Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2007.

Zadatak 1. Skraćivanjem svedite razlomak na najjednostavniji oblik:

$$\frac{bc(c^2-b^2)+ac(a^2-c^2)+ab(b^2-a^2)}{b^2c^2(c-b)+a^2c^2(a-c)+a^2b^2(b-a)}.$$

Zadatak 2. U skupu realnih brojeva riješite jednadžbu

$$\big||x+2|-2x\big|=\frac{x+3}{2}.$$

Zadatak 3. Neka je p prost broj veći od 3. Dokažite da njegov kvadrat pri dijeljenju brojem 24 daje ostatak 1.

Zadatak 4. Postoji li pravokutan trokut kojemu su duljine kateta cijeli brojevi, a duljina hipotenuze $\sqrt{2006}$?

Zadatak 5. U trokutu ABC duljine stranica su $|BC|=7$, $|AC|=3$, a kut pri vrhu A iznosi $\alpha=30^\circ$. Izračunajte duljinu stranice $\overline{AB}$.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2007.

Zadatak 1. U skupu realnih brojeva riješite jednadžbu:

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+3}=3+\sqrt{x+7}.$$

Zadatak 2. Ako je $z+\dfrac{1}{z}=1$, odredite koliko je $z^{2007}+\dfrac{1}{z^{2007}}$.

Zadatak 3. Ako su oba rješenja jednadžbe $2x^2+mx+2-n=0$ cijeli brojevi različiti od 0, dokažite da je $\dfrac{m^2+n^2}{4}$ složen cijeli broj!

Zadatak 4. Odredite sve realne parametre m za koje funkcija

$$f(x)=x^2+(m+3)x+(m+2)$$

zadovoljava sljedeća dva uvjeta:
a) $f(x)<0$ za sve $x\in\langle -1,3\rangle$;
b) zbroj recipročnih vrijednosti nultočaka manji je od $\dfrac{1}{3}$.

Zadatak 5. Neka je $ABCD$ pravokutnik sa stranicama duljina 20 i 15. Kroz točku C prolazi kružnica sa središtem u vrhu A zadanog pravokutnika. Odredite duljinu one tetive kružnice koja sadrži dijagonalu $\overline{BD}$.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2007.

Zadatak 1. Riješite jednadžbu

$$15^{\log_5 x} \cdot x^{\log_5 45x} = 1.$$

Zadatak 2. Za kutove α, β, γ trokuta ABC vrijedi

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Dokažite da je trokut pravokutan.

Zadatak 3. Duljine dviju stranica trokuta su a i b, njima nasuprotni kutovi su α i β, a visina na treću stranicu ima duljinu v.
(a) Ako za kutove vrijedi $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ ili $|\alpha - \beta| = \dfrac{\pi}{2}$, dokažite da je onda

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{v^2}.$$

(b) Ako ova jednakost vrijedi za neki trokut, dokažite da za njegove kutove vrijedi $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ ili $|\alpha - \beta| = \dfrac{\pi}{2}$.

Zadatak 4. Dana je kocka $ABCDEFGH$ duljine brida a. Izračunajte oplošje i obujam poliedra $ABDFGH$.

Zadatak 5. Obojana drvena kocka prepiljena je na n^3 $(n > 2)$ jednakih kockica. Ako je poznato da je broj kockica, kojima je točno jedna strana obojana, jednak broju kockica kojima niti jedna strana nije obojana, odredite broj n.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

29. siječnja 2007.

Zadatak 1. Kružnica je upisana u jednakostraničan trokut kojem je duljina stranice 6. Pokažite da za svaku točku T na toj kružnici vrijedi jednakost:

$$|TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2 = 45.$$

Zadatak 2. Odredite za koju je vrijednost od x četvrti član razvoja binoma

$$\left(\sqrt{2^{x-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right)^m$$

20 puta veći od eksponenta binoma ako je binomni koeficijent četvrtog člana pet puta veći od binomnog koeficijenta drugog člana.

Zadatak 3. Neka je $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$ niz realnih brojeva različitih od nule takav da vrijedi

$${x_n}^2 - x_{n+1}x_{n-1} = 1, \qquad \forall n \geq 2.$$

Dokažite da izraz $\dfrac{x_{n+1} + x_{n-1}}{x_n}$ poprima istu vrijednost za svaki $n \geq 2$.

Zadatak 4. Dokažite da za svaki prirodni broj n i nenegativan realan broj a vrijedi nejednakost

$$n(n+1)a + 2n \geq 4\sqrt{a}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}).$$

Zadatak 5. Svi sedmeroznamenkasti brojevi sastavljeni od znamenki 1 do 7 (u svakom broju pojavljuje se svaka od znamenki) poredani su po veličini počevši od najmanjeg. Na kojem se mjestu nalazi broj 3654217?

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.