

RJEŠENJA ZA 4. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK OCIJENITI I BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. (a) $(5 \cdot 6 + 12) : 3 - 2 = 12$ 5 BODOVA
(b) $5 \cdot (6 + 12) : 3 - 2 = 28$. 5 BODOVA
..... UKUPNO 10 BODOVA
2. Sa svake strane ceste posađeno je $176 : 2 = 88$ stabala. 2 BODA
Broj razmaka između susjednih stabala istog reda manji je za 1 od broja stabala tog reda. 2 BODA
Dakle, na svakoj strani ceste je $88 - 1 = 87$ razmaka. 2 BODA
Duljina tog drvoreda jednaka je zbroju duljina svih razmaka s jedne strane ceste, odnosno umnošku broja razmaka i duljine razmaka s jedne strane ceste.
2 BODA
Konačno, duljina drvoreda breza je je $87 \cdot 6 = 522$ m. 2 BODA
..... UKUPNO 10 BODOVA
3. Ribari su prodali $23 + 19 + 32 = 74$ kg ribe. 1 BOD
Nakon što su prodali taj dio ribe ostalo im je $146 - 74 = 72$ kg ribe.
Kako su nakon te prodaje imali iste količine ribe, svima im je ostalo po $72 : 3 = 24$ kg ribe. 3 BODA
Dakle, prvi ribar je ulovio $24 + 19 = 43$ kg ribe. 2 BODA
Drugi ribar je ulovio $24 + 23 = 47$ kg ribe. 2 BODA
Konačno, treći ribar je ulovio $24 + 32 = 56$ kg ribe. 2 BODA
..... UKUPNO 10 BODOVA
4. Zadatak rješavamo grafički:
Bijele ruže: Žute ruže: Crvene ruže : 3 BODA
Imamo 6 dužina pa jedna dužina iznosi $24 : 6 = 4$. 4 BODA
Prema tome, bijelih je ruža bilo 4, žutih $2 \cdot 4 = 8$, a crvenih $4 + 8 = 12$. 3 BODA
..... UKUPNO 10 BODOVA
5. Trokuti koji se sastoje od jednog komada su *CGD*, *GED*, *EAD*, *AFD* i *DFB*. 5 BODOVA
Trokuti koji se sastoje od dva komada su *DAB*, *GAD* i *CED*. 3 BODA
Trokut koji se sastoji od tri komada je *CAD*. 1 BOD
Konačno imamo još trokut *ABC*, dakle 10 trokuta. 1 BOD
..... UKUPNO 10 BODOVA

RJEŠENJA ZA 5. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK OCIJENITI I BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Imamo redom:

$$\begin{aligned} & 73 + 2 \cdot [11147 - 27 \cdot (45 + 3105 : 9)] - 125 + 25 \cdot (48 - 45 : 3) \\ & = 73 + 2 \cdot [11147 - 27 \cdot (45 + 345)] - 125 + 25 \cdot (48 - 15) \\ & = 73 + 2 \cdot [11147 - 27 \cdot 390] - 125 + 25 \cdot 33 \end{aligned}$$

5 BODOVA

$$= 73 + 2 \cdot 617 - 125 + 825 = 73 + 1234 - 125 + 825 = 2007.$$

5 BODOVA

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Da bi se napisali svi jednoznamenasti brojevi potrebno je
 $9 \cdot 1 = 9$ znamenki.

1 BOD

Da bi se napisali svi dvoznamenkasti brojevi potrebno je
 $90 \cdot 2 = 180$ znamenki.

1 BOD

Da bi se napisali svi troznamenkasti brojevi potrebno je
 $900 \cdot 3 = 2700$ znamenki.

1 BOD

Broj u kojem se nalazi tražena znamenka je troznamenkasti jer je
 $189 < 2007 < 189 + 2700$.

2 BODA

Za troznamenkaste brojeve, zaključno sa 2007. znamenkom, ostaje
 $2007 - 189 = 1818$ znamenki od kojih se može napisati $1818 : 3 = 606$ troznamenkastih brojeva.

2 BODA

Prema tome, tražena znamenka je posljednja znamenka u 606. troznamenkastom broju.

1 BOD

Taj 606. troznamenkasti broj je $9 + 90 + 606 = 705$, pa je na 2007. mjestu znamenka 5.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka je n broj s traženim svojstvom. Lako se odredi da je
 $V(13, 15, 18) = 1170$.

1 BOD

Kako je $13 - 4 = 9$, $15 - 6 = 9$ i $18 - 9 = 9$, onda je $n = 1170 \cdot k - 9$, pri čemu je $k \in \mathbf{N}$.

1 BOD

Kako je n četveroznamenasti broj, slijedi da su traženi brojevi
1161, 2331, 3501, 4671, 5841, 7011, 8181 i 9351.

8 BODOVA

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Zadatak rješavamo grafički:

Boca: Vino:

Imamo 8 dužina pa jedna dužina iznosi $40 : 8 = 5$ kn.

Prema tome, boca stoji 5 kn, a vino $7 \cdot 5 = 35$ kn.

2 BODA

4 BODA

4 BODA

..... **UKUPNO 10 BODOVA**

5. Pravokutnik je jednoznačno određen dužinom i širinom.

Da bismo odredili dužinu pravokutnika, treba odrediti početak i kraj te dužine.

Kako horizontalno imamo 8 točaka, dvije možemo odabrati na $\frac{8-7}{2} = 28$ načina.

Rezultat smo dijelili s dva jer su na takav način sve dužine uračunate dvaput. **3 BODA**

Analogno, da bismo odredili širinu pravokutnika potrebno je odrediti početak

i kraj te dužine. Vertikalno imamo 5 točaka, pa širinu pravokutnika možemo

odabrati na $\frac{5-4}{2} = 10$ načina. **3 BODA**

Konačno, svaku dužinu možemo kombinirati sa svakom širinom, pa je ukupan

broj pravokutnika jednak $28 \cdot 10 = 280$. **4 BODA**

..... **UKUPNO 10 BODOVA**

RJEŠENJA ZA 6. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Imamo redom:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{7.5 \cdot 0.028}{\frac{3}{4} - 0.36 : 0.6} - \left(\frac{1}{15} + \frac{3}{8} + 0.725 \right) : 1\frac{1}{6} \right] : \left(4.5 - 3\frac{4}{7} \right) : \frac{28}{65} \\ & = \left[\frac{0.21}{0.75 - 0.6} - \left(\frac{53}{120} + \frac{29}{40} \right) : \frac{7}{6} \right] : \left(\frac{9}{2} - \frac{25}{7} \right) : \frac{28}{65} = \end{aligned}$$

3 BODA

$$= \left[\frac{0.21}{0.15} - \frac{140}{120} : \frac{7}{6} \right] : \frac{13}{14} : \frac{28}{65} = \left[\frac{7}{5} - 1 \right] : \frac{13}{14} : \frac{28}{65} = \frac{2}{5} \cdot \frac{14}{13} \cdot \frac{65}{28} = 1$$

7 BODOVA

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka knjiga ima x stranica. Tada je Ivan prvog dana pročitao $\frac{1}{3}x$ stranica, drugog $\frac{2}{5}x$, a trećeg $\frac{2}{5}x - 28$ stranica.

4 BODA

Prema tome, vrijedi jednačina $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}x - 28 = x$.

3 BODA

Odatle je $\frac{17}{15}x = x + 28$, tj. $\frac{2}{15}x = 28$, odakle je $x = 210$.

3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Velika kazaljka za 60 minuta prijeđe kut od 360° , a za 1 minutu kut od $360^\circ : 60 = 6^\circ$.

2 BODA

Mala kazaljka za 60 minuta prijeđe kut od 30° , a za jednu minutu

$30^\circ : 60 = 0.5^\circ$.

2 BODA

U 5 sati mala i velika kazaljka zatvaraju kut od $5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$.

1 BOD

Za 12 minuta velika kazaljka prijeđe kut od $12 \cdot 6^\circ = 72^\circ$, a mala $12 \cdot 0.5^\circ = 6^\circ$.

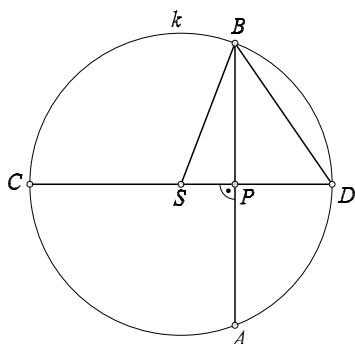
2 BODA

Prema tome, u 5 sati i 12 minuta kazaljke će zatvarati kut od $150^\circ - 72^\circ + 6^\circ = 84^\circ$.

3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

4.



1 BOD

Budući da točke B i D pripadaju kružnici k , slijedi da je $|BS| = |DS|$, odnosno trokut BSD je jednakokrakan. To znači da je $\sphericalangle SDB = \sphericalangle DBS$.

3 BODA

Kako je $\sphericalangle DBP = \sphericalangle DBS - \sphericalangle PBS$, slijedi da je $\sphericalangle DBP < \sphericalangle DBS$ odnosno $\sphericalangle DBP < \sphericalangle SDB$ pa je $\sphericalangle DBP < \sphericalangle PDB$.

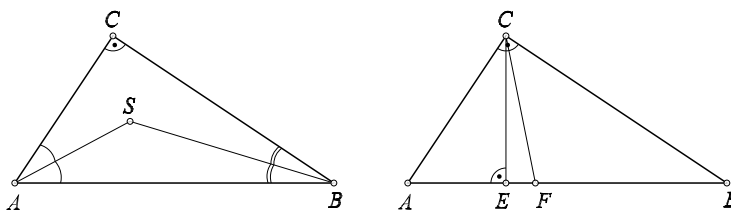
3 BODA

Promotrimo sada trokut PDB . Kako u trokutu nasuprot većeg kuta leži dulja stranica, vrijedi $|PD| < |PB|$, čime je tvrdnja dokazana.

3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

5.



1 BOD

Neka je S sjecište simetrala šiljastih kutova pravokutnog trokuta. Označimo $\sphericalangle BAC = \alpha$. Tada je $\sphericalangle SAB = \frac{\alpha}{2}$ i $\sphericalangle ABS = \frac{90^\circ - \alpha}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

2 BODA

Kako je zbroj kutova u trokutu jednak 180° , slijedi da je $\frac{\alpha}{2} + 45^\circ - \frac{\alpha}{2} + \sphericalangle ASB = 180^\circ$, odakle je $\sphericalangle ASB = 135^\circ$.

3 BODA

Neka je D nožište visine povučene iz pravog kuta, a E sjecište simetrale pravog kuta s nasuprotnom stranicom. Prema uvjetu zadatka je $\sphericalangle DCE = \frac{135^\circ}{9} = 15^\circ$.

1 BOD

Kako je CE simetrala pravog kuta slijedi da je $\sphericalangle ACD = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$.

1 BOD

Iz pravokutnog trokuta ADC slijedi da je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, i konačno, $\sphericalangle ABC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK OCIJENITI I BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Imamo redom: $\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{4}-1}\right) : \left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}} + 2 - \frac{2}{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}}\right)$

$$= \left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{3}{4}}\right) : \left(\frac{1}{\frac{1}{4}} + 2 - \frac{2}{\frac{3}{8}}\right)$$
$$= \left(3 - \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\right) : \left(6 - \frac{16}{3}\right) = \left(3 - \frac{5}{3}\right) : \frac{2}{3} = \frac{4}{3} : \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2.$$

..... UKUPNO

4 BODA
6 BODOVA
10 BODOVA

2. Mate i Ivan zajedno završe posao za 8 dana, pa slijedi da su za 2 dana obavili $\frac{1}{4}$ posla.

Kako se nakon dva dana Mate razbolio, Ivan je preostale $\frac{3}{4}$ posla obavio sam. Neka je x vrijeme u satima potrebno da Ivan sam završi posao. Kako je $\frac{3}{4}x = 9$, slijedi da je $x = 12$, tj. Ivan sam završi posao za 12 dana.

Neka je y vrijeme u satima potrebno da Mate sam obavi posao. Kako Ivan i Mate zajedno obave posao za 8 dana slijedi da je $\frac{1}{y} + \frac{1}{12} = \frac{1}{8}$, odakle je $\frac{1}{y} = \frac{1}{24}$, $y = 24$, tj. Mate sam obavi posao za 24 dana.

..... UKUPNO

2 BODA
4 BODA
4 BODA
10 BODOVA

3. Uspoređujemo masu zrna bez vlage, odnosno suhu tvar. Neka je x ukupna masa zrna nakon sušenja.

Suha tvar u zrnu neposredno nakon žetve je 84%, a nakon sušenja 87.5%.

Dakle, 84% od 4500 kg jednako je 87.5% od nepoznate količine suhog pšeničnog zrna,

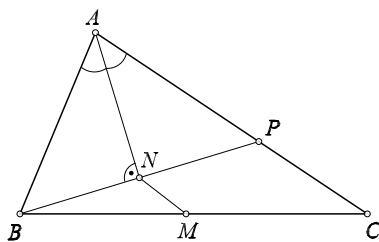
tj. mora vrijediti $0.84 \cdot 4500 = 0.875x$.

Rješavanjem gornje jednadžbe dobivamo $x = 4320$ kg.

..... UKUPNO

1 BOD
2 BODA
4 BODA
3 BODA
10 BODOVA

4.



1 BOD

Produžimo dužinu \overline{BN} preko vrha N do sjecišta P sa stranicom \overline{AC} .

1 BOD

Kako dužina \overline{AN} raspolavlja $\sphericalangle BAC$, tj. $\sphericalangle BAN = \sphericalangle NAP$, te kako pravokutni trokuti BNA i NPA imaju zajedničku stranicu slijedi da su oni sukladni.

2 BODA

Iz navedene sukladnosti slijedi da je trokut BPA jednakokračan, pa je

$$|PC| = |AC| - |AP| = |AC| - |AB|$$

2 BODA

Kako je \overline{AN} visina jednakokračnog trokuta BPA , slijedi da je N polovište dužine \overline{BP} . Kako je M polovište dužine \overline{BC} , slijedi da je dužina \overline{MN} srednjica trokuta BCP .

2 BODA

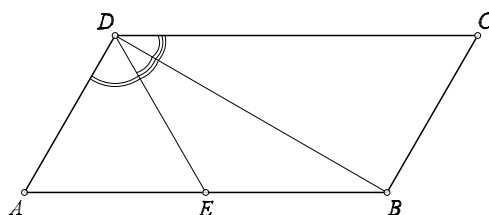
$$\text{Zbog toga je } |MN| = \frac{1}{2}|PC| = \frac{|AC|-|AB|}{2}.$$

2 BODA

..... UKUPNO

10 BODOVA

5.



1 BOD

Označimo $\sphericalangle BDE = x$. Kako je DB simetrala $\sphericalangle CDE$ slijedi da je $\sphericalangle CDB = x$, a kako je DE simetrala $\sphericalangle CDA$, slijedi da je $\sphericalangle EDA = 2x$.

2 BODA

Kako je $AB \parallel CD$ slijedi da je $\sphericalangle EBD = x$. Kako je $\sphericalangle AED$ vanjski kut trokuta EBD slijedi da je $\sphericalangle AED = 2x$, pa je trokut AED jednakokračan, tj. $|AD| = |AE|$.

2 BODA

Nadalje kako je u paralelogramu $|AB| = 2|BC|$, slijedi da je točka E polovište dužine \overline{AB} . Trokut EBD je također jednakokračan, tj. $|EB| = |ED|$, zbog čega je trokut AED jednakostraničan.

2 BODA

Zbog toga je $2x = 60^\circ$, tj. $x = 30^\circ$. Konačno, kutevi paralelograma su $4x = 120^\circ$ i $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

3 BODA

..... UKUPNO

10 BODOVA

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK OCIJENITI I BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Provedemo li u danoj jednadžbi kvadrat razlike, dobivamo

$$25x^2 - 5x + \frac{1}{4} - \left(16x^2 - 4x + \frac{1}{4}\right) = 9x^2 - 2x + \frac{1}{9},$$

6 BODOVA

odnosno, nakon oslobađanja zagrada,

$$25x^2 - 5x + \frac{1}{4} - 16x^2 + 4x - \frac{1}{4} = 9x^2 - 2x + \frac{1}{9}.$$

2 BODA

Sređivanjem obiju strana jednadžbe dobivamo jednadžbu

$$9x^2 - x = 9x^2 - 2x + \frac{1}{9},$$

1 BOD

odakle skraćivanjem i prebacivanjem nepoznanica na lijevu stranu jednadžbe dobivamo $x = \frac{1}{9}$.

1 BOD

..... UKUPNO

10 BODOVA

2. Racionalizirajmo nazivnik u svakom članu danog zbroja. Imamo da je

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2}}{\sqrt{1} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2}}{1 - 2} = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{1} + \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} &= \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{2} + \sqrt{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} &= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{4}}{\sqrt{3} - \sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{4}}{3 - 4} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{4}}{-1} = -\sqrt{3} + \sqrt{4} \\ &\dots \\ \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}} &= \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}} \cdot \frac{\sqrt{99} - \sqrt{100}}{\sqrt{99} - \sqrt{100}} = \frac{\sqrt{99} - \sqrt{100}}{99 - 100} = \frac{\sqrt{99} - \sqrt{100}}{-1} \\ &= -\sqrt{99} + \sqrt{100} \end{aligned}$$

5 BODOVA

Prema tome, traženi zbroj je jednak

$$-\sqrt{1} + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - \dots - \sqrt{99} + \sqrt{100} = -\sqrt{1} + \sqrt{100} = -1 + 10 = 9,$$

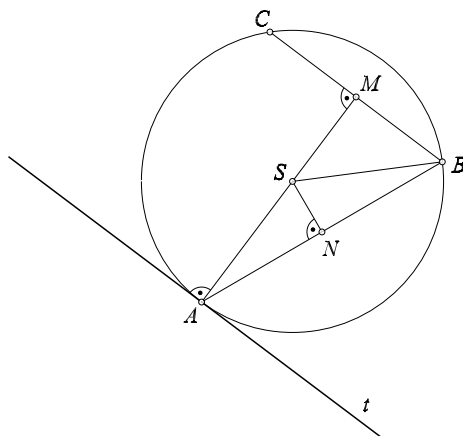
budući se u danom izrazu krata svi članovi osim prvog i posljednjeg.

5 BODOVA

..... UKUPNO

10 BODOVA

3.



1 BOD

Neka je S središte dane kružnice. Kako je t tangenta kružnice slijedi da je polumjer \overline{SA} okomit na t . Produžimo polumjer \overline{SA} preko točke S do točke M , tj. do sjecišta sa tetivom \overline{BC} . Kako je tetiva \overline{BC} paralelna sa tangentom t , slijedi da je dužina \overline{AM} okomita na tetivu \overline{BC} i duljina te dužine je tražena udaljenost.

2 BODA

Nadalje, neka je N nožište okomice iz središta S na tetivu \overline{AB} . Očito, N je polovište te tetive jer je trokut ABS jednakokravan. Stoga je $|AN| = \frac{1}{2}|AB| = 6$ cm.

1 BOD

Promotrimo sada pravokutne trokute ANS i ABM . Kako im je jedan kut zajednički, tj. $\sphericalangle NAS = \sphericalangle BAM$, slijedi da su oni slični.

2 BODA

Iz dobivene sličnosti imamo omjer $|AS| : |AB| = |AN| : |AM|$,

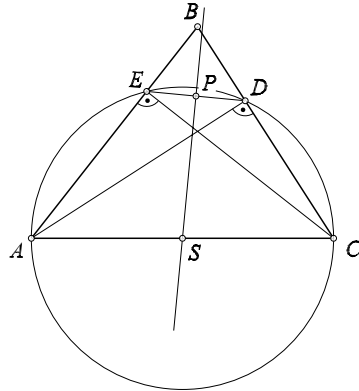
2 BODA

odakle je $|AM| = \frac{|AB| \cdot |AN|}{|AS|} = \frac{72}{8} = 9$ cm.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka su \overline{AD} i \overline{CE} dvije visine trokuta ABC , te neka je P polovište dužine \overline{ED} kao na slici:



1 BOD

Kako su \overline{AD} i \overline{CE} visine trokuta, slijedi da je $\sphericalangle ADC = \sphericalangle AEC = 90^\circ$.

2 BODA

Neka je S polovište dužine \overline{AC} . Opišimo kružnicu k nad dužinom \overline{AC} kao promjerom. Kako je prema Talesovom poučku svaki oni kut nad promjerom kružnice pravi, slijedi da točke D i E leže na toj kružnici, tj. \overline{DE} je tetiva kružnice k .

4 BODA

Konačno, okomica koja prolazi polovištem P tetive \overline{DE} je simetrala te tetive i ona prolazi središtem S kružnice k , tj. kroz polovište stranice \overline{AC} .

3 BODA

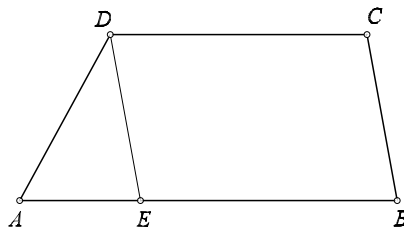
..... UKUPNO

10 BODOVA

5. Kako su poznate duljine osnovica trapeza potrebno je odrediti duljinu visine trapeza $ABCD$.

1 BOD

Povucimo vrhom D trapeza $ABCD$ paralelu sa krakom \overline{BC} , te neka ta paralela siječe osnovicu \overline{AB} u točki E kao na slici:



2 BODA

Očito, četverokut $EBCD$ je paralelogram, pa je $|AE| = |AB| - |EB| = |AB| - |CD| = 11 - 7 = 4$ cm.

1 BOD

S druge strane, visina trapeza jednaka je visini trokuta AED na stranicu \overline{AE} . Duljine stranica trokuta AED su 3 cm, 4 cm i 5 cm. Kako je $3^2 + 4^2 = 5^2$, prema obratu Pitagorina poučka slijedi da je trokut AED pravokutan, tj. $\sphericalangle DAE = 90^\circ$. Dakle, krak \overline{AD} je okomit na osnovice trapeza i njegova duljina je upravo visina trapeza.

1 BOD

3 BODA

Konačno, površina trapeza je $P = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot |AD| = \frac{11 + 7}{2} \cdot 3 = 27$ cm².

2 BODA

..... UKUPNO

10 BODOVA