Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

Primošten, 7. travnja 2008.

Zadatak 1. Neka su a, b, c proizvoljni realni brojevi. Dokaži da je barem jedan od brojeva

$$(a+b+c)^2 - 9ab, \quad (a+b+c)^2 - 9bc, \quad (a+b+c)^2 - 9ca$$

nenegativan.

Zadatak 2. Na stranici $\overline{AB}$ kvadrata $ABCD$ dana je točka E takva da je $|AE| = 3|EB|$, a na stranici $\overline{AD}$ dana je točka F takva da je $|AF| = 5|FD|$. S K je označen presjek pravaca DE i CF, s L presjek pravaca DE i BF, te s M presjek pravaca BF i CE. Dokaži da je zbroj površina trokuta EML i CDK jednak zbroju površina trokuta FLK i BCM.

Zadatak 3. Tamara i Mirjana uspoređuju svoje ušteđevine. Niti jedna nema više od 100 kuna. Svaka od njih izbroji svoju ušteđevinu u kunama i lipama. Ustanovile su da je iznos Mirjanine ušteđevine za pet lipa veći od dvostruke Tamarine ušteđevine. Tamara ima onoliko kuna koliko Mirjana ima lipa, i onoliko lipa koliko Mirjana ima kuna. Kolika je Tamarina ušteđevina?

Zadatak 4. Neka je a cijeli broj relativno prost s 35. Dokaži da je broj

$$(a^4 - 1)(a^4 + 15a^2 + 1)$$

djeljiv s 35.

Zadatak 5. Može li se kvadrat podijeliti na 2008 kvadrata (ne nužno istih duljina stranica)? Ako može navedi primjer, a ako ne može dokaži!

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

Primošten, 7. travnja 2008.

Zadatak 1. Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$(\sqrt{x}-2)^4+(\sqrt{x}-3)^4=1.$$

Zadatak 2. Za kvadratnu funkciju $f(x)=ax^2+bx+c$ vrijede ove nejednakosti

$$f(-3)<-5, \qquad f(-1)>0, \qquad f(1)<4.$$

Dokaži da je koeficijent a manji od $-\frac{1}{8}$.

Zadatak 3. Točke E, F, G su redom polovišta stranica $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{AB}$ paralelograma $ABCD$. Kružnica opisana trokutu DEF dira stranicu $\overline{AB}$ u točki G. Nađi omjer duljina stranica danog paralelograma ($|AB|:|AD|$).

Zadatak 4. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC dane su redom točke P i Q. Dužine $\overline{AQ}$ i $\overline{CP}$ sijeku se u točki O.

Ako su površine trokuta COQ, AOC i APO redom jednake $1\ \text{cm}^2$, $2\ \text{cm}^2$ i $3\ \text{cm}^2$, odredi površinu četverokuta $OPBQ$.

Zadatak 5. Dano je 10 složenih prirodnih brojeva manjih od 840. Dokaži da među njima postoje barem dva broja koja nisu relativno prosta.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

Primošten, 7. travnja 2008.

Zadatak 1. Odredi sva rješenja nejednadžbe

$$\log_2 5 \cdot \log_5 \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) > 1.$$

Zadatak 2. Za koje realne brojeve a postoji rješenje jednadžbe

$$\cos 3x \cdot \cos^3 x - \sin 3x \cdot \sin^3 x = a\,?$$

Zadatak 3. U kocki $ABCDA_1B_1C_1D_1$ točka P je polovište brida $\overline{BC}$, a točka Q je središte kvadrata CC_1D_1D. Ravnina kroz točke A, P i Q dijeli kocku na dva dijela. Koliki je omjer njihovih obujmova?

Zadatak 4. Duljine stranica trokuta su tri uzastopna prirodna broja, a jedan od kutova trokuta je dvaput veći od jednog od preostala dva kuta. Odredi duljine stranica trokuta.

Zadatak 5. U jednakostraničnom trokutu duljine stranice 3 cm nalazi se 20 točaka. Dokaži da postoji krug polumjera $\frac{3}{5}$ cm koji prekriva barem 3 od tih točaka.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

Primošten, 7. travnja 2008.

Zadatak 1. Dokaži da za prirodni broj n, $n > 5$ vrijede nejednakosti
$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Zadatak 2. Dokaži formulu (n je prirodni broj):
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
Odredi formulu za zbroj
$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor.$$
Tu je $\lfloor r\rfloor$ najveći cijeli broj koji nije veći od r.

Zadatak 3. Niz (x_n) definiran je rekurzivnom formulom
$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha, \\ x_{n+1} &= \sqrt{1+x_n}, \qquad n \geq 0. \end{aligned}$$
a) Dokaži da je za svaki pozitivni broj α niz (x_n) konvergentan i izračunaj mu limes.

b) Za koji realni broj α je ovaj niz konstantan?

Zadatak 4. **a)** Dokaži da se duljina težišnice izražava pomoću duljina njegovih stranica formulom
$$t_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2.$$
b) U trokutu DEF duljine stranica jednake su duljinama težišnica trokuta ABC. Ako je trokut DEF tupokutan, dokaži da je tada najmanji kut trokuta ABC manji od 45°.

Zadatak 5. Neka je A točka na hiperboli $xy = 4$, a B točka na elipsi $x^2 + 4y^2 = 4$. Dokaži da vrijedi
$$|AB| > \frac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}.$$

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.