Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

29. siječnja 2007.

Zadatak 1. Dokažite da za međusobno različite realne brojeve a, b i c vrijedi

$$\frac{a-b}{2(c-a)(c-b)}+\frac{b-c}{2(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{2(b-a)(b-c)}=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}.$$

Zadatak 2. Učenik mora pomnožiti 78 s dvoznamenkastim brojem u kojemu je znamenka desetica tri puta veća od znamenke jedinica. Greškom je zamijenio znamenke jedinice i desetice tog broja i dobio umnožak za 2808 manji od pravog. Koliki je stvarni umnožak?

Zadatak 3. Brojevi 5777 i 8924 podijeljeni istim prirodnim brojem n daju redom ostatke 20 i 36. Koji je to broj n?

Zadatak 4. U skupu realnih brojeva riješite jednadžbu

$$\big||x+2|-2x\big|=\frac{x+3}{2}.$$

Zadatak 5. U trokutu ABC duljine stranica su $|BC|=7$, $|AC|=3$, a kut pri vrhu A iznosi $\alpha=30^\circ$. Izračunajte duljinu stranice $\overline{AB}$.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

29. siječnja 2007.

Zadatak 1. U skupu realnih brojeva riješite jednadžbu:

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+3}=3+\sqrt{x+7}.$$

Zadatak 2. Ako je $z \in \mathbf{C} \backslash \mathbf{R}$ rješenje jednadžbe $x^3-1=0$, koliko je $(1-z+z^2)\cdot(1+z-z^2)$?

Zadatak 3. U pravokutnom trokutu zbroj kvadrata duljina svih triju stranica iznosi 1682, a opseg trokuta je 70. Izračunajte duljine stranica trokuta.

Zadatak 4. Za koje vrijednosti realnog parametra a funkcija

$$f(x)=a^2x^2+2(a+3)x+1$$

ima dvije različite realne nultočke? Za najmanju cjelobrojnu vrijednost takvog parametra a izračunajte:

$$x_1^{-3}-x_1^{-2}+x_2^{-3}-x_2^{-2}$$

(x_1 i x_2 su nultočke funkcije f).

Zadatak 5. Duljine stranica trokuta ABC su $|AB|=14$, $|BC|=15$, $|CA|=13$. Na stranici $\overline{AB}$ uočimo točku K za koju je $|AK|=x$. Izračunaj površinu paralelograma $AKLM$, gdje je L točka na stranici $\overline{BC}$, a M točka na stranici $\overline{CA}$. Za koji će x ta površina biti najveća?

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

29. siječnja 2007.

Zadatak 1. Riješite jednadžbu

$$15^{\log_5 x} \cdot x^{\log_5 45x} = 1.$$

Zadatak 2. Duljine dviju stranica trokuta su a i b, njima nasuprotni kutovi su α i β, a visina na treću stranicu ima duljinu v. Ako za kutove vrijedi $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ ili $|\alpha - \beta| = \dfrac{\pi}{2}$, dokažite da je onda

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{v^2}.$$

Zadatak 3. Riješite jednadžbu

$$\log \operatorname{tg} 1^\circ + \log \operatorname{tg} 2^\circ + \log \operatorname{tg} 3^\circ + \cdots + \log \operatorname{tg} 89^\circ = \cos 2x.$$

Zadatak 4. Oko kugle polumjera r opisan je stožac polumjera baze R. Koliki je obujam stošca?

Zadatak 5. Postoje li prirodni broj $n \in \mathbf{N}$ i neparan prirodni broj $m \in \mathbf{N}$ takvi da vrijedi

$$1 + m + m^2 + \cdots + m^{2007} = 3^n \ ?$$

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

29. siječnja 2007.

Zadatak 1. Zadani su pravci $y = 0.75x + 6$, $y = 0.75x + 3$ i točka $T(7, 24)$. Nađite jednadžbu pravca koji sadrži zadanu točku, a između zadanih pravaca čini odsječak duljine 4.

Zadatak 2. Dokažite da je za svaki prirodan broj n broj $\mathrm{Re}\Big((1+i\sqrt{3})^n\Big)$ cijeli broj djeljiv s 2^{n-1}.

Zadatak 3. Odredite za koju je vrijednost od x četvrti član razvoja binoma

$$\left(\sqrt{2^{x-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right)^m$$

20 puta veći od eksponenta binoma ako je binomni koeficijent četvrtog člana pet puta veći od binomnog koeficijenta drugog člana.

Zadatak 4. Dokažite da za svaki prirodni broj n i nenegativan realan broj a vrijedi nejednakost

$$n(n+1)a + 2n \geq 4\sqrt{a}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}).$$

Zadatak 5. Nađite sva cjelobrojna rješenja sljedećeg sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned} ab + 5 &= c, \\ bc + 1 &= a, \\ ca + 1 &= b. \end{aligned}$$

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.