednakost

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2}.$$

Zadatak 3. Odredi sve cijele brojeve x takve da je $1+5\cdot 2^x$ kvadrat racionalnog broja.

Zadatak 4. Dan je četverokut $ABCD$ s kutovima $\alpha=60^\circ$, $\beta=90^\circ$, $\gamma=120^\circ$. Dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku se u točki S, pri čemu je $2|BS|=|SD|=2d$. Iz polovišta P dijagonale $\overline{AC}$ spuštena je okomica $\overline{PM}$ na dijagonalu $\overline{BD}$, a iz točke S okomica $\overline{SN}$ na $\overline{PB}$.

Dokaži: (a) $|MS|=|NS|=\dfrac{d}{2}$;

(b) $|AD|=|DC|$;

(c) $P(ABCD)=\dfrac{9d^2}{2}$.

Zadatak 5. Dano je 10 složenih prirodnih brojeva manjih od 840. Dokaži da među njima postoje barem dva broja koja nisu relativno prosta.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

Primošten, 7. travnja 2008.

Zadatak 1. Duljine stranica trokuta su tri uzastopna prirodna broja, a jedan od kutova trokuta je dvaput veći od jednog od preostalih dvaju kutova. Odredi duljine stranica trokuta.

Zadatak 2. Neka su $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. Dokaži nejednakost

$$\frac{x_1^2}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n^2}{x_n+x_1}\geq\frac{1}{2}.$$

Zadatak 3. Od svih brojeva oblika $36^m - 5^n$, gdje su m i n prirodni brojevi, odredi najmanji po apsolutnoj vrijednosti.

Zadatak 4. Bočni brid pravilne trostrane piramide je $b = 1$, a njezin obujam je $V = \frac{1}{6}$. Koliki je kut pri vrhu bočne strane?

Zadatak 5. Dan je $n \times p$ pravokutnik podijeljen na np jediničnih kvadratića. Na početku je m kvadratića crnih, a svi ostali su bijeli. Dozvoljena je sljedeća operacija: bijeli kvadratić koji ima zajednički brid s barem dva crna kvadratića, može postati crni. Nađi najmanji mogući m takav da postoji polazna pozicija iz koje, primjenom ovih operacija, mogu svi kvadratići postati crni.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

Primošten, 7. travnja 2008.

Zadatak 1. Dokaži da za po volji odabrane prirodne brojeve m i n vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} > 1.$$

Zadatak 2. Odredi formulu za zbroj

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor.$$

Tu je $\lfloor r \rfloor$ najveći cijeli broj koji nije veći od r.

Zadatak 3. Nad stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ trokuta ABC konstruirani su kvadrati $ABKL$, $BCMN$ (koji s trokutom imaju samo zajedničku stranicu).

a) Ako je D točka takva da je $ABCD$ paralelogram, dokaži da su trokuti ABD i BKN sukladni.

b) Dokaži da su polovišta dužina $\overline{AC}$, $\overline{KN}$ i središta kvadrata $ABKL$, $BCMN$ vrhovi kvadrata.

Zadatak 4. U prostoru je dano šest različitih točaka, O, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5. Dokaži da postoje indeksi i, j, $1 \leq i < j \leq 5$ takvi da je $\sphericalangle T_iOT_j \leq 90^\circ$.

Zadatak 5. Dan je $n \times p$ pravokutnik podijeljen na np jediničnih kvadratića. Na početku je m kvadratića crnih, a svi ostali su bijeli. Dozvoljena je sljedeća operacija: bijeli kvadratić koji ima zajednički brid s barem dva crna kvadratića, može postati crni. Nađi najmanji mogući m takav da postoji polazna pozicija iz koje, primjenom ovih operacija, mogu svi kvadratići postati crni.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.