DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija,
7. travnja 2008.

Rješenja

Zadatak 1. Neka su a, b, c proizvoljni realni brojevi. Dokaži da je barem jedan od brojeva $(a+b+c)^2-9ab$, $(a+b+c)^2-9bc$, $(a+b+c)^2-9ca$ nenegativan.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da su sva tri broja negativna. Tada imamo

$$(a+b+c)^2-9ab<0,$$
$$(a+b+c)^2-9bc<0,$$
$$(a+b+c)^2-9ca<0.$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti i sređivanjem dobivamo

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca<0,$$

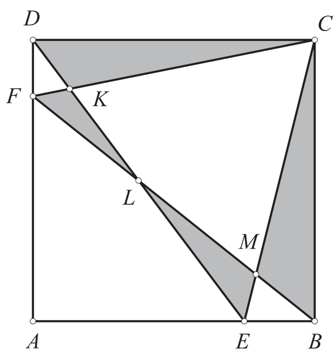
tj.

$$\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]<0.$$

Međutim, suma kvadrata triju realnih brojeva ne može biti negativna, pa zaključujemo da je barem jedan od promatrana tri broja nenegativan.

Zadatak 2. Na stranici $\overline{AB}$ kvadrata $ABCD$ dana je točka E takva da je $|AE|=3|EB|$, a na stranici $\overline{AD}$ dana je točka F takva da je $|AF|=5|FD|$. S K je označen presjek pravaca DE i CF, s L presjek pravaca DE i BF, te s M presjek pravaca BF i CE. Dokaži da je zbroj površina trokuta EML i CDK jednak zbroju površina trokuta FLK i BCM.

Rješenje.



Sa slike vidimo da su površine trokuta BCF i CDE jednake $\frac{|AB|^2}{2}$, jer imaju jednake osnovke i visine (jednake duljini stranice kvadrata). Četverokut $CKLM$ je zajednički za oba trokuta. Zato je zbroj površina trokuta EML i CDK jednak zbroju površina trokuta FLK i BCM.

Zadatak 3. Tamara i Mirjana uspoređuju svoje ušteđevine. Niti jedna nema više od 100 kuna. Svaka od njih izbroji svoju ušteđevinu u kunama i lipama. Ustanovile su da je iznos Mirjanine ušteđevine za pet lipa veći od dvostruke Tamarine ušteđevine. Tamara ima onoliko kuna koliko Mirjana ima lipa, i onoliko lipa koliko Mirjana ima kuna. Kolika je Tamarina ušteđevina?

Rješenje. Neka Tamara ima x kuna i y lipa. Tada Mirjana ima y kuna i x lipa. Nadalje ćemo sve računati u lipama. Tamara ima $100x + y$ lipa, a Mirjana $100y + x$ lipa. Prema danom uvjetu imamo

$$100y + x - 5 = 2(100x + y),$$

odakle nakon sređivanja dobivamo

$$98(y - 2x) = 3x + 5.$$

Promatramo dva slučaja.

1° Ako je $y - 2x = 1$ tada je $3x + 5 = 98$, pa je $x = 31$, $y = 63$.

2° Ako je $y - 2x \geq 2$ imamo $3x + 5 \geq 2 \cdot 98 = 196$, tj. $x \geq \dfrac{191}{3}$.

Sada je $y \geq 2 + 2x \geq 2 + 2 \cdot \dfrac{191}{3} > 100$, što je u suprotnosti s pretpostavkom.

Dakle, Tamarina ušteđevina je 31 kuna i 63 lipe.

Zadatak 4. Neka je a cijeli broj relativno prost s 35. Dokaži da je broj $(a^4 - 1)(a^4 + 15a^2 + 1)$ djeljiv s 35.

Rješenje. Kako je najveći zajednički djelitelj brojeva a i 35 jednak 1, to je najveći zajednički djelitelj brojeva a i 5, kao i a i 7 jednak 1.

Svaki cijeli broj a relativno prost s 5 može se zapisati u jednom od oblika: $5k \pm 1$ ili $5k \pm 2$, a onaj relativno prost sa 7 može se zapisati u obliku: $7k \pm 1$, $7k \pm 2$ ili $7k \pm 3$. S druge strane, dani broj se može zapisati ovako:

$$\begin{aligned} & (a^4 - 1)\left((a^4 + a^2 + 1) + 14a^2\right) \\ = \;& (a^2 - 1)(a^2 + 1)(a^4 + a^2 + 1) + 14a^2(a^4 - 1) \\ = \;& (a^6 - 1)(a^2 + 1) + 14a^2(a^4 - 1). \end{aligned}$$

Sada se lako provjeri da je svaki od ova dva sumanda djeljiv i s 5 i sa 7, tj. da je djeljiv s 35:

$$\begin{aligned} a = 5k \pm 1 \;&\Rightarrow\; a^2 = 5M + 1 \;\Rightarrow\; 5 | a^2 - 1 \\ a = 5k \pm 2 \;&\Rightarrow\; a^2 = 5M + 4 \;\Rightarrow\; 5 | a^2 + 1, \end{aligned}$$

odakle slijedi da $5 | a^4 - 1$. Zato je drugi sumand djeljiv s 35.

Nadalje, prvi sumand je djeljiv s 5, pa treba još pokazati da je djeljiv i sa 7.

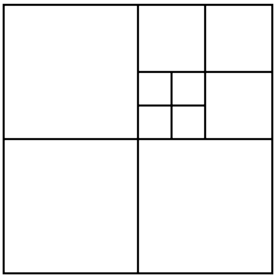
$$\begin{aligned} a = 7k \pm 1 \;&\Rightarrow\; a^2 = 7M + 1 \;\Rightarrow\; 7 | a^2 - 1 \\ a = 7k \pm 2 \;&\Rightarrow\; a^2 = 7M + 4 \;\Rightarrow\; a^4 = 7N + 2 \;\Rightarrow\; a^6 = 7W + 1 \\ a = 7k \pm 3 \;&\Rightarrow\; a^2 = 7M + 2 \;\Rightarrow\; a^4 = 7N + 4 \;\Rightarrow\; a^6 = 7W + 1, \end{aligned}$$

odakle slijedi $7 | a^6 - 1$.

Napomena. U dokazu se može se koristiti i mali Fermatov teorem.

Zadatak 5. Može li se kvadrat podijeliti na 2008 kvadrata (ne nužno istih duljina stranica)? Ako može navedi primjer, a ako ne može dokaži!

Rješenje. Pokazat ćemo metodom matematičke indukcije da se za svako $n = 1 + 3k,\ k \geq 0$ kvadrat može podijeliti na n manjih kvadrata.



Za $k = 0$ tvrdnja vrijedi.

Pretpostavimo da za neki $n = 1 + 3k,\ k \geq 0$ tvrdnja vrijedi. Podijelimo li jedan od kvadrata na četiri jednaka kvadrata, broj kvadrata povećao se za 3, pa ih ukupno ima $n = 1 + 3k + 3 = 1 + 3(k + 1)$, što znači da tvrdnja vrijedi i za $k + 1$.

Kako je $2008 = 1 + 3 \cdot 669$, kvadrat se može podijeliti na 2008 manjih kvadrata.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija,
7. travnja 2008.

Rješenja

Zadatak 1. Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$(\sqrt{x}-2)^4+(\sqrt{x}-3)^4=1.$$

Rješenje. Uvedimo supstituciju $t=\sqrt{x}-2$. Tada redom imamo:

$$\begin{gathered}
t^4+(t-1)^4=1,\\
t^4-1+(t-1)^4=0,\\
(t-1)(t+1)(t^2+1)+(t-1)^4=0,\\
(t-1)\left[(t+1)(t^2+1)+(t-1)^3\right]=0,\\
(t-1)(t^3+t^2+t+1+t^3-3t^2+3t-1)=0,\\
2t(t-1)(t^2-t+2)=0.
\end{gathered}$$

Jednadžba $t^2-t+2=0$ nema realnih rješenja pa su jedina realna rješenja dobivene jednadžbe $t_1=0$ i $t_2=1$.
Za $t_1=0$ iz $\sqrt{x}-2=0$ dobivamo $x_1=4$, a za $t_2=1$ iz $\sqrt{x}-2=1$ slijedi $x_2=9$.

Zadatak 2. Za kvadratnu funkciju $f(x)=ax^2+bx+c$ vrijede ove nejednakosti

$$f(-3)<-5, \qquad f(-1)>0, \qquad f(1)<4.$$

Dokaži da je koeficijent a manji od $-\dfrac{1}{8}$.

Rješenje. Uvrštavanjem u danu funkciju dobivamo:

$$\begin{aligned}
f(-3)&=9a-3b+c,\\
f(-1)&=a-b+c,\\
f(+1)&=a+b+c.
\end{aligned}$$

Prema uvjetima zadatka vrijedi:

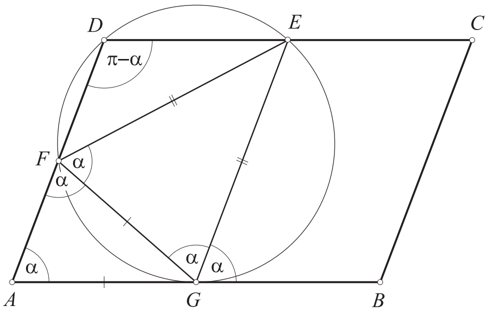
$$\begin{gathered}
9a-3b+c<-5,\\
a-b+c>0,\\
a+b+c<4.
\end{gathered}$$

Drugu nejednadžbu pomnožimo s -2, a zatim sve tri zbrojimo. Dobijemo $a<-\dfrac{1}{8}$.

Zadatak 3. Točke E, F, G su redom polovišta stranica $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{AB}$ paralelograma $ABCD$. Kružnica opisana trokutu DEF dira stranicu $\overline{AB}$ u točki G. Nađi omjer duljina stranica danog paralelograma ($|AB| : |AD|$).

Rješenje.

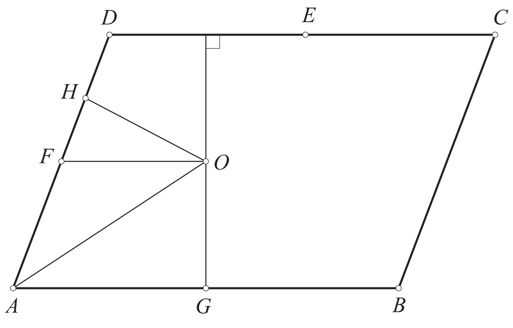
Prvo rješenje. Neka je $\sphericalangle BAD = \alpha$, $|AB| = a$, $|AD| = b$. Vrijedi, $\sphericalangle EGB = \alpha$, $\sphericalangle ADE = \pi - \alpha$. Četverokut $DFGE$ je tetivan, $\sphericalangle FGE = \alpha$, te je $\sphericalangle AGF = \pi - 2\alpha$. Zato je $\sphericalangle GFA = \alpha$. Trokut AGF je jednakokračan i $|AG| = |FG|$. Budući da je kut između tetive $\overline{EG}$ i tangente AB jednak obodnom kutu nad tetivom, slijedi $\sphericalangle EFG = \alpha$. Stoga je i trokut EFG jednakokračan pa su trokuti EFG i GAF slični.



Odavde slijedi

$$\frac{|EG|}{|FG|} = \frac{|AG|}{|AF|}, \quad \text{tj.} \quad \frac{b}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{b}{2}} \quad \text{i} \quad \frac{a}{b} = \sqrt{2}.$$

Drugo rješenje.
Neka je O središte kružnice opisane trokutu DEF, a r njezin polumjer. O leži na simetralama stranica trokuta. Kako kružnica dira $\overline{AB}$ u G, središte O leži i na okomici na AB kroz točku G. Zaključujemo da se ta okomica podudara sa simetralom dužine $\overline{DE}$. Neka je H polovište dužine $\overline{DF}$. Tada je HO okomito na AD.



Iz pravokutnih trokuta AGO i AHO izrazimo $|AO|$:

$$|AO|^2 = |AG|^2 + |OG|^2 = |AH|^2 + |HO|^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2 = \left(\frac{3}{4}b\right)^2 + |HO|^2.$$

Duljinu $|HO|$ izrazit ćemo iz pravokutog trokuta FHO:

$$|HO|^2 = |FO|^2 - |FH|^2 = r^2 - \left(\frac{b}{4}\right)^2.$$

Sada imamo:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2 = \left(\frac{3}{4}b\right)^2 + r^2 - \left(\frac{b}{4}\right)^2,$$

odakle slijedi $a^2 = 2b^2$, tj. $|AB| : |AD| = a : b = \sqrt{2}$.

Treće rješenje.
Brže je rješenje pomoću potencije točke u odnosu na kružnicu. Naime vrijedi,

$$|AF| \cdot |AD| = |AG|^2$$

odakle dobivamo $\frac{b}{2} \cdot b = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ tj. $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$.

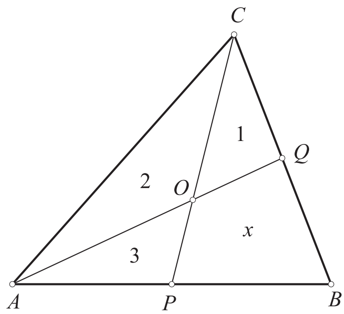
Zadatak 4. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC dane su redom točke P i Q. Dužine $\overline{AQ}$ i $\overline{CP}$ sijeku se u točki O.

Ako su površine trokuta COQ, AOC i APO redom jednake 1 cm^2, 2 cm^2 i 3 cm^2, odredi površinu četverokuta $OPBQ$.

Rješenje. Površine trokuta koji imaju zajedničku visinu odnose se kao duljine njihovih osnovica. Stoga je

$$\frac{2}{1} = \frac{P(AOC)}{P(OQC)} = \frac{|AO|}{|OQ|} = \frac{P(AOP)}{P(OQP)} = \frac{3}{P(OQP)}.$$

Odavde je $P(OQP) = 1.5\text{ cm}^2$.



Označimo li $P(OPBQ) = x$, imamo $P(PBQ) = P(OPBQ) - P(OQP) = x - 1.5$, pa je

$$\frac{5}{x+1} = \frac{P(APC)}{P(PBC)} = \frac{|AP|}{|PB|} = \frac{P(APQ)}{P(PBQ)} = \frac{4.5}{x-1.5}.$$

Rješenje jednadžbe

$$\frac{5}{x+1} = \frac{4.5}{x-1.5}$$

je $x = 24$ i površina četverokuta $OPBQ$ je 24 cm^2.

Zadatak 5. Dano je 10 složenih prirodnih brojeva manjih od 840. Dokaži da među njima postoje barem dva broja koja nisu relativno prosta.

Rješenje. Kako je $29^2 = 841$, svaki složeni broj, koji je manji od 840, djeljiv je barem s jednim prostim brojem koji nije veći od 23. Ima samo devet prostih brojeva (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 i 23) koji nisu veći od 23. Kako ima deset složenih brojeva koji su manji od 840, po Dirichletovom principu postoje dva među njima koja su djeljiva s istim prostim brojem koji nije veći od 23. Ta dva broja nisu relativno prosta.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija,
7. travnja 2008.

Rješenja

Zadatak 1. Odredi sva rješenja nejednadžbe

$$\log_2 5 \cdot \log_5\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)>1.$$

Rješenje. Izraz pod logaritmom je pozitivan jer ne mogu oba korijena istovremeno biti jednaka nuli, a da bi sve bilo definirano treba biti $\frac{1-x}{1+x}\geq 0$ i $\frac{1+x}{1-x}\geq 0$, odakle dobivamo $x\in\langle -1,1\rangle$.

Primijetimo da je $\log_2 5=\frac{1}{\log_5 2}$, pa nejednadžba prelazi u

$$\log_5\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)>\log_5 2,$$

odakle dobivamo

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}>2,$$

odnosno nakon svođenja na zajednički nazivnik,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}>1, \quad \text{tj.} \quad \sqrt{1-x^2}<1.$$

Ovo je ispunjeno za $x\neq 0$.

Rješenja nejednadžbe su $x\in\langle -1,0\rangle\cup\langle 0,1\rangle$.

Drugo rješenje.

Moraju biti zadovoljeni uvjeti $\frac{1-x}{1+x}\geq 0$ i $\frac{1+x}{1-x}\geq 0$, odakle se dobiva $x\in\langle -1,1\rangle$.

Primjenom A-G nejednakosti za dva broja vidimo da je

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\geq 2\sqrt{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}=2.$$

Jednakost se postiže za $\frac{1-x}{1+x}=1$, tj. $x=0$, pa mora biti $x\neq 0$.

Dakle, rješenje nejednadžbe je $x\in\langle -1,1\rangle\setminus\{0\}$.

Zadatak 2. Za koje realne brojeve a postoji rješenje jednadžbe

$$\cos 3x \cdot \cos^3 x - \sin 3x \cdot \sin^3 x = a\,?$$

Rješenje. Kako je $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, dana jednadžba prelazi u

$$\begin{gathered}
\cos 3x \cdot \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4} - \sin 3x \cdot \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} = a, \\
\cos^2 3x + 3\cos 3x \cos x + \sin^2 3x - 3\sin 3x \sin x = 4a, \\
1 + 3(\cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x) = 4a, \\
1 + 3\cos 4x = 4a, \\
\cos 4x = \frac{4a-1}{3}.
\end{gathered}$$

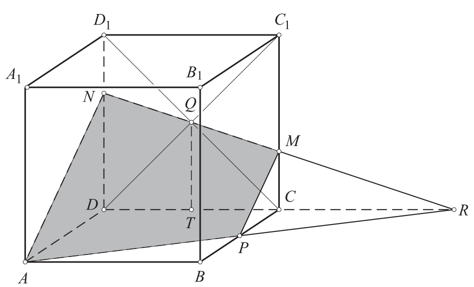
Da bi postojalo rješenje, mora biti zadovoljen uvjet

$$-1 \leq \frac{4a-1}{3} \leq 1,$$

dakle dobivamo $-\dfrac{1}{2} \leq a \leq 1$.

Zadatak 3. U kocki $ABCDA_1B_1C_1D_1$ točka P je polovište brida $\overline{BC}$, a točka Q je središte kvadrata CC_1D_1D. Ravnina kroz točke A, P i Q dijeli kocku na dva dijela. Koliki je omjer njihovih obujmova?

Rješenje. Presjek ravnine i kocke je četverokut $APMN$. Presjek pravca CD i ravnine je točka R, a T je polovište brida $\overline{CD}$. Duljinu brida kocke označimo s a, njezin obujam s V, obujam krnje piramide $ADNPCM$ s V_1, a obujam preostalog dijela kocke s V_2.



Trokuti ARD i PRC su slični pa vrijedi

$$\frac{|RD|}{|RC|} = \frac{|DA|}{|CP|} = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2,$$

odakle je $|RD| = 2|RC| \quad \Rightarrow \quad |RC| = |CD| = a.$

Iz sličnosti trokuta QTR i MCR dobivamo

$$\frac{|QT|}{|CM|} = \frac{|RT|}{|RC|} = \frac{a + \frac{a}{2}}{a} = \frac{3}{2},$$

odakle je $|CM| = \frac{2}{3}|QT| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{3}$.

Analogno se dobije $|DN| = 2|CM| = \frac{2a}{3}$.

Sada je obujam krnje piramide

$$V_1 = V_{ADNR} - V_{PCMR} = \frac{1}{3} \cdot \frac{|DA| \cdot |DN|}{2} \cdot |DR| - \frac{1}{3} \cdot \frac{|CP| \cdot |CM|}{2} \cdot |RC| = \frac{7a^3}{36}.$$

Konačno dobivamo

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V - V_1} = \frac{\frac{7a^3}{36}}{a^3 - \frac{7a^3}{36}} = \frac{7}{29}.$$

Zadatak 4. Duljine stranica trokuta su tri uzastopna prirodna broja, a jedan od kutova trokuta je dvaput veći od jednog od preostala dva kuta. Odredi duljine stranica trokuta.

Rješenje. Neka je $a = n - 1$, $b = n$, $c = n + 1$. Tada je $\alpha < \beta < \gamma$. Moguća su tri slučaja.

1° $\beta = 2\alpha$

Koristeći poučak o sinusima i kosinusov poučak dobivamo:

$$\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2a} = \frac{n}{2(n-1)},$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{n+4}{2(n+1)}.$$

Iz jednadžbe $\frac{n}{2(n-1)} = \frac{n+4}{2(n+1)}$ dobivamo $n = 2$. Stranice trokuta bi bile 1, 2 i 3, što nije moguće.

2° $\gamma = 2\alpha$

Slično kao u prethodnom slučaju dobili bismo:

$$\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{\sin\gamma}{2\sin\alpha} = \frac{n+1}{2(n-1)},$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{n+4}{2(n+1)}.$$

Iz jednadžbe $\frac{n+1}{2(n-1)} = \frac{n+4}{2(n+1)}$ se dobiva $n = 5$ i duljine stranica trokuta su 4, 5 i 6.

3° $\gamma = 2\beta$

Ponavljanjem postupka iz prethodnih dvaju slučajeva dobivamo

$$\cos\beta = \frac{\sin 2\beta}{2\sin\beta} = \frac{\sin\gamma}{2\sin\beta} = \frac{n+1}{2n},$$

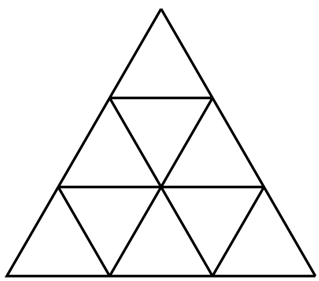
$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{n^2+2}{2(n^2-1)}.$$

Iz jednadžbe $\dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{n^2+2}{2(n^2-1)}$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $n^2 - 3n - 1 = 0$, čija rješenja $n_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ su iracionalna.

Dakle, jedino rješenje je trokut sa stranicama duljina 4, 5 i 6.

Zadatak 5. U jednakostraničnom trokutu duljine stranice 3 cm nalazi se 20 točaka. Dokaži da postoji krug polumjera $\frac{3}{5}$ cm koji prekriva barem 3 od tih točaka.

Rješenje.



Podijelimo dani trokut na 9 jednakostraničnih trokutića stranice duljine 1, kao na slici. Svaki od 9 trokutića možemo pokriti krugom polumjera

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx \frac{1.73}{3} < 0.6 = \frac{3}{5}.$$

Ovih 9 krugova pokrivaju polazni jednakostranični trokut. Budući da je u trokutu izabrano 20 točaka, po Dirichletovom principu zaključujemo da su neke tri od izabranih točaka prekrivene istim krugom.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija,
7. travnja 2008.

Rješenja

Zadatak 1. Dokaži da za prirodni broj n, $n > 5$ vrijede nejednakosti

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Rješenje. Dokazujemo matematičkom indukcijom. Za $n = 6$ tvrdnja je istinita:

$$2^6 = 64 < 6! = 720 < 729 = 3^6.$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n.

Dokažimo najprije nejednakost zdesna. Onda je

$$(n+1)! = (n+1)n! < (n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

pa je dovoljno dokazati

$$(n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^n < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} \iff 2n^n < (n+1)^n.$$

Posljednja nejednakost je istinita, jer slijedi npr. iz binomnog razvoja

$$(n+1)^n = n^n + \binom{n}{1}n^{n-1} + \ldots > 2n^n.$$

Dokažimo sad nejednakost slijeva. Prema pretpostavci indukcije, vrijedi

$$(n+1)\left(\frac{n}{3}\right)^n < (n+1)\cdot n!$$

zato je dovoljno dokazati da vrijedi:

$$\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} < (n+1)\left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

Ova je nejednakost ekvivalentna s

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Niz slijeva je rastući s limesom $e < 3$, pa je tvrdnja dokazana.

Bez pozivanja na ovu tvrdnju, nejednakost se može dokazati direktno:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n}\\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{n!}{n^n}\\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.\end{aligned}$$

Zadatak 2. Dokaži formulu (n je prirodni broj):

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Odredi formulu za zbroj

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor.$$

Tu je $\lfloor r \rfloor$ najveći cijeli broj koji nije veći od r.

Rješenje. Dokaz prve formule lako se dobije matematičkom indukcijom.

Označimo sa S_n traženi zbroj. Nekoliko prvih pribrojnika u toj sumi izgleda ovako:

$$S_n = 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + \ldots.$$

S obzirom da je

$$(n-1)^2 < n^2 - 1 < n^2,$$

vrijedi

$$n - 1 \le \lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor < n,$$

pa je posljednji pribrojnik u ovoj sumi jednak $n-1$.

Postavlja se pitanje: ako je $1 \le k \le n-1$, koliko će se puta u sumi pojaviti pribrojnik k? Tu će vrijednost imati sljedeći članovi sume:

$$\lfloor\sqrt{k^2}\rfloor, \quad \lfloor\sqrt{k^2+1}\rfloor, \ldots, \quad \lfloor\sqrt{(k+1)^2-1}\rfloor.$$

Dakle, pribrojnik k pojavljuje se $(k+1)^2 - k^2$ puta. Primijetimo da je posljednji član sume jednak $\sqrt{n^2-1}$, pa je on ujedno posljednji član u ovakvoj skupini pribrojnika. Zato je tražena suma jednaka:

$$S_n = 1 \cdot (2^2 - 1^2) + 2(3^2 - 2^2) + \ldots + (n-1)[n^2 - (n-1)^2].$$

Izračunajmo ovaj zbroj.

$$\begin{aligned} S_n &= 2^2 - 1^2 + 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 3^2 + \ldots + (n-1)n^2 - (n-1)(n-1)^2 \\ &= -1^2 - 2^2 - 3^2 - \ldots - (n-1)^2 + (n-1)n^2 \\ &= (n-1)n^2 - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Zadatak 3. Niz (x_n) definiran je rekurzivnom formulom

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha, \\ x_{n+1} &= \sqrt{1+x_n}, \qquad n \geq 0. \end{aligned}$$

a) Dokaži da je za svaki pozitivni broj α niz (x_n) konvergentan i izračunaj mu limes.

b) Za koji realni broj α je ovaj niz konstantan?

Rješenje. **a)** Promotrimo nejednakost $x_1 > x_0$. Ona je ekvivalentna s

$$\sqrt{1+\alpha} > \alpha \iff \alpha^2 - \alpha - 1 < 0$$

Budući je α pozitivan, nejednakost će biti zadovoljena ako je

$$0 < \alpha < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ako je α pozitivan broj manji od $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, onda vrijedi $x_1 > x_0$ pa je

$$1 + x_1 > 1 + x_0 \implies \sqrt{1+x_1} > \sqrt{1+x_0} \implies x_2 > x_1.$$

Sad zaključujemo da je u ovom slučaju niz (x_n) rastući. Pokažimo da je on omeđen. Za gornju među možemo uzeti bilo koji broj koji nije manji od $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Na primjer, dokažimo da je gornja međa broj 2. Vrijedi

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2, \\ x_1 &= \sqrt{1+x_0} < \sqrt{1+2} = \sqrt{3} < 2, \end{aligned}$$

i svaki sljedeći član je manji od 2. Dokazujemo matematičkom indukcijom:

$$x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} < \sqrt{1+2} = \sqrt{3} < 2.$$

Niz koji je rastući i omeđen ima limes. Označimo taj limes s L.

$$x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} \implies L = \sqrt{1+L}$$

i odavde je $L = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Na potpuno isti način dokazujemo konvergenciju ako je $\alpha > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Tada je $x_1 < x_0$, pa je onda

$$x_2 = \sqrt{1+x_1} < \sqrt{1+x_0} = x_1$$

i indukcijom zaključujemo da je niz padajući. On je omeđen odozdo, recimo konstantom 1, jer mu je svaki član očigledno veći od 1. I u ovom slučaju dobivamo isti limes.

b) Niz će biti konstantan ako je $x_1 = x_0$, a to vrijedi za $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Zadatak 4. **a)** Dokaži da se duljina težišnice izražava pomoću duljina njegovih stranica formulom

$$t_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2.$$

b) U trokutu DEF duljine stranica jednake su duljinama težišnica trokuta ABC. Ako je trokut DEF tupokutan, dokaži da je tada najmanji kut trokuta ABC manji od $45°$.

Rješenje.a) Iz poučka o kosinusu vrijedi

$$c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + t_a^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot t_a \cos\varphi,$$
$$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + t_a^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot t_a \cos(\pi - \varphi).$$

Ovdje je φ kut koji težišnica t_a zatvara sa stranicom a trokuta. Zbrajanjem dobivamo traženu formulu.

b) Veze između duljina težišnica i duljina stranica trokuta su:

$$t_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, \qquad t_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}, \qquad t_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Neka je t_a najdulja od težišnica trokuta ABC, dakle, najdulja stranica trokuta DEF. Ako je DEF tupokutan, onda mora biti

$$t_a^2 > t_b^2 + t_c^2.$$

Uvrstimo u ovu nejednakost prijašnje formule. Dobivamo

$$5a^2 < b^2 + c^2.$$

Zato za kut α u trokuta ABC vrijedi

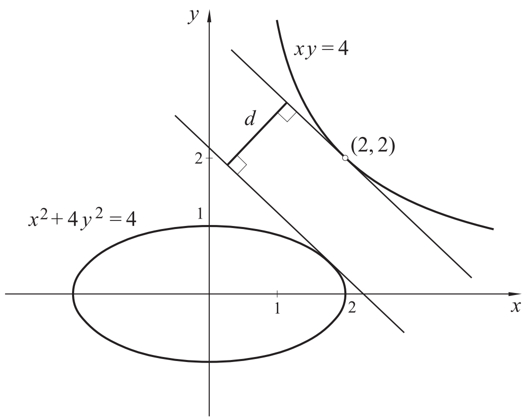
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > \frac{2(b^2 + c^2)}{5bc} = \frac{2}{5}\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq \frac{4}{5} > \frac{\sqrt{2}}{2},$$

pa je $\alpha < 45°$.

Zadatak 5. Neka je A točka na hiperboli $xy = 4$, a B točka na elipsi $x^2 + 4y^2 = 4$. Dokaži da vrijedi

$$|AB| > \frac{4 - \sqrt{5}}{\sqrt{2}}.$$

Rješenje.



Krivulje su centralnosimetrične pa je dovoljno promatrati situaciju u I. kvadrantu.

Tangenta na hiperbolu $xy = 4$ u točki $(2, 2)$ ima jednadžbu $y = 4 - x$, jer zbog simetričnosti parabole u odnosu na pravac $y = x$, hiperbola ima nagib -1. Odsječak pravca na ordinati je 4, jer točka $(2, 2)$ leži na tangenti.

Sada povlačimo tangentu na elipsu paralelnu toj tangenti. Ona će imati jednadžbu $y = -x + l$.

Iz uvjeta diranja pravca i elipse slijedi

$$a^2k^2 + b^2 = l^2, \qquad 4 + 1 = l^2,$$

pa je $l = \sqrt{5}$. Jednadžba tangente na elipsu glasi $y = \sqrt{5} - x$.

Sada ćemo izračunati udaljenost ovih dvaju pravaca. Ona je jednaka udaljenosti točke $(2, 2)$ od tangente na elipsu:

$$d = \left| \frac{2 + 2 - \sqrt{5}}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \right| = \frac{4 - \sqrt{5}}{\sqrt{2}}.$$

Udaljenost između točaka A i B sigurno je veća od ove udaljenosti, jer točka u kojoj tangenta na elipsu dira elipsu ne leži na pravcu $y = x$.