OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija,
29. siječnja 2007.

Rješenja

Zadatak 1. Imamo redom:

$$
\begin{aligned}
&\frac{bc(c^2-b^2)+ac(a^2-c^2)+ab(b^2-a^2)}{b^2c^2(c-b)+a^2c^2(a-c)+a^2b^2(b-a)}\\
&\quad=\frac{bc(c^2-b^2)+a^3c-ac^3+ab^3-a^3b}{b^2c^2(c-b)+a^3c^2-a^2c^3+a^2b^3-a^3b^2}\\
&\quad=\frac{bc(c-b)(c+b)+a^3(c-b)-a(c-b)(c^2+bc+b^2)}{b^2c^2(c-b)+a^3(c-b)(c+b)-a^2(c-b)(c^2+bc+b^2)}\\
&\quad=\frac{(c-b)(bc^2+b^2c+a^3-ac^2-abc-ab^2)}{(c-b)(b^2c^2+a^3c+a^3b-a^2c^2-a^2bc-a^2b^2)} \qquad \textbf{(10 bodova)}\\
&\quad=\frac{a(a-b)(a+b)-c^2(a-b)-bc(a-b)}{a^2b(a-b)-c^2(a-b)(a+b)+a^2c(a-b)}\\
&\quad=\frac{(a-b)(a^2+ab-c^2-bc)}{(a-b)(a^2b-ac^2-bc^2+a^2c)} \qquad \textbf{(5 bodova)}\\
&\quad=\frac{(a-c)(a+c)+b(a-c)}{b(a-c)(a+c)+ac(a-c)}\\
&\quad=\frac{(a-c)(a+c+b)}{(a-c)(ab+bc+ac)}=\frac{a+b+c}{ab+bc+ac}. \qquad \textbf{(5 bodova)}
\end{aligned}
$$

Napomena. Mogući su i drugi načini faktorizacije. Tada treba bodovati na analogan način.

Zadatak 2. Predznak izraza $|x+2|$ različit je lijevo i desno od točke $x=-2$.

(a) Neka je $x<-2$:

$$
\begin{aligned}
|-x-2-2x| &= \frac{x+3}{2},\\
|3x+2| &= \frac{x+3}{2},
\end{aligned}
$$

Izraz $3x+2$ negativan je na ovom intervalu. Tako dobivamo

$$
\begin{aligned}
-3x-2 &= \frac{x+3}{2},\\
x &= -1.
\end{aligned}
$$

Ovaj broj ne pripada intervalu, pa jednadžba nema rješenja za $x < -2$. **(10 bodova)**

(b) Neka je $x \geq -2$.

$$|x + 2 - 2x| = \frac{x+3}{2},$$
$$|x - 2| = \frac{x+3}{2}.$$

Zbog promjene predznaka izraza $x-2$, ovaj interval dijelimo na dva dijela:

(b1) $-2 \leq x < 2$. Tu je $|x-2| = -x+2$ pa imamo

$$-x + 2 = \frac{x+3}{2},$$
$$x = \frac{1}{3}.$$

Broj pripada intervalu pa predstavlja rješenje jednadžbe. **(5 bodova)**

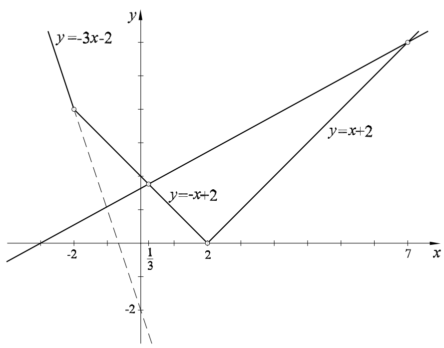
(b2) $2 \leq x$. Tu je $|x-2| = x-2$ pa imamo

$$x - 2 = \frac{x+3}{2},$$
$$x = 7.$$

Broj pripada intervalu pa predstavlja rješenje. **(5 bodova)**

Rješenja jednadžbe su $x = \frac{1}{3}$ i $x = 7$.

Napomena 1. U rješenju se ne traži da bude nacrtan graf funkcije $||x+2| - 2x|$. Onaj tko točno nacrta taj graf (a pogriješi negdje drugdje) može dobiti dodatnih 5 bodova.



Napomena 2. Ukoliko se u slučaju **(a)** ne uoči da je izraz $3x+2$ uvijek negativan i pretpostavi da može biti i $|3x+2| = 3x+2$, dobit će se $x = -\frac{1}{5}$ što nije rješenje jednadžbe.

Ukoliko se uz ispravna rješenja proglase rješenjima i neki od brojeva -1 ili $-\frac{1}{5}$, treba oduzeti 10 bodova (maksimalan broj bodova u tom slučaju je 10).

Zadatak 3. **Prvo rješenje:** Neka je p prost broj veći od 3. Treba dokazati da je $p^2 - 1$ djeljivo s 24. Imamo $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$. **(5 bodova)**

Budući da je p prost broj veći od 3, broj p mora biti neparan, pa su brojevi $p-1$ i $p+1$ uzastopni parni brojevi i jedan od njih je djeljiv s 4. Produkt $(p-1)(p+1)$ je djeljiv s 8. **(5 bodova)**

Od tri uzastopna prirodna broja $p-1$, p, $p+1$ jedan je djeljiv s 3. Kako to nije p, ostaje da je jedan od brojeva $p-1$, $p+1$ djeljiv s 3. Dakle, $(p-1)(p+1)$ je djeljivo s 8 i s 3, pa je $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ djeljivo s 24. **(10 bodova)**

Drugo rješenje: Prost broj veći od 3 je oblika $6k \pm 1$. **(5 bodova)** Stoga je

$$p^2 - 1 = (6k \pm 1)^2 - 1 = 36k^2 \pm 12k + 1 - 1 = 12k(3k \pm 1).$$

(10 bodova) Brojevi k i $3k \pm 1$ su različite parnosti, pa je njihov produkt paran broj, a gornji izraz djeljiv s 24.**(5 bodova)** Time je tvrdnja dokazana.

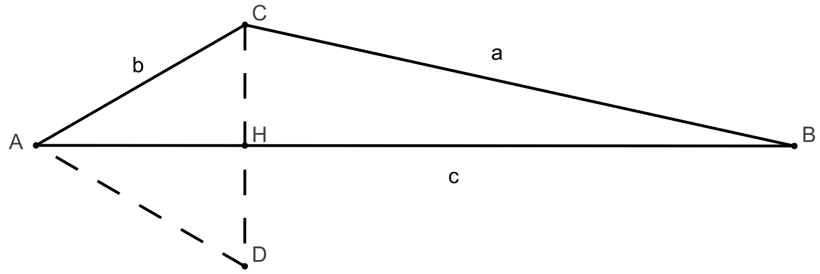
Zadatak 4. Pretpostavimo da takav trokut postoji i da su duljine kateta x i y. Iz Pitagorinog poučka je $x^2 + y^2 = 2006$. Broj 2006 je paran, pa su x i y brojevi iste parnosti.**(3 boda)** Kad bi oba bili parni, x^2, y^2 i $x^2 + y^2$ bi bili djeljivi s 4, a 2006 nije djeljiv s 4. Stoga su oba neparni. **(5 bodova)**

Uvedimo supstitucije $x = 2k+1$, $y = 2l+1$, gdje su k i l prirodni brojevi. **(2 boda)** Jednadžba tada postaje

$$\begin{aligned} (2k+1)^2 + (2l+1)^2 &= 2006 \\ 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 + 4l + 1 &= 2006 \\ 4k^2 + 4k + 4l^2 + 4l &= 2004 \qquad / : 4 \\ k(k+1) + l(l+1) &= 501. \qquad \textbf{(5 bodova)} \end{aligned}$$

Za svaki prirodan broj k, točno jedan od brojeva k, $k+1$ je paran. Stoga je lijeva strana gornje jednadžbe paran broj, a desna neparan, pa ta jednadžba, a onda i polazna jednadžba $x^2 + y^2 = 2006$ nemaju cjelobrojnih rješenja. **(5 bodova)**

Zadatak 5. Produljimo visinu $\overline{CH}$ u trokutu ABC preko točke H do točke D tako da je $|CH| = |HD|$.



(5 bodova)

Tada je $\triangle AHC \cong \triangle AHD$ (dvije stranice i kut među njima), pa je $\angle ADC = \angle ACD = 90° - \angle HAC = 90° - \alpha = 60°$. Dakle, trokut ADC je jednakostraničan, pa je $|CH| = \frac{1}{2}|CD| = \frac{b}{2}$.**(5 bodova)**

Sada primjenom Pitagorinog poučka na trokute AHC i CHB dobivamo:

$$c = |AB| = |AH| + |HB| = \sqrt{|AC|^2 - |CH|^2} + \sqrt{|BC|^2 - |CH|^2}$$
$$= \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{187}{4}} = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} + \sqrt{187})$$

(10 bodova)

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija,
29. siječnja 2007.

Rješenja

Zadatak 1. Napišimo jednadžbu u obliku

$$\sqrt{2x+1}-3=\sqrt{x+7}-\sqrt{x+3}.$$

Da bi korijeni bili definirani, izrazi $x+7$ i $x+3$ moraju biti pozitivni. Onda je $\sqrt{x+7}>\sqrt{x+3}$ pa je desna strana pozitivna. Zato mora i lijeva strana biti pozitivna, odakle slijedi $\sqrt{2x+1}>3$, odnosno $x>4$. Kad su obje strane pozitivne, kvadriranjem ćemo dobiti ekvivalentnu jednadžbu:

$$\begin{aligned}
2x+1-6\sqrt{2x+1}+9&=x+7+x+3-2\sqrt{(x+7)(x+3)},\\
3\sqrt{2x+1}&=\sqrt{(x+7)(x+3)},\\
18x+9&=x^2+10x+21,\\
x^2-8x+12&=0.
\end{aligned}$$

Rješenja ove jednadžbe su $x=2$ i $x=6$. Zbog uvjeta $x>4$, samo je $x=6$ rješenje početne jednadžbe.**(20 bodova)**

Napomena 1. Učenik ne mora načiniti analizu lijeve i desne strane u prvoj jednakosti. Umjesto toga, može provjeriti zadovoljavaju li dobiveni brojevi početnu jednadžbu. Za $x=2$ ona glasi

$$\sqrt{5}-3=\sqrt{9}-\sqrt{5}$$

pa jednadžba nije zadovoljena, a za $x=6$ dobivamo istinitu jednakost.

$$\sqrt{13}-3=\sqrt{13}-\sqrt{9}$$

Ukoliko se provjera ne učini, već se i $x=2$ proglasi rješenjem, treba oduzeti 10 bodova.

Napomena 2. Ukoliko se jednadžba kvadrira u početnom obliku, izrazi će se ponešto zakomplicirati. Nakon prvog kvadriranja i sređivanja, dobiva se

$$\sqrt{(2x+1)(x+3)}=3\sqrt{x+7}-(x-6).$$

Nakon drugog kvadriranja i sređivanja dobivamo

$$x^2+10x-96=6(x-6)\sqrt{x+7}.$$

Sad je potrebno jednadžbu napisati u obliku:

$$(x-6)(x+16)=6(x-6)\sqrt{x+7}.$$

Odavde slijedi $x = 6$, ili

$$x + 16 = 6\sqrt{x + 7}.$$

Sad treba provjeriti da je $x = 6$ rješenje jednadžbe. Iz ostatka kvadriranjem dobivamo

$$x^2 + 32x + 256 = 36(x + 7),$$
$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

i odavde $x = 2$, što nije rješenje početne jednadžbe.

Zadatak 2. Prvo rješenje: Uvjet $z + \frac{1}{z} = 1$ zapišemo drukčije:

$$z^2 - z + 1 = 0$$

Množenjem sa $z + 1$ dobivamo

$$z^3 + 1 = 0$$

$$z^3 = -1.$$

(10 bodova) Odavde slijedi

$$z^{2007} = (z^3)^{669} = (-1)^{669} = -1,$$

pa je

$$z^{2007} + \frac{1}{z^{2007}} = -1 + \frac{1}{-1} = -2.$$

(10 bodova)

Drugo rješenje: Označimo $S_n = z^n + \frac{1}{z^n}$. Iz uvjeta $z + \frac{1}{z} = 1$, kvadriranjem dobivamo

$$S_2 = z^2 + \frac{1}{z^2} = -1$$

Množenjem ove jednakosti sa $z + \frac{1}{z} = 1$, slijedi

$$z^3 + \frac{1}{z^3} + z + \frac{1}{z} = -1,$$

pa je

$$S_3 = -1 - S_1 = -2. \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Na isti način dalje dobivamo

$$S_4 = -2 - S_2 = -1, \qquad S_5 = -1 - S_3 = 1, \qquad S_6 = 1 - S_4 = 2.$$

Dalje će postupak davati već poznate brojeve:

$$S_7 = 1 = S_1, \qquad S_8 = -1 = S_2, \qquad S_9 = -2 = S_3, \ \ldots \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Period u ovom nizu je duljine 6. Zato je

$$S_{2007} = S_3 = -2. \qquad \textbf{(10 bodova)}$$

Zadatak 3. Prema Vièteovim formulama slijedi

$$x_1 + x_2 = \frac{-m}{2},$$

$$x_1 \cdot x_2 = 1 - \frac{n}{2}. \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Odavde je $m = -2(x_1 + x_2)$ i $n = 2(1 - x_1 \cdot x_2)$.**(3 boda)** Dalje imamo:

$$\frac{m^2 + n^2}{4} = (x_1 + x_2)^2 + (1 - x_1 \cdot x_2)^2 =$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + 1 + x_1^2 x_2^2 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1),$$

a to je složen cijeli broj ako su x_1 i x_2 cijeli brojevi različiti od nule. **(12 bodova)**

Zadatak 4. Prvo rješenje: Budući da se radi o kvadratnoj funkciji s pozitivnim vodećim koeficijentom, uvjet $f(x) < 0$ za sve $x \in \langle -1, 3\rangle$ ekvivalentan je uvjetima $f(-1) \le 0$ i $f(3) \le 0$, koji se mogu napisati kao sustav nejednadžbi:

$$1 - m - 3 + m + 2 \le 0,$$

$$9 + 3m + 9 + m + 2 \le 0.$$

Prva nejednadžba je trivijalna ($0 \le 0$), a druga se svodi na uvjet $m \le -5$. **(5 bodova)**

Promotrimo sada drugi uvjet,

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < \frac{1}{3}.$$

Lijevu stranu po Vièteovim formulama možemo pisati kao

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-m-3}{m+2}, \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

pa nejednadžba postaje

$$\frac{-m-3}{m+2} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{-m-3}{m+2} - \frac{1}{3} < 0$$

$$\frac{-4m-11}{3(m+2)} < 0.$$

Zbog $m \leq -5$ slijedi $m+2<0$, pa je gornja nejednadžba ekvivalentna sa $-4m-11>0$, što uvijek vrijedi zbog $m \leq -5$. Dakle, $m \in \langle -\infty, -5]$.
(10 bodova)

Drugo rješenje: Budući da se radi o kvadratnoj funkciji s pozitivnim vodećim koeficijentom, uvjet $f(x)<0$ za sve $x \in \langle -1, 3\rangle$ ekvivalentan je uvjetima $f(-1) \leq 0$ i $f(3) \leq 0$, koji se mogu napisati kao sustav nejednadžbi:

$$1-m-3+m+2 \leq 0$$

$$9+3m+9+m+2 \leq 0$$

Prva nejednadžba je trivijalna ($0 \leq 0$), a druga se svodi na uvjet $m \leq -5$.
(5 bodova)

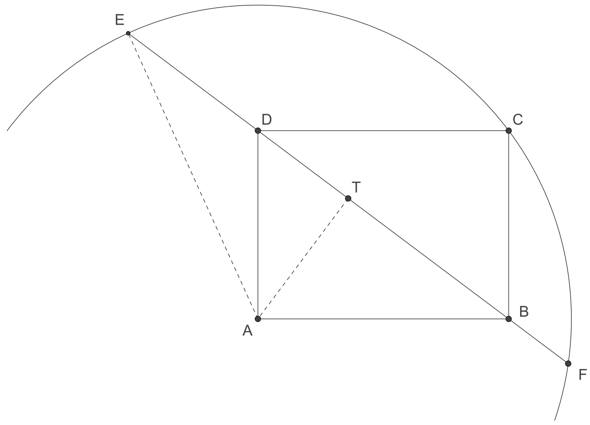
Ako sa x_1 označimo manju nultočku, a sa x_2 veću, gornji uvjet $f(x)<0$ za sve $x \in \langle -1, 3\rangle$ povlači i $x_1 \leq -1$, $x_2 \geq 3$. Sada slijedi:

$$\frac{1}{x_1}<0, \qquad \frac{1}{x_2}<\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3},$$

pa je drugi uvjet automatski zadovoljen i rješenje je $m \in \langle -\infty, -5]$.
(15 bodova)

Zadatak 5. Nacrtajmo sliku: **(3 boda)**



Polumjer kružnice je dijagonala pravokutnika, pa po Pitagorinom poučku njegova duljina iznosi

$$r=|AC|=\sqrt{20^2+15^2}=25. \qquad \textbf{(2 boda)}$$

Tražimo duljinu tetive $\overline{EF}$. Neka je T njezino polovište. $\overline{AT}$ je okomito na $\overline{EF}$, pa je $\overline{AT}$ visina trokuta BAD. Iz formule za površinu pravokutnog trokuta BAD (ili iz sličnosti trokuta ATD i BAD) dobivamo

$$|AT|=\frac{|AB|\cdot|AD|}{|BD|}=12. \qquad \textbf{(10 bodova)}$$

Sada iz Pitagorinog poučka za trokut ATE slijedi:

$$\left(\frac{|EF|}{2}\right)^2 = |ET|^2 = r^2 - |AT|^2 = 481$$

odnosno $|EF| = 2\sqrt{481}$. **(5 bodova)**

Napomena. (Drugo rješenje): Zadatak se može riješiti i koordinatnom metodom. Pravokutnik postavimo u koordinatni sustav tako da je $A(0,0)$, $B(20,0)$, $C(20,15)$ i $D(0,15)$.

Spomenuta kružnica je skup svih $T(x,y)$ za koje je $|AT| = 25$, odnosno $x^2 + y^2 = 625$. Pravac kroz točke B i D ima jednadžbu $3x + 4y = 60$.

Sada je moguće odrediti njihova sjecišta (krajeve spomenute tetive), i izračunati njihovu udaljenost.

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija, 29. siječnja 2007.

Rješenja

Zadatak 1. Da bi jednadžba imala smisla treba biti $x > 0$. Logaritmiranjem jednadžbe po bazi 5 dobivamo:

$$\log_5 x \cdot \log_5 15 + \log_5 45x \cdot \log_5 x = 0. \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Dalje redom imamo:

$$\begin{aligned} \log_5 x(\log_5 15 + \log_5 45x) &= 0 \\ \log_5 x(\log_5 15 + \log_5 45 + \log_5 x) &= 0 \\ \log_5 x(\log_5 675 + \log_5 x) &= 0, \qquad \textbf{(5 bodova)} \end{aligned}$$

Odavde dobivamo dva rješenja:

$$\begin{aligned} \log_5 x = 0 &\implies x_1 = 1 \\ \log_5 x + \log_5 675 = 0 &\implies x_2 = \frac{1}{675}. \qquad \textbf{(10 bodova)} \end{aligned}$$

Zadatak 2. Izraz $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1$ može se transformirati u umnožak kosinusa na neki od sljedećih načina:

Prvi način:

$$\begin{aligned} 0 &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1 \\ &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \sin^2\gamma \\ &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \sin^2[\pi - (\alpha+\beta)] \\ &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \sin^2(\alpha+\beta) \\ &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 \\ &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta - 2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta \\ &= \cos^2\alpha(1-\sin^2\beta) + \cos^2\beta(1-\sin^2\alpha) - 2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta \\ &= 2\cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta \\ &= 2\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \\ &= 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) \\ &= -2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \end{aligned}$$

Drugi način:

$$\begin{aligned}
0 &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1 \\
&= \frac{1+\cos 2\alpha}{2} + \frac{1+\cos 2\beta}{2} + \cos^2\gamma - 1 \\
&= \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} + \cos^2\gamma \\
&= \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \cos^2\gamma \\
&= \cos(\pi-\gamma)\cos(\alpha-\beta) + \cos^2\gamma \\
&= -\cos\gamma\cos(\alpha-\beta) + \cos^2\gamma \\
&= -\cos\gamma(\cos(\alpha-\beta) - \cos\gamma) \\
&= -\cos\gamma(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)) \\
&= -2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma
\end{aligned}$$

Sad zaključujemo da neki od kosinusa $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ mora biti jednak nuli, pa je taj kut pravi. **(20 bodova)**

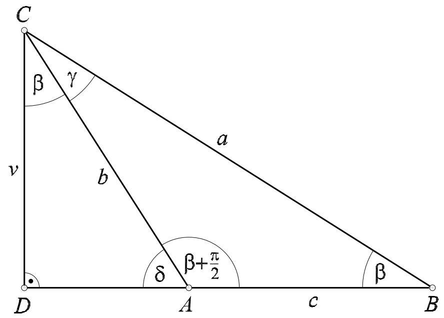
Napomena. Ukoliko se u postupku transformacija ne izvede završni izraz, može se dobiti najviše 5 bodova.

Zadatak 3. Obje se tvrdnje mogu dokazati na više načina. Dokaz tvrdnje **(a)** treba bodovati s 10 bodova, kao i dokaz tvrdnje **(b)**.

Prvi dokaz tvrdnje (a). Ako vrijedi $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$, tj. ako je trokut pravokutan, onda je, iz jednakosti površina, $ab = cv$, pa dobivamo

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2+a^2}{a^2b^2} = \frac{c^2}{c^2v^2} = \frac{1}{v^2}. \qquad \textbf{(3 boda)}$$

Pretpostavimo sad da trokut nije pravokutan. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\alpha > \beta$, t.j. da vrijedi $\alpha = \beta + \dfrac{\pi}{2}$. Nacrtajmo sliku:



(2 boda)

U pravokutnom trokutu ACD za kut δ vrijedi $\delta = \pi - \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ pa je kut $\angle ACD = \beta$. **(2 boda)**

Iz pravokutnih trokuta ACD i BCD sada čitamo:

$$\cos\beta = \frac{v}{b}, \qquad \sin\beta = \frac{v}{a}$$

pa je

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{\sin^2\beta}{v^2}+\frac{\cos^2\beta}{v^2}=\frac{\sin^2\beta+\cos^2\beta}{v^2}=\frac{1}{v^2}. \qquad \textbf{(3 boda)}$$

Drugi dokaz tvrdnje (a). Vrijedi

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{a^2\sin^2\gamma+b^2\sin^2\gamma}{a^2b^2\sin^2\gamma}.$$

Sad koristimo poučak o sinusima i formule za površinu trokuta:

$$\begin{aligned}\frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} &\implies a\sin\gamma=c\sin\alpha,\\ \frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} &\implies b\sin\gamma=c\sin\beta,\\ a^2b^2\sin^2\gamma&=4P=c^2v^2.\end{aligned}$$

Dobivamo:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{c^2\sin^2\alpha+c^2\sin^2\beta}{c^2v^2}=\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}{v^2}.$$

Ako je trokut pravokutan, onda je $\sin\beta=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$. Ako u trokutu vrijedi $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$, onda je $\sin\beta=\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})=-\cos\alpha$. Ako pak vrijedi $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$, onda je $\sin\beta=\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})=\cos\alpha$. U svim je tim situacijama

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

i tvrdnja je dokazana.**(10 bodova)**

Dokaz tvrdnje (b) Postupkom kao u drugom dokazu tvrdnje **(a)**, ili na neki drugi način, treba doći do ekvivalencije

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{v^2} \iff \sin^2\alpha+\sin^2\beta=1. \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Ta je relacije ekvivalentna s

$$\sin^2\alpha=\cos^2\beta$$

odnosno

$$\sin\alpha=\cos\beta \quad \text{ili} \quad \sin\alpha=-\cos\beta.$$

Sad treba utvrditi vezu između kutova α i β, imajući u vidu da su to kutovi u trokutu:

$$\sin\alpha=\cos\beta=\sin(\frac{\pi}{2}-\beta) \implies \alpha=\frac{\pi}{2}-\beta+2k\pi \quad \text{ili} \quad \alpha=\pi-(\frac{\pi}{2}-\beta)+2k\pi.$$

Ovi su uvjeti mogući u trokutu samo za $k=0$. Iz prvog dobivamo $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, a iz drugog $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$.

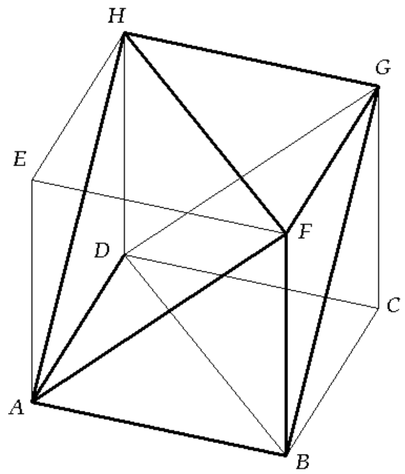
Na isti način,

$$\sin\alpha = -\cos\beta = \sin(\beta - \frac{\pi}{2}) \implies \alpha = \beta - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ili} \quad \alpha = \pi - (\beta - \frac{\pi}{2}) + 2k\pi.$$

Drugi uvjet, $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2} + k\pi$ nije moguć niti za jedan cjelobrojni k. Iz prvog uvjeta, za $k = 0$, dobivamo $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$.

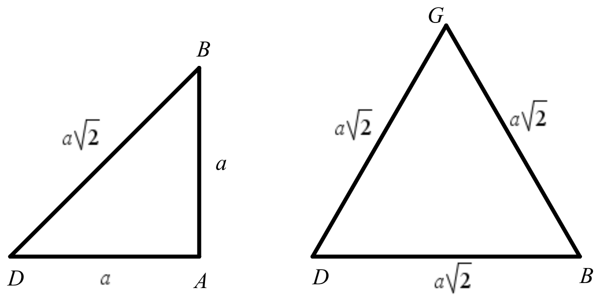
Prema tome, $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1$ vrijedit će samo ako je $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ ili $|\alpha - \beta| = \frac{\pi}{2}$, što je i trebalo dokazati. **(5 bodova)**

Zadatak 4.



Ispravan crtež: **(2 boda)** .

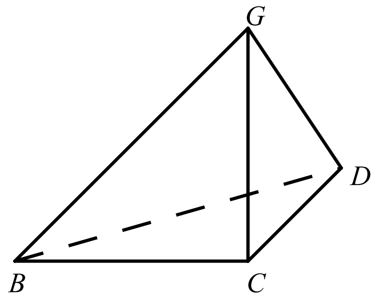
Oplošje se sastoji od 8 trokuta, dva veća jednakostranična: AFH i BDG te šest manjih pravokutnih jednakokračnih:



$$P_1 = \frac{a^2}{2}, \quad P_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$O = 6P_1 + 2P_2 = 3a^2 + a^2\sqrt{3} = a^2(3 + \sqrt{3}). \qquad \textbf{(10 bodova)}$$

Volumen poliedra $ABDFGH$ dobit ćemo najlakše ako od volumena kocke oduzmemo volumene sukladnih piramida $BCDG$ i $AEFH$:

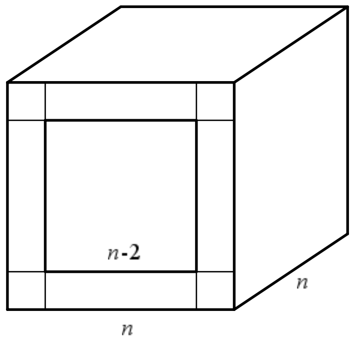


$$V_1 = V_{\text{kocke}} = a^3, \quad V_2 = V_{\text{tetraedra}} = \frac{1}{6}a^3$$

$$V = V_1 - 2V_2 = a^3 - \frac{1}{3}a^3 = \frac{2}{3}a^3. \qquad \textbf{(8 bodova)}$$

Zadatak 5.

Na jednoj strani kocke ima $(n-2)^2$ kockica kojima je jedna strana obojana zeleno. Ukupno je takvih kockica $6(n-2)^2$. Neobojanih kockica ima $(n-2)^3$.



$$6(n-2)^2 = (n-2)^3 \mid : (n-2)^2 \neq 0$$
$$6 = n - 2 \implies n = 8 \qquad \textbf{(20 bodova)}$$

Napomena. Dođe li učenik do rješenja isprobavajući za $n = 3, 4, \ldots, 8$ a ne pokaže da je to jedino rješenje, treba oduzeti 10 bodova!

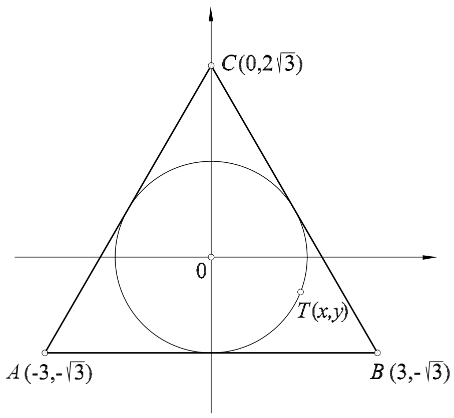
OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija, 29. siječnja 2007.

Rješenja

Zadatak 1. Zadatak rješavamo analitičkom geometrijom. Trokut možemo smjestiti u koordinatni sustav na različite načine.

(a) Neka središte kružnice bude u ishodištu.



(2 boda)

Visina trokuta je $6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$. Polumjer kružnice je trećina visine, $r = \sqrt{3}$. Koordinate vrhova su $A(-3, -\sqrt{3})$, $B(3, -\sqrt{3})$, $C(0, 2\sqrt{3})$, a koordinate točke T na kružnici $T(x, y)$. Jednadžba kružnice je

$$x^2 + y^2 = 3. \qquad \textbf{(8 bodova)}\ .$$

Stoga vrijedi:

$$\begin{aligned}
|TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2 &= (x+3)^2 + (y+\sqrt{3})^2 + (x-3)^2 + (y+\sqrt{3})^2 \\
&\quad + x^2 + (y-2\sqrt{3})^2 \\
&= x^2 + 6x + 9 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 + x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 \\
&\quad + x^2 + y^2 - 4\sqrt{3}y + 12 \\
&= 3(x^2 + y^2) + 36 \\
&= 9 + 36 = 45. \qquad \textbf{(10 bodova)}
\end{aligned}$$

(b) Izabere li učenik koordinatni sustav tako da vrh A bude u ishodištu, onda su koordinate vrhova $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(3, 3\sqrt{3})$, središte kružnice je $S(3, \sqrt{3})$. Jednadžba trokutu upisane kružnice je:

$$(\sqrt{3})^2 = (x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2,$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 2\sqrt{3}y + 9 = 0.$$

Stoga vrijedi:

$$\begin{aligned}
|TA|^2+|TB|^2+|TC|^2 &= (x^2+y^2)+((x-6)^2+y^2)+((x-3)^2+(y-3\sqrt{3})^2) \\
&= 3x^2+3y^2-18x-6\sqrt{3}y+72 \\
&= 3(x^2-6x+y^2+2\sqrt{3}y+9)+45=45.
\end{aligned}$$

Boduje se na isti način kao u slučaju **(a)**.

Zadatak 2. Iz uvjeta $\binom{m}{3}=5\cdot\binom{m}{1}$ dobivamo:

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{6}=5m. \qquad \textbf{(3 boda)}$$

Kako je m prirodan broj veći ili jednak 3, dijeljenjem s m dobivamo jednadžbu:

$$m^2-3m-28=0,$$

čija su rješenja $m_1=-4$ (koje otpada jer nije prirodan broj) i $m_2=7$. **(7 bodova)** Tada je:

$$\binom{7}{3}(\sqrt{2^{x-1}})^4\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right)^3=20\cdot 7,$$

$$35\cdot 2^{2x-2}\cdot 2^{-x}=140,$$

$$2^{x-2}=4=2^2,$$

$$x=4. \qquad \textbf{(10 bodova)}$$

Napomena. Ukoliko se ne odbaci rješenje kvadratne jednadžbe $m_1=-4$, dobit će se odgovarajući $x=-\frac{21}{5}$. Ako učenik ne odbaci to rješenje, treba oduzeti 7 bodova.

Zadatak 3. Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom. Dovoljno je pokazati da jednakost

$$\frac{x_{n+2}+x_n}{x_{n+1}}=\frac{x_{n+1}+x_{n-1}}{x_n}$$

vrijedi za svaki $n\geq 2$. Ova jednakost je ekvivalentna jednakosti

$$x_{n+2}x_n+{x_n}^2={x_{n+1}}^2+x_{n+1}x_{n-1},$$

$${x_n}^2-x_{n+1}x_{n-1}={x_{n+1}}^2-x_{n+2}x_n,$$

koja vrijedi jer su po uvjetima zadatka obje strane jednake 1. **(20 bodova)**

Zadatak 4. Prvo rješenje: Prema nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine vrijede sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned} a+1 &\geq 2\sqrt{a}, \\ 2a+1 &\geq 2\sqrt{2a}, \\ &\vdots \\ na+1 &\geq 2\sqrt{na}. \end{aligned} \qquad \textbf{(10 bodova)}$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti i sređivanjem dobivamo redom:

$$\begin{aligned} (a+1)+(2a+1)+\cdots+(na+1) &\geq 2\sqrt{a}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}), \\ a(1+2+\cdots+n)+n &\geq 2\sqrt{a}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}), \\ a\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n &\geq 2\sqrt{a}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}), \\ n(n+1)a+2n &\geq 4\sqrt{a}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}), \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.**(10 bodova)**

Drugo rješenje: Dokazujemo indukcijom. Za $n = 1$ tvrdnja glasi

$$2a+2 \geq 4\sqrt{a} \iff 2(\sqrt{a}-1)^2 \geq 0. \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n. Tada za $n+1$ trebamo dokazati

$$(n+1)(n+2)a+2(n+1) \geq 4\sqrt{a}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}). \qquad \textbf{(3 boda)}$$

Koristimo pretpostavku indukcije:

$$n(n+1)a+2n \geq 4\sqrt{a}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}).$$

Zato je

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2)a+2(n+1) &= n(n+1)a+2n+2a(n+1)+2 \\ &\geq \left[4\sqrt{a}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})\right]+2a(n+1)+2 \end{aligned}$$

(6 bodova) . Za dovršenje dokaza trebamo dokazati nejednakost

$$2a(n+1)+2 \geq 4\sqrt{a}\sqrt{n+1}.$$

Ovo je nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine. Time je tvrdnja dokazana.**(6 bodova)**

Zadatak 5. Ispred danog se broja nalaze svi brojevi koji počinju znamenkama 1 i 2, a njih ima $2\cdot 6!$. Isto se tako ispred danog broja nalaze i svi brojevi koji počinju znamenkom 3, a druga znamenka im je $1, 2, 4$ ili 5, a takvih ima $4\cdot 5!$. Ako nastavimo tako razmišljati, dobijemo da se ispred danog broja nalazi ukupno $2\cdot 6! + 4\cdot 5! + 3\cdot 4! + 2\cdot 3! + 1\cdot 2! = 2006$ brojeva, što znači da se dani broj nalazi na 2007. mjestu. **(20 bodova)**

Napomena. Ukoliko učenik napravi bilo koju pogrešku u prebrojavanju, može dobiti najviše 10 bodova.