DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija,
Primošten, 7. travnja 2008.

Rješenja

Zadatak 1. Neka su a, b, c proizvoljni realni brojevi. Dokaži da je barem jedan od brojeva

$$(a+b+c)^2-9ab, \quad (a+b+c)^2-9bc, \quad (a+b+c)^2-9ca$$

nenegativan.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da su sva tri broja negativna. Tada imamo

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2-9ab&<0,\\(a+b+c)^2-9bc&<0,\\(a+b+c)^2-9ca&<0.\end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti i sređivanjem dobivamo

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca<0,$$

tj.

$$\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]<0.$$

Međutim, suma kvadrata triju realnih brojeva ne može biti negativna, pa zaključujemo da je barem jedan od promatrana tri broja nenegativan.

Zadatak 2. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva oblika $\overline{37abc}$ takvih da je svaki od brojeva $\overline{37abc}$, $\overline{37bca}$ i $\overline{37cab}$ djeljiv s 37?

Rješenje. Peteroznamenkasti broj $\overline{37abc}$ je djeljiv s 37 ako i samo ako je $\overline{abc}$ djeljiv s 37. Neka je $x=\overline{abc}$, $y=\overline{bca}$ i $z=\overline{cab}$. Lako provjerimo da je

$$10x-y=999a, \quad 10y-z=999b, \quad 10z-x=999c. \tag{1}$$

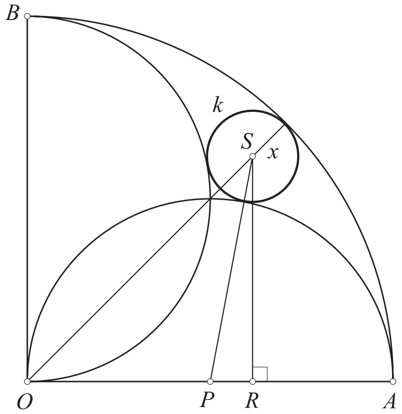
Budući je 999 višekratnik broja 37 ($999=37\cdot 27$), iz (1) slijedi: ako je neki od brojeva x, y ili z djeljiv s 37, onda su i svi ostali.

Svi traženi brojevi su oni čiji su troznamenkasti završetci višekratnici broja 37. Takvi su brojevi: $37\,000, 37\,037, 37\,074, 37\,111, \ldots, 37\,999$.

Dakle traženih brojeva ima 28.

Zadatak 3. Neka je OAB četvrtina kruga sa središtem O polumjera 1. Nad dužinama $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$, kao promjerima, konstruirane su polukružnice s unutarnje strane dane četvrtine kruga. Izračunaj polumjer kružnice koja dodiruje te dvije polukružnice i luk $\widehat{AB}$.

Rješenje. Neka je S središte promatrane kružnice, x njezin polumjer, P polovište dužine $\overline{OA}$ i R nožište okomice iz S na dužinu $\overline{OA}$.



Zbog simetrije je $\sphericalangle SOR = 45°$, pa je $|OR| = |RS|$. Trokut SOR je jednakokračan i pravokutan pa imamo

$$|OR| = |RS| = |OS| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2}}.$$

U trokutu PRS je

$$|PR| = |OR| - |OP| = \frac{1-x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad |PS| = \frac{1}{2} + x,$$

pa je prema Pitagorinu poučku

$$\begin{aligned} |PS|^2 &= |PR|^2 + |RS|^2 \\ \left(\frac{1}{2} + x\right)^2 &= \left(\frac{1-x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2. \end{aligned}$$

Odavde dobivamo

$$x = \frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}-1} = \frac{5-2\sqrt{2}}{17}.$$

Zadatak 4. Nađi sva realna rješenja jednadžbe

$$(16x^{200}+1)(y^{200}+1)=16(xy)^{100}.$$

Rješenje.

Prvo rješenje. Stavimo $4x^{100}=A$, $y^{100}=B$. Tada dobivamo

$$\begin{aligned} (A^2+1)(B^2+1) &= 4AB \\ \Leftrightarrow \quad A^2B^2+A^2+B^2+1 &= 4AB \\ \Leftrightarrow \quad (A^2B^2-2AB+1)+(A^2-2AB+B^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad (AB-1)^2+(A-B)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Ovo je moguće jedino ako je $AB=1$ i $A=B$, odakle slijedi:

1° $A=B=1 \quad \Rightarrow \quad x^{100}=\frac{1}{4}, \quad x=\pm\frac{1}{\sqrt[50]{2}}, \quad y^{100}=1, \quad y=\pm 1.$

2° $A=B=-1$. U ovom slučaju nema rješenja.

Dakle, postoje četiri realna rješenja: $\left(\frac{1}{\sqrt[50]{2}},1\right),\left(\frac{1}{\sqrt[50]{2}},-1\right),\left(-\frac{1}{\sqrt[50]{2}},1\right),\left(-\frac{1}{\sqrt[50]{2}},-1\right).$

Drugo rješenje.
Za $x=0$ ili $y=0$ jednadžba nije zadovoljena. Dijeljenjem jednadžbe s $4x^{100}y^{100}$ dobivamo

$$\left(4x^{100}+\frac{1}{4x^{100}}\right)\left(y^{100}+\frac{1}{y^{100}}\right)=4.$$

Za pozitivan broj a vrijedi nejednakost $a+\frac{1}{a}\geq 2$ jer je $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\geq 0$, pri čemu se jednakost dostiže ako i samo ako je $a=1$.

Lijeva strana jednadžbe je

$$\left(4x^{100}+\frac{1}{4x^{100}}\right)\left(y^{100}+\frac{1}{y^{100}}\right)\geq 2\cdot 2=4,$$

pa je

$$4x^{100}+\frac{1}{4x^{100}}=2 \qquad \text{i} \qquad y^{100}+\frac{1}{y^{100}}=2.$$

Odavde slijedi $4x^{100}=1$ i $y^{100}=1$, odnosno $x=\pm\frac{1}{\sqrt[50]{2}}$ i $y=\pm 1$.

Jednadžba ima četiri realna rješenja.

Zadatak 5. Nazovimo prirodan broj n “sretan” ako mu je zbroj svih znamenaka višekratnik od 7, i “supersretan” ako je “sretan” i niti jedan od brojeva

$$n+1,\ n+2,\ \ldots,\ n+12$$

nije “sretan”. Koji je najmanji “supersretan” prirodan broj?

Rješenje. Neka je n "sretan" broj, a x njegova znamenka jedinica.

1° Promatrajmo najprije slučaj $0 \leq x < 3$. Broj $n+7$ razlikuje se od n samo u zadnjoj znamenci, pa je $n+7$ djeljiv sa 7, tj. n nije "supersretan".

2° Neka je $3 < x \leq 9$. Promatrajmo sedam brojeva:

$$n+(10-x),\ n+(10-x)+1,\ \ldots\ n+(10-x)+6.$$

Kako je $n = 10k + x$, ovi brojevi se razlikuju samo u zadnjoj znamenci koja je u skupu $\{0, 1, \ldots, 6\}$. Promatrajmo zbrojeve njihovih znamenaka. Budući da imamo sedam uzastopnih prirodnih brojeva, jedan od njih je djeljiv sa 7, i odgovarajući broj je "sretan".

Kako je $x > 3$, imamo

$$[n+(10-x)+6]-n < 13,$$

pa je neki od brojeva $n+1,\ n+2,\ \ldots,\ n+12$ "sretan", što znači da n nije "supersretan".

3° Preostaje jedina mogućnost $x = 3$.

Kako 3 nije sretan, promatrajmo dvoznamenkasti završetak broja n, $\overline{y3}$. Ako je $y < 9$, zbroj znamenaka broja $n+9$ je također višekratnik broja 7 (dodavanjem broja 9 broju n smanjuje se znamenka jedinica za 1 i povećava znamenka desetica za 1). Stoga, da bi broj n bio "supersretan", njegove zadnje dvije znamenke moraju biti 93. Uočimo da broj 93 nije "sretan".

Promatrajmo sada troznamenkasti završetak broja n, $\overline{z93}$. Ako je $z < 9$, dodavanjem broja 11 broju n dobiva se također "sretan" broj (znamenka jedinica se poveća za 1, znamenka desetica smanji za 9 i znamenka stotica poveća za 1). Da bi n bio "supersretan" mora biti $z = 9$. No lako se provjeri da je 993 sretan broj i da nijedan od brojeva $993+1,\ 993+2,\ \ldots, 993+12$ nije sretan broj, tj. 993 je najmanji "supersretan" broj.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija,
Primošten, 7. travnja 2008.

Rješenja

Zadatak 1. Nađi sva realna rješenja jednadžbe

$$\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x.$$

Rješenje. Kvadriranjem i sređivanjem dobivamo:

$$\begin{gathered}
2x^2+3x+5+2\sqrt{(2x^2+5)^2-(3x)^2}+2x^2-3x+5=9x^2\\
2\sqrt{4x^4+11x^2+25}=5x^2-10\\
16x^4+44x^2+100=25x^4-100x^2+100\\
144x^2=9x^4\\
9x^2(x^2-16)=0.
\end{gathered}$$

Rješenja ove jednadžbe su $x\in\{-4,0,4\}$. Očito mora biti $x\geq 0$ i $x=0$ nije rješenje polazne jednadžbe. Preostaje jedino $x=4$, i provjerom se vidi da je to doista rješenje.

Drugo rješenje.
Diskriminanta kvadratnih funkcija $f(x)=2x^2\pm 3x+5$ jednaka je: $D=(\pm 3)^2-4\cdot 2\cdot 5=-31<0$, pa su izrazi pod korijenom strogo pozitivni. Jednadžba ima smisla samo za $x>0$.

Uočimo da je

$$(2x^2+3x+5)-(2x^2-3x+5)=6x.$$

Lijevu stranu ove jednadžbe možemo zapisati kao razliku kvadrata:

$$\left(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}\right)\left(\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}\right)=6x.$$

Druga zagrada s lijeve strane jednaka je $3x$, pa slijedi

$$\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=2.$$

Zbrajanjem ove jednakosti s onom u zadatku dobiva se

$$2\sqrt{2x^2+3x+5}=3x+2.$$

Kvadriranjem i sređivanjem dobiva se jednadžba $x^2=16$, čija su rješenja $x_1=-4$, i $x_2=4$. Zbog pozitivnosti rješenja ostaje samo $x=4$. Neposredno se provjeri da je to zaista rješenje.

Zadatak 2. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Dokaži nejednakost

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}.$$

Rješenje. Korištenjem A-H nejednakosti dobivamo

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca} \geq \frac{9}{3+ab+bc+ca} \geq \frac{9}{3+a^2+b^2+c^2} = \frac{9}{3+3} = \frac{3}{2}.$$

Ovdje smo koristili nejednakost $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$ koja je ekvivalenta s $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$, a ova vrijedi.

Zadatak 3. Odredi sve cijele brojeve x takve da je $1 + 5 \cdot 2^x$ kvadrat racionalnog broja.

Rješenje. Moramo promatrati sljedeća tri slučaja.

1° Za $x = 0$ je $1 + 5 \cdot 2^x = 6$, a to nije potpun kvadrat.

2° Za $x > 0$ je $1 + 5 \cdot 2^x \in \mathbf{N}$, pa imamo

$$1 + 5 \cdot 2^x = n^2,$$

za neki prirodni broj n. Zato je

$$5 \cdot 2^x = (n-1)(n+1).$$

Očito broj n mora biti neparan, veći od 1. Jedan od brojeva $n-1$, $n+1$ je djeljiv s 4. Uz to je $n^2 - 1$ djeljiv s 5, pa je $n^2 - 1 \geq 5 \cdot 8 = 40$, tj. $n \geq 7$.

Jedan od brojeva $n-1$ ili $n+1$ djeljiv je s 5. Jedan od njih djeljiv je s 2, ali nije djeljiv s većom potencijom broja 2; a drugi je djeljiv s 2^{x-1}. Jasno je da jedan mora biti jednak $2 \cdot 5$, a drugi 2^{x-1}. Mogućnosti su: $n - 1 = 10$ ili $n + 1 = 10$. Od toga zadovoljava samo druga mogućnost, tj. $n = 9$. Tada je $5 \cdot 2^x = 80$, pa je $x = 4$.

3° Za $x < 0$ je $1 + 5 \cdot 2^x$ racionalan broj s nazivnikom 2^{-x}. Tada je $1 + 5 \cdot 2^x = q^2,\ q \in \mathbf{Q}$ i nazivnik od q je $2^{-x/2}$. Dakle x je paran. Stavimo li $x = -2y,\ y \in \mathbf{N}$, imamo

$$2^{2y} + 5 = (q \cdot 2^y)^2.$$

Kako je $q \cdot 2^y = r$ cijeli broj, dobivamo

$$5 = (r - 2^y)(r + 2^y).$$

Mora biti $r - 2^y = 1$ i $r + 2^y = 5$. Odavde dobivamo $y = 1$ i $x = -2$. Tada je $1 + 5 \cdot 2^x = \dfrac{9}{4} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$.

Dakle, traženi brojevi su $x = 4$ i $x = -2$.

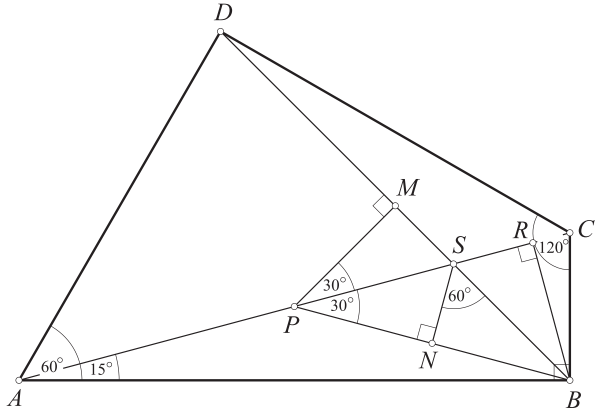
Zadatak 4. Dan je četverokut $ABCD$ s kutovima $\alpha = 60°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 120°$. Dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku se u točki S, pri čemu je $2|BS| = |SD| = 2d$. Iz polovišta P dijagonale $\overline{AC}$ spuštena je okomica $\overline{PM}$ na dijagonalu $\overline{BD}$, a iz točke S okomica $\overline{SN}$ na $\overline{PB}$.

Dokaži: (a) $|MS| = |NS| = \dfrac{d}{2}$;

(b) $|AD| = |DC|$;

(c) $P(ABCD) = \dfrac{9d^2}{2}$.

Rješenje. Trokuti ABC i ACD su pravokutni s hipotenuzom $\overline{AC}$ pa je četverokut $ABCD$ tetivni. Točka P je središte opisane mu kružnice.



(a) Točka M je polovište dijagonale $\overline{BD}$. Iz danih uvjeta dobivamo: $|DM| = |MB| = \dfrac{3d}{2}$, $|MS| = \dfrac{d}{2}$.

Nadalje, iz $\angle BPM = \dfrac{1}{2}\angle BPD = \angle BAD = 60°$ dobivamo $\angle PBM = 30°$.

Kako je $NS \perp PB$, imamo $|NS| = \dfrac{1}{2}|BS| = \dfrac{1}{2}d = |MS|$.

(b) Trokuti MPS i NPS su pravokutni sa zajedničkom hipotenuzom i sukladnom katetom. Zato su oni sukladni i vrijedi $\angle MPS = \angle SPN = 30°$ pa je $|SP| = 2|NS|$.

Trokut APB je jednakokračan i $\angle PAB = \dfrac{1}{2}\angle SPB = 15°$.

Tada je i $\angle DAC = \angle DAB - \angle CAB = 60° - 15° = 45°$. Stoga je trokut ACD jednakokračan pravokutan i $|AD| = |CD|$.

(c) Imamo

$$P(ABCD) = P(ABC) + P(ACD) = \frac{1}{2}|AC|(v_B + v_D), \tag{1}$$

$$v_D = |DP| = \sqrt{|DS|^2 - |SP|^2} = \sqrt{(2d)^2 - d^2} = d\sqrt{3},$$

$$v_B : v_D = |BR| : |DP| = |SB| : |SD| = 1 : 2 \quad \Rightarrow \quad v_B = \frac{1}{2}v_D = \frac{d\sqrt{3}}{2}.$$

$$|AC| = 2|DP| = 2d\sqrt{3}.$$

Uvrštavanjem u (1) dobivamo

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2d\sqrt{3}\left(\frac{d\sqrt{3}}{2} + d\sqrt{3}\right) = \frac{9d^2}{2}.$$

Zadatak 5. Dano je 10 složenih prirodnih brojeva manjih od 840. Dokaži da među njima postoje barem dva broja koja nisu relativno prosta.

Rješenje. Kako je $29^2 = 841$, svaki složeni broj, koji je manji od 840, djeljiv je barem s jednim prostim brojem koji nije veći od 23. Ima samo devet prostih brojeva (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 i 23) koji nisu veći od 23. Kako ima deset složenih brojeva koji su manji od 840, po Dirichletovom principu postoje dva među njima koja su djeljiva s istim prostim brojem koji nije veći od 23. Ta dva broja nisu relativno prosta.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija,
Primošten, 7. travnja 2008.

Rješenja

Zadatak 1. Duljine stranica trokuta su tri uzastopna prirodna broja, a jedan od kutova trokuta je dvaput veći od jednog od preostalih dvaju kutova. Odredi duljine stranica trokuta.

Rješenje. Neka je $a = n - 1$, $b = n$, $c = n + 1$. Tada je $\alpha < \beta < \gamma$. Moguća su tri slučaja.

1° $\beta = 2\alpha$

Koristeći poučak o sinusima i kosinusov poučak dobivamo:

$$\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2a} = \frac{n}{2(n-1)},$$
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{n+4}{2(n+1)}.$$

Iz jednadžbe $\dfrac{n}{2(n-1)} = \dfrac{n+4}{2(n+1)}$ dobivamo $n = 2$. Stranice trokuta bi bile 1, 2 i 3, što nije moguće.

2° $\gamma = 2\alpha$

Slično kao u prethodnom slučaju dobili bismo:

$$\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{\sin\gamma}{2\sin\alpha} = \frac{n+1}{2(n-1)},$$
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{n+4}{2(n+1)}.$$

Iz jednadžbe $\dfrac{n+1}{2(n-1)} = \dfrac{n+4}{2(n+1)}$ se dobiva $n = 5$ i duljine stranica trokuta su 4, 5 i 6.

3° $\gamma = 2\beta$

Ponavljanjem postupka iz prethodnih dvaju slučajeva dobivamo

$$\cos\beta = \frac{\sin 2\beta}{2\sin\beta} = \frac{\sin\gamma}{2\sin\beta} = \frac{n+1}{2n},$$
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{n^2+2}{2(n^2-1)}.$$

Iz jednadžbe $\dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{n^2+2}{2(n^2-1)}$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $n^2 - 3n - 1 = 0$, čija rješenja $n_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ su iracionalna.

Dakle, jedino rješenje je trokut sa stranicama duljina 4, 5 i 6.

Zadatak 2. Neka su $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{n-1},\ x_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. Dokaži nejednakost

$$\frac{x_1^2}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n^2}{x_n+x_1}\geq\frac{1}{2}.$$

Rješenje. Uz oznaku $x_{n+1}=x_1$ imamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{x_i+x_{i+1}} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2+x_ix_{i+1}-x_ix_{i+1}}{x_i+x_{i+1}}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{x_ix_{i+1}}{x_i+x_{i+1}}\right) \geq \sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)^2}{x_i+x_{i+1}}\\
&= 1-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(x_i+x_{i+1})=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Drugo rješenje.
Uz oznaku $x_{n+1}=x_1$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{x_i+x_{i+1}} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2-x_{i+1}^2+x_{i+1}^2}{x_i+x_{i+1}}\\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i+1})+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i+1}^2}{x_i+x_{i+1}}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i+1}^2}{x_i+x_{i+1}}.
\end{aligned}$$

Odavde dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{x_i+x_{i+1}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2+x_{i+1}^2}{x_i+x_{i+1}}\geq\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(x_i+x_{i+1})=\frac{1}{2},$$

pri čemu smo koristili nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine.

Zadatak 3. Od svih brojeva oblika $36^m - 5^n$, gdje su m i n prirodni brojevi, odredi najmanji po apsolutnoj vrijednosti.

Rješenje. Kako broj 36^m završava sa 6 za svaki prirodan broj m, a broj 5^n završava s 5 za svaki prirodan broj n, broj $N = |36^m - 5^n|$ završava s 1 ili s 9. Stoga najmanje njegove vrijednosti mogu biti 1, 9, 11, ...

Pritom za $m = 1$ i $n = 2$ dobivamo $N = 11$. Pokažimo da ne može biti $N = 1$ niti $N = 9$, tj. da je $N = 11$ najmanji traženi broj.

Iz jednakosti $36^m - 5^n = \pm 9$ slijedilo bi da je broj 5^n djeljiv s 9, što ne može biti.

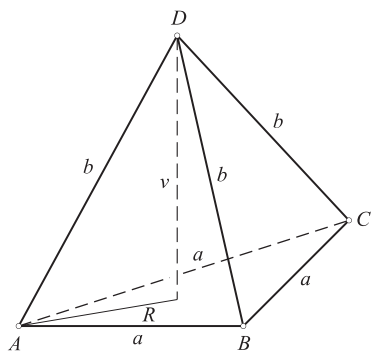
Iz jednakosti $36^m - 5^n = 1$ slijedilo bi $5^n = 36^m - 1 = (6^m - 1)(6^m + 1)$, tj. $5 | 6^m + 1$, što nije moguće jer ovaj broj završava znamenkom 7, pa ne može biti djeljiv s 5.

Iz jednakosti $36^m - 5^n = -1$ slijedilo bi $5^n = 36^m + 1$, što nije moguće jer broj $36^m + 1$ završava znamenkom 7, pa ne može biti djeljiv s 5.

Zadatak 4. Bočni brid pravilne trostrane piramide je $b = 1$, a njezin obujam je $V = \frac{1}{6}$. Koliki je kut pri vrhu bočne strane?

Rješenje. Baza piramide je jednakostranični trokut stranice duljine a. Polumjer njemu opisane kružnice je $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Visina piramide je

$$v = \sqrt{b^2 - R^2} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{3}}.$$



Obujam te piramide je

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{v}{3} = \frac{1}{6}.$$

Odavde dobivamo jednadžbu

$$a^6 - 3a^4 + 4 = 0.$$

Očigledno $a^2 = 2$ zadovoljava ovu jednadžbu. Dijeljenjem jednadžbe s $a^2 - 2$ dobivamo jednadžbu $a^4 - a^2 - 2 = 0$, koju zadovoljavaju $a^2 = 2$ i $a^2 = -1$ (ovo nije moguće). Dakle jedina mogućnost je $a^2 = 2$.

Kut pri vrhu pobočke izračunat ćemo pomoću kosinusovog poučka:

$$\cos\varphi = \frac{b^2 + b^2 - a^2}{2b \cdot b} = 1 - \frac{a^2}{2b^2} = 0,$$

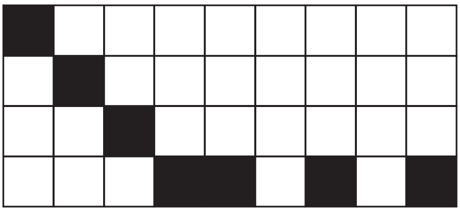
ili sinusovog poučka:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dakle, traženi kut je $\varphi = 90°$.

Zadatak 5. Dan je $n \times p$ pravokutnik podijeljen na np jediničnih kvadratića. Na početku je m crnih kvadratića, a svi ostali su bijeli. Dozvoljena je sljedeća operacija: bijeli kvadratić koji ima zajednički brid s barem dva crna kvadratića, može postati crni. Nađi najmanji mogući m takav da postoji polazna pozicija iz koje, primjenom ovih operacija, mogu svi kvadratići postati crni.

Rješenje. Ne smanjujući općenitost možemo pretpostaviti da je $n \leq p$. U kvadratni dio pravokutnika s lijeve strane postavimo crne kvadratiće na glavnu dijagonalu. Ako je $n < p$, u pravokutnik $n \times (p-n)$ u svaki drugi stupac u zadnji redak, počevši s desne strane, stavimo po jedan crni kvadratić. Lako je vidjeti da će dozvoljenim operacijama svi kvadratići postati crni. Ako su n i p iste parnosti onda je broj crnih kvadratića u ovom rasporedu jednak $n + \dfrac{p-n}{2}$, a ako su različitih parnosti ima ih $n + \dfrac{p-n+1}{2}$. Zato je $m \leq \left\lfloor \dfrac{n+p+1}{2} \right\rfloor$. Pokazat ćemo da je $m = \left\lfloor \dfrac{n+p+1}{2} \right\rfloor$.



Segment na rubu je brid samo jednog kvadratića, dok je unutarnji segment brid dvaju kvadratića. Promatrat ćemo segmente koji pripadaju samo jednom crnom jediničnom kvadratiću. Sve ćemo takve segmente zvati rubnim segmentima. Kako na početku ima m crnih kvadratića, tada (na početku) ima najviše $4m$ rubnih segmenata. Ako promijenimo bijeli kvadratić, koji je dodirivao k crnih kvadratića, u crni, onda će nestati k rubnih segmenata, a nastat će $4-k$ novih rubnih segmenata. Kako je operacija dozvoljena samo ako je $k \geq 2$, imamo $4-k \leq k$, tako da se broj rubnih segmenata ne povećava. Kada svi kvadratići prijeđu u crne, bit će $2(n+p)$ rubnih segmenata. Odavde slijedi $4m \geq 2(n+p)$, ili $m \geq \dfrac{n+p}{2}$ tj. $m \geq \left\lfloor \dfrac{n+p+1}{2} \right\rfloor$.

Prema tome, $m = \left\lfloor \dfrac{n+p+1}{2} \right\rfloor$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija,
Primošten, 7. travnja 2008.

Rješenja

Zadatak 1. Dokaži da za po volji odabrane prirodne brojeve m i n vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} > 1.$$

Rješenje. Ako je neki od brojeva m ili n jednak 1, nejednakost očito vrijedi.

Pretpostavimo zato da je $m > 1$ i $n > 1$. Tada vrijedi $\sqrt[n]{m} = 1 + u$, $\sqrt[m]{n} = 1 + v$, za neke pozitivne realne brojeve u i v. Prema binomnoj formuli (ili Bernoullijevoj nejednakosti) vrijedi

$$m = (1+u)^n > 1 + nu, \qquad n = (1+v)^m > 1 + mv,$$

odnosno

$$u < \frac{m-1}{n}, \qquad v < \frac{n-1}{m}.$$

Odavde slijedi

$$1 + u < \frac{m+n-1}{n}, \qquad 1 + v < \frac{m+n-1}{m}.$$

Iz posljednjih nejednakosti dobivamo nejednakost koju je trebalo dokazati:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} = \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} > \frac{n}{m+n-1} + \frac{m}{m+n-1} = \frac{m+n}{m+n-1} > 1.$$

Zadatak 2. Odredi formulu za zbroj

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor.$$

Tu je $\lfloor r \rfloor$ cjelobrojni dio pozitivnog realnog broja r.

Rješenje. Označimo sa S_n traženi zbroj. Nekoliko prvih pribrojnika u toj sumi izgleda ovako:

$$S_n = 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + \ldots.$$

S obzirom da je

$$(n-1)^2 < n^2 - 1 < n^2,$$

vrijedi

$$n - 1 \leq \lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor < n,$$

pa je posljednji pribrojnik u ovoj sumi jednak $n - 1$.

Postavlja se pitanje: ako je $1 \leq k \leq n-1$, koliko će se puta u sumi pojaviti pribrojnik k? Tu će vrijednost imati sljedeći članovi sume:

$$\lfloor\sqrt{k^2}\rfloor, \quad \lfloor\sqrt{k^2+1}\rfloor, \ldots, \quad \lfloor\sqrt{(k+1)^2-1}\rfloor.$$

Dakle, pribrojnik k pojavljuje se $(k+1)^2-k^2$ puta. Primijetimo da je posljednji član sume jednak $\sqrt{n^2-1}$, pa je on ujedno posljednji član u ovakvoj skupini pribrojnika. Zato je tražena suma jednaka:

$$S_n = 1\cdot(2^2-1^2)+2(3^2-2^2)+\ldots+(n-1)[n^2-(n-1)^2].$$

Izračunajmo ovaj zbroj.

$$\begin{aligned}
S_n &= 2^2-1^2+2\cdot 3^2-2\cdot 2^2+3\cdot 4^2-3\cdot 3^2+\ldots+(n-1)n^2-(n-1)(n-1)^2\\
&= -1^2-2^2-3^2-\ldots-(n-1)^2+(n-1)n^2\\
&= (n-1)n^2-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Zadatak 3. Nad stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ trokuta ABC konstruirani su kvadrati $ABKL$, $BCMN$ (koji s trokutom imaju samo zajedničku stranicu).

a) Ako je D točka takva da je $ABCD$ paralelogram, dokaži da su trokuti ABD i BKN sukladni.

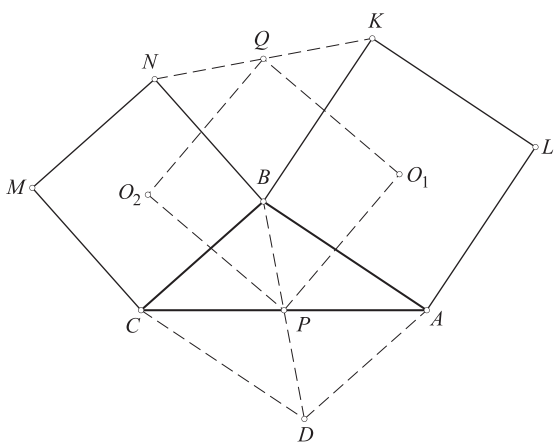
b) Dokaži da su polovišta dužina $\overline{AC}$, $\overline{KN}$ i središta kvadrata $ABKL$, $BCMN$ vrhovi kvadrata.

Rješenje.

a) Vrijedi $|BK| = |AB|$ jer su to stranice istog kvadrata. Također, $|BN| = |BC| = |AD|$. Nadalje

$$\measuredangle KBN = 360^\circ-(90^\circ+\measuredangle ABC+90^\circ)=180^\circ-\measuredangle ABC=\measuredangle BAD.$$

Sada po poučku SKS slijedi tvrdnja.



b) Rotacijom trokuta ABD oko točke O_1 za 90° dobivamo trokut BKN. Znači, trokut PO_1Q je jednakokračan pravokutan, dakle, polovina kvadrata. Analogna tvrdnja vrijedi za rotaciju oko točke O_2. Zato je PO_1QO_2 kvadrat.

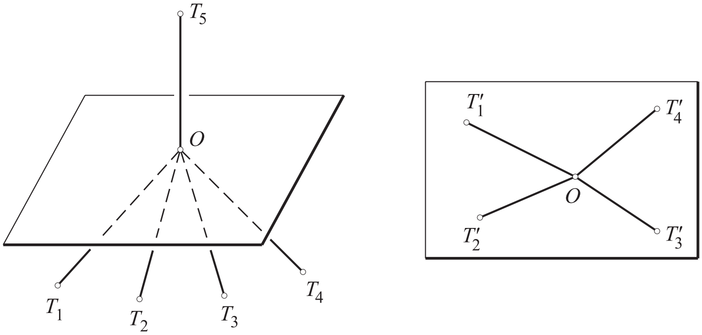
Drugo rješenje dijela **b)**. Lik PO_1QO_2 je paralelogram, jer su mu vrhovi polovišta stranica četverokuta $AKNC$. Dovoljno je još dokazati da je $|AN| = |CK|$ i $AN \perp CK$.

Vrijedi $|CB| = |BN|$, $|BK| = |BA|$ i $\sphericalangle CBK = 90^\circ + \sphericalangle NBK = \sphericalangle NCA$. Zato su trokuti CBK i NBA sukladni, pa je $|CK| = |AN|$. Dalje je $\sphericalangle BCK = \sphericalangle BNA$. Odavde zbog $BC \perp BN$ slijedi $CK \perp NA$ (kutovi s okomitim kracima).

Zadatak 4. U prostoru je dano šest različitih točaka, O, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5. Dokaži da postoje indeksi i, j, $1 \leq i < j \leq 5$ takvi da je $\sphericalangle T_iOT_j \leq 90^\circ$.

Rješenje.

Pretpostavimo da tvrdnja ne vrijedi i promotrimo ravninu π kroz točku O okomitu na pravac OT_5. Točke T_1, T_2, T_3, T_4 nalaze se sa suprotne strane te ravnine u odnosu na točku T_5.



Neka su T_1', T_2', T_3', T_4', ortogonalne projekcije točaka T_1, T_2, T_3, T_4 na ravninu π. Nijedna među njima ne podudara se s točkom O jer, na primjer, kad bi bilo $T_1' = O$, onda bi točke T_5, O, T_1 bile kolinearne pa bi barem jedan od kutova $\sphericalangle T_5OT_2$, $\sphericalangle T_2OT_1$ morao biti manji ili jednak od 90°.

Uočimo nadalje da za $1 \leq i < j \leq 4$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OT_i} \cdot \overrightarrow{OT_j} &= (\overrightarrow{OT_i'} + \overrightarrow{T_i'T_i}) \cdot (\overrightarrow{OT_j'} + \overrightarrow{T_j'T_j}) \\
&= \overrightarrow{OT_i'} \cdot \overrightarrow{OT_j'} + \overrightarrow{OT_i'} \cdot \overrightarrow{T_j'T_j} + \overrightarrow{T_i'T_i} \cdot \overrightarrow{OT_j'} + \overrightarrow{T_i'T_i} \cdot \overrightarrow{T_j'T_j} \\
&= \overrightarrow{OT_i'} \cdot \overrightarrow{OT_j'} + |T_i'T_i| \cdot |T_j'T_j| > \overrightarrow{OT_i'} \cdot \overrightarrow{OT_j'}
\end{aligned}$$

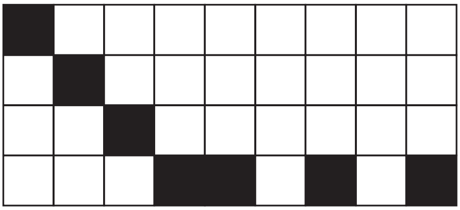
Dakle, ako je $\sphericalangle T_iOT_j > 90^\circ$, tj. $\overrightarrow{OT_i} \cdot \overrightarrow{OT_j} < 0$, onda je pogotovo $\overrightarrow{OT_i'} \cdot \overrightarrow{OT_j'} < 0$, pa je $\sphericalangle T_i'OT_j' > 90^\circ$.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su točke T_1', T_2', T_3', T_4', poredane kao na slici. Onda prema prethodnom vrijedi $\sphericalangle T_1'OT_2' > 90^\circ$, $\sphericalangle T_1'OT_2' > 90^\circ$, $\sphericalangle T_1'OT_2' > 90^\circ$, $\sphericalangle T_1'OT_2' > 90^\circ$, što nije moguće, jer je zbroj tih kutova jednak 360°.

Time smo dobili proturječje, pa je polazna tvrdnja dokazana.

Zadatak 5. Dan je $n \times p$ pravokutnik podijeljen na np jediničnih kvadratića. Na početku je m crnih kvadratića, a svi ostali su bijeli. Dozvoljena je sljedeća operacija: bijeli kvadratić koji ima zajednički brid s barem dva crna kvadratića, može postati crni. Nađi najmanji mogući m takav da postoji polazna pozicija iz koje, primjenom ovih operacija, mogu svi kvadratići postati crni.

Rješenje. Ne smanjujući općenitost možemo pretpostaviti da je $n \leq p$. U kvadratni dio pravokutnika s lijeve strane postavimo crne kvadratiće na glavnu dijagonalu. Ako je $n < p$, u pravokutnik $n \times (p-n)$ u svaki drugi stupac u zadnji redak, počevši s desne strane, stavimo po jedan crni kvadratić. Lako je vidjeti da će dozvoljenim operacijama svi kvadratići postati crni. Ako su n i p iste parnosti onda je broj crnih kvadratića u ovom rasporedu jednak $n + \frac{p-n}{2}$, a ako su različitih parnosti ima ih $n + \frac{p-n+1}{2}$. Zato je $m \leq \left\lfloor \frac{n+p+1}{2} \right\rfloor$. Pokazat ćemo da je $m = \left\lfloor \frac{n+p+1}{2} \right\rfloor$.



Segment na rubu je brid samo jednog kvadratića, dok je unutarnji segment brid dvaju kvadratića. Promatrat ćemo segmente koji pripadaju samo jednom crnom jediničnom kvadratiću. Sve ćemo takve segmente zvati rubnim segmentima. Kako na početku ima m crnih kvadratića, tada (na početku) ima najviše $4m$ rubnih segmenata. Ako promijenimo bijeli kvadratić, koji je dodirivao k crnih kvadratića, u crni, onda će nestati k rubnih segmenata, a nastat će $4-k$ novih rubnih segmenata. Kako je operacija dozvoljena samo ako je $k \geq 2$, imamo $4-k \leq k$, tako da se broj rubnih segmenata ne povećava. Kada svi kvadratići prijeđu u crne, bit će $2(n+p)$ rubnih segmenata. Odavde slijedi $4m \geq 2(n+p)$, ili $m \geq \frac{n+p}{2}$ tj. $m \geq \left\lfloor \frac{n+p+1}{2} \right\rfloor$.

Prema tome, $m = \left\lfloor \frac{n+p+1}{2} \right\rfloor$.