OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija,
29. siječnja 2007.

Rješenja

Zadatak 1. Prvo rješenje. Zapišemo li brojnike razlomaka na lijevoj strani ovako

$$\begin{aligned} a-b &= (a-c)+(c-b), \\ b-c &= (b-a)+(a-c), \\ c-a &= (c-b)+(b-a), \end{aligned}$$

vidimo da vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{2(c-a)(c-b)} &= \frac{a-c}{2(c-a)(c-b)} + \frac{c-b}{2(c-a)(c-b)} = -\frac{1}{2(c-b)} + \frac{1}{2(c-a)}, \\ \frac{b-c}{2(a-b)(a-c)} &= \frac{b-a}{2(a-b)(a-c)} + \frac{a-c}{2(a-b)(a-c)} = -\frac{1}{2(a-c)} + \frac{1}{2(a-b)}, \\ \frac{c-a}{2(b-c)(b-a)} &= \frac{c-b}{2(b-c)(b-a)} + \frac{b-a}{2(b-c)(b-a)} = -\frac{1}{2(b-a)} + \frac{1}{2(b-c)}. \end{aligned}$$

Zbrojimo jednakosti iz prethodna tri reda, pa dobivamo

$$\begin{aligned} &\frac{a-b}{2(c-a)(c-b)} + \frac{b-c}{2(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{2(b-a)(b-c)} \\ &\quad = -\frac{1}{2(c-b)} + \frac{1}{2(c-a)} - \frac{1}{2(a-c)} + \frac{1}{2(a-b)} - \frac{1}{2(b-a)} + \frac{1}{2(b-c)} \\ &\quad = \frac{2}{2(c-a)} + \frac{2}{2(a-b)} + \frac{2}{2(b-c)} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}. \end{aligned}$$

(20 bodova)

Drugo rješenje. Pomnožimo jednakost sa zajedničkim nazivnikom lijeve strane: $2(a-b)(b-c)(c-a)$: **(2 boda)**

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{2(c-a)(c-b)} + \frac{b-c}{2(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{2(b-a)(b-c)} &= \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}, \\ -(a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2 &= 2(b-c)(c-a) \\ &\quad +2(a-b)(c-a) + 2(a-b)(b-c), \textbf{(8 bodova)} \\ -2a^2 - 2b^2 - 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ca &= 2(bc - ab + ca - c^2 \\ &\quad +ac - a^2 + ab - bc + ab - ac - b^2 + bc). \end{aligned}$$

Lijeva strana jednaka je desnoj. Početnu jednakost množili smo brojem različitim od nule, pa je i ona istinita.**(10 bodova)**

Zadatak 2. **Prvo rješenje:** Označimo nepoznati broj s $\overline{ab}$. Prema uvjetu zadatka je

$$78 \cdot \overline{ab} - 78 \cdot \overline{ba} = 2808 \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Odavde dobivamo

$$\begin{aligned} \overline{ab} - \overline{ba} &= 36, \\ 10a + b - 10b - a &= 36, \\ a - b &= 4. \qquad \textbf{(8 bodova)} \end{aligned}$$

Iz ove jednakosti i iz veze $a = 3b$ dobivamo $a = 6$, $b = 2$. **(5 bodova)** Točan umnožak je 4836. **(2 boda)**

Drugo rješenje: Neka je početni broj u kojemu je znamenka desetica tri puta veća od znamenke jedinica $3x \cdot 10 + x = 31x$, gdje je x znamenka jedinica. Broj koji se dobije zamjenom znamenke jedinica i desetica je $x \cdot 10 + 3x = 13x$. **(5 bodova)**

Iz uvjeta zadatka imamo da je $78 \cdot 31x - 78 \cdot 13x = 2808$, tj. $1404x = 2808$, pa je $x = 2$. **(10 bodova)**

Ispravni broj je 62, a stvarni umnožak je $78 \cdot 62 = 4836$. **(5 bodova)**

Treće rješenje: Dvoznamenkasti broj u kojemu je znamenka desetica tri puta veća od znamenke jedinica je jedan od brojeva 31, 62, 93. Provjeravamo svaku od tri mogućnosti.

$78 \cdot 31 - 78 \cdot 13 = 2418 - 1014 = 1404$,
$78 \cdot 62 - 78 \cdot 26 = 4836 - 2028 = 2808$,
$78 \cdot 93 - 78 \cdot 39 = 7254 - 3042 = 4212$.

Dakle, dvoznamenkasti broj kojim je učenik trebao množiti je 62, a točan umnožak 4836. **(20 bodova)**

Zadatak 3. Iz uvjeta zadatka slijedi da postoje prirodni brojevi a i b takvi da je $5777 = a \cdot n + 20$ i $8924 = b \cdot n + 36$. **(5 bodova)** . Odavde dobivamo $a \cdot n = 5757$ i $b \cdot n = 8888$. Oduzmemo li prethodne dvije jednakosti dobivamo $(b - a)n = 3131 = 101 \cdot 31$. **(5 bodova)**

Uočimo da je n prirodan broj veći od 36 (djelitelj je uvijek veći od ostatka), koji dijeli 3131. Brojevi 101 i 31 su prosti, pa su jedini djelitelji broja 3131 brojevi 1, 31, 101 i 3131. Uz to, n mora dijeliti i brojeve 5757 i 8888, pa vidimo da n može biti samo 101. **(10 bodova)**

Napomena. Učenik može do rješenja doći promatranjem faktorizacija brojeva 5757 i 8888: Drugi dio zadatka se onda boduje ovako:

$$\begin{aligned} a \cdot n &= 5757 = 57 \cdot 101 = 3 \cdot 19 \cdot 101, \\ b \cdot n &= 8888 = 8 \cdot 1111 = 8 \cdot 11 \cdot 101. \end{aligned}$$

(10 bodova) Broj 101 jedini je zajednički faktor ovih brojeva veći od 1, pa je taj broj rješenje zadatka.**(5 bodova)**

Zadatak 4. Predznak izraza $|x+2|$ različit je lijevo i desno od točke $x=-2$.

(a) Neka je $x<-2$:

$$
\begin{aligned}
|-x-2-2x| &= \frac{x+3}{2},\\
|3x+2| &= \frac{x+3}{2},
\end{aligned}
$$

Izraz $3x+2$ negativan je na ovom intervalu. Tako dobivamo

$$
\begin{aligned}
-3x-2 &= \frac{x+3}{2},\\
x &= -1.
\end{aligned}
$$

Ovaj broj ne pripada intervalu, pa jednadžba nema rješenja za $x<-2$. **(10 bodova)**

(b) Neka je $x\geq -2$.

$$
\begin{aligned}
|x+2-2x| &= \frac{x+3}{2},\\
|x-2| &= \frac{x+3}{2}.
\end{aligned}
$$

Zbog promjene predznaka izraza $x-2$, ovaj interval dijelimo na dva dijela:

(b1) $-2\leq x<2$. Tu je $|x-2|=-x+2$ pa imamo

$$
\begin{aligned}
-x+2 &= \frac{x+3}{2},\\
x &= \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Broj pripada intervalu pa predstavlja rješenje jednadžbe. **(5 bodova)**

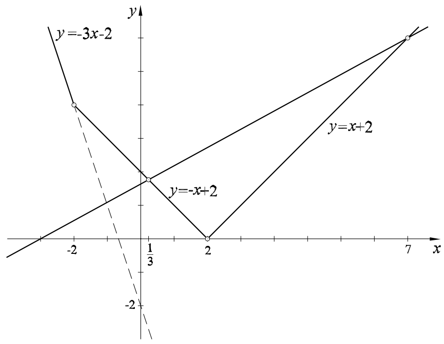
(b2) $2\leq x$. Tu je $|x-2|=x-2$ pa imamo

$$
\begin{aligned}
x-2 &= \frac{x+3}{2},\\
x &= 7.
\end{aligned}
$$

Broj pripada intervalu pa predstavlja rješenje. **(5 bodova)**

Rješenja jednadžbe su $x=\dfrac{1}{3}$ i $x=7$.

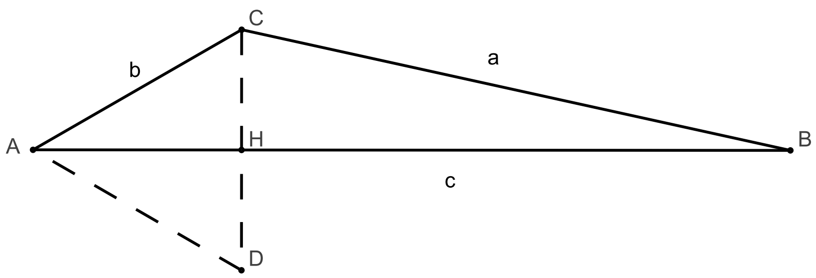
Napomena 1. U rješenju se ne traži da bude nacrtan graf funkcije $||x+2|-2x|$. Onaj tko točno nacrta taj graf (a pogriješi negdje drugdje) može dobiti dodatnih 5 bodova.



Napomena 2. Ukoliko se u slučaju **(a)** ne uoči da je izraz $3x+2$ uvijek negativan i pretpostavi da može biti i $|3x+2| = 3x+2$, dobit će se $x = -\dfrac{1}{5}$ što nije rješenje jednadžbe. Za ovakav postupak ne treba oduzimati bodove.

Napomena 3. Ukoliko se uz ispravna rješenja proglase rješenjima i neki od brojeva -1 ili $-\dfrac{1}{5}$, treba oduzeti 10 bodova (maksimalan broj bodova u tom slučaju je 10).

Zadatak 5. Produljimo visinu $\overline{CH}$ u trokutu ABC preko točke H do točke D tako da je $|CH| = |HD|$.



(5 bodova)

Tada je $\triangle AHC \cong \triangle AHD$ (dvije stranice i kut među njima), pa je $\angle ADC = \angle ACD = 90° - \angle HAC = 90° - \alpha = 60°$. Dakle, trokut ADC je jednakostraničan, pa je $|CH| = \frac{1}{2}|CD| = \frac{b}{2}$.**(5 bodova)**

Sada primjenom Pitagorinog poučka na trokute AHC i CHB dobivamo:

$$c = |AB| = |AH| + |HB| = \sqrt{|AC|^2 - |CH|^2} + \sqrt{|BC|^2 - |CH|^2}$$
$$= \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{187}{4}} = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} + \sqrt{187})$$

(10 bodova)

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija,
29. siječnja 2007.

Rješenja

Zadatak 1. Napišimo jednadžbu u obliku

$$\sqrt{2x+1}-3=\sqrt{x+7}-\sqrt{x+3}.$$

Da bi korijeni bili definirani, moraju izrazi $x+7$ i $x+3$ biti pozitivni. Onda je $\sqrt{x+7}>\sqrt{x+3}$ pa je desna strana pozitivna. Zato mora i lijeva strana biti pozitivna, odakle slijedi $\sqrt{2x+1}>3$, odnosno $x>4$. Kad su obje strane pozitivne, kvadriranjem ćemo dobiti ekvivalentnu jednadžbu:

$$\begin{gathered}
2x+1-6\sqrt{2x+1}+9=x+7+x+3-2\sqrt{(x+7)(x+3)},\\
3\sqrt{2x+1}=\sqrt{(x+7)(x+3)},\\
18x+9=x^2+10x+21,\\
x^2-8x+12=0.
\end{gathered}$$

Rješenja ove jednadžbe su $x=2$ i $x=6$. Zbog uvjeta $x>4$, samo je $x=6$ rješenje početne jednadžbe.**(20 bodova)**

Napomena 1. Učenik ne mora načiniti analizu lijeve i desne strane u prvoj jednakosti. Umjesto toga, može provjeriti zadovoljavaju li dobiveni brojevi početnu jednadžbu. Za $x=2$ ona glasi

$$\sqrt{5}-3=\sqrt{9}-\sqrt{5}$$

pa jednadžba nije zadovoljena, a za $x=6$ dobivamo istinitu jednakost.

$$\sqrt{13}-3=\sqrt{13}-\sqrt{9}$$

Ukoliko se provjera ne učini, već se i $x=2$ proglasi rješenjem, treba oduzeti 10 bodova.

Napomena 2. Ukoliko se jednadžba kvadrira u početnom obliku, izrazi će se ponešto zakomplicirati. Nakon prvog kvadriranja i sređivanja, dobiva se

$$\sqrt{(2x+1)(x+3)}=3\sqrt{x+7}-(x-6).$$

Nakon drugog kvadriranja i sređivanja dobivamo

$$x^2+10x-96=6(x-6)\sqrt{x+7}.$$

Sad je potrebno jednadžbu napisati u obliku:

$$(x-6)(x+16)=6(x-6)\sqrt{x+7}.$$

Odavde slijedi $x = 6$, ili

$$x + 16 = 6\sqrt{x + 7}.$$

Sad treba provjeriti da je $x = 6$ rješenje jednadžbe. Iz ostatka kvadriranjem dobivamo

$$\begin{gathered} x^2 + 32x + 256 = 36(x + 7), \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{gathered}$$

i odavde $x = 2$, što nije rješenje početne jednadžbe.

Zadatak 2. Prvo rješenje: Iz $x^3 - 1 = 0$ slijedi $x = 1$ ili $x^2 + x + 1 = 0$. **(3 boda)** Rješenja jednadžbe iz skupa $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ su ona koja zadovoljavaju ovu drugu jednadžbu. Stoga možemo pisati $z^2 = -z - 1$, **(5 bodova)** pa uvrštavanjem toga u zadani izraz dobivamo:

$$(1 - z + z^2) \cdot (1 + z - z^2) = (1 - z - z - 1) \cdot (-z^2 - z^2) =$$

$$= -2z \cdot (-2z^2) = 4z^3 = 4. \qquad \textbf{(12 bodova)}$$

Drugo rješenje: Iz uvjeta dobivamo:

$$\begin{gathered} z^3 - 1 = 0, \\ (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0. \end{gathered}$$

Prema pretpostavci, z ne može biti jednak jedinici, pa vrijedi $z^2 + z + 1 = 0$. **(3 boda)** Odavde dobivamo

$$z = z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ili} \quad z = z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(2 boda)

Korištenjem $z^3 = 1$ i $z^4 = z$ zapišimo početni izraz kao:

$$\begin{aligned} (1 - z + z^2) \cdot (1 + z - z^2) &= 1 + z - z^2 - z - z^2 + z^3 + z^2 + z^3 - z^4 \\ &= 1 - z^2 + 2z^3 - z^4 = 3 - (z + z^2). \end{aligned}$$

(10 bodova) U prvom slučaju je $z^2 = z_1^2 = z_2$, u drugom $z^2 = z_2^2 = z_1$, a u oba slučaja polazni izraz je jednak $3 - (z + z^2) = 3 - (z_1 + z_2) = 3 - (-1) = 4$. **(5 bodova)**

Napomena. Učenici će pokušati izračunati izraz direktnim računanjem, nakon što odrede z_1 i z_2. Ukoliko račun bude točan, treba dodijeliti sve bodove za zadatak. Ako se račun provjeri samo za jednu od tih nultočaka, treba oduzeti 5 bodova.

Zadatak 3. Ako duljine kateta trokuta označimo sa a i b, a duljinu hipotenuze sa c, onda uvjete zadatka možemo zapisati kao sustav:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1682, \\ a + b + c &= 70, \\ a^2 + b^2 &= c^2. \end{aligned}$$ **(5 bodova)**

Uvrštavanjem treće jednadžbe u prvu dobivamo $2c^2 = 1682$, tj. $c = 29$. **(5 bodova)**

Početni sustav sada postaje:

$$a^2 + b^2 = 841,$$

$$a + b = 70 - 29 = 41.$$

Ukoliko iz druge jednadžbe sada izrazimo $b = 41 - a$ i uvrstimo u prvu, dobivamo

$$a^2 + (41 - a)^2 = 841,$$

tj. nakon sređivanja

$$2a^2 - 82a + 840 = 0$$

$$a^2 - 41a + 420 = 0.$$ **(5 bodova)**

Rješenja ove jednadžbe su

$$a_{1,2} = \frac{41 \pm \sqrt{1681 - 1680}}{2} = \frac{41 \pm 1}{2},$$

pa su rješenja početnog sustava $a_1 = 21$, $b_1 = 20$ i $a_2 = 20$, $b_2 = 21$. Dakle, traženi trokut ima hipotenuzu duljine 29 i katete duljina 20 i 21. **(5 bodova)**

Zadatak 4. Da bi funkcija $f(x) = a^2x^2 + 2(a+3)x + 1$ mogla imati dvije nultočke, mora biti kvadratna funkcija, tj. mora vrijediti $a \neq 0$. **(3 boda)** Da bi te dvije nultočke bile realne i različite, diskriminanta mora biti strogo veća od 0, tj.

$$(2(a+3))^2 - 4a^2 > 0$$

$$4a^2 + 4 \cdot 6a + 4 \cdot 9 - 4a^2 > 0$$

$$6a + 9 > 0$$

$$a > \frac{-3}{2}$$

Stoga za parametar a mora vrijediti $a \in \langle -3/2, 0\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$. **(5 bodova)**

Najmanji cjelobrojni a koji zadovoljava taj uvjet je $a = -1$, za koji kvadratna funkcija postaje $f(x) = x^2+4x+1$.**(2 boda)** Njezine nultočke, po Vièteovim formulama, zadovoljavaju: $x_1 + x_2 = -4$, $x_1 \cdot x_2 = 1$. Računamo:

$$x_1^{-3} - x_1^{-2} + x_2^{-3} - x_2^{-2} = \frac{x_1^3 + x_2^3 - x_1x_2^3 - x_1^3x_2}{(x_1x_2)^3} =$$

$$= \frac{(x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2^2 - 3x_1^2x_2 - x_1x_2(x_1^2 + x_2^2)}{(x_1x_2)^3} =$$

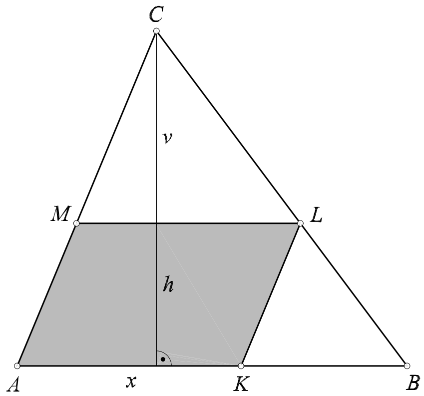
$$= \frac{(x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2) - x_1x_2(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^3} =$$

$$= \frac{(-4)^3 - 3 \cdot 1 \cdot (-4) - 1 \cdot ((-4)^2 - 2 \cdot 1)}{1^3} =$$

$$= -64 + 12 - 14 = -66. \qquad \textbf{(10 bodova)}$$

Napomena. Ako učenik izračuna nultočke kvadratne funkcije i zatim odredi vrijednost izraza neposrednim računom, treba priznati postupak. Ukoliko pri računanju pogriješi u postupku, treba mu oduzeti najmanje 5 bodova.

Zadatak 5. Prvo rješenje: Nacrtajmo sliku: **(2 boda)**



Iz omjera

$$\frac{v-h}{v} = \frac{x}{c}$$

slijedi

$$h = v\left(1 - \frac{x}{c}\right). \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Visinu trokuta računamo preko Heronove formule:

$$\frac{c \cdot v}{2} = P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Odavde:

$$7v = \sqrt{21 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8} = 84$$

pa je $v = 12$.**(5 bodova)**

Tako smo dobili površinu paralelograma $AKLM$:

$$p(x) = 12x\left(1 - \frac{x}{14}\right). \qquad \textbf{(3 boda)}$$

U ovisnosti o x, ovo je kvadratna funkcija. Njezin vodeći koeficijent je negativan, a nultočke su $x = 0$ i $x = 14$. Zato se maksimum postiže za $x = 7$. **(5 bodova)**

Taj je maksimum jednak 42 (polovina površine trokuta).

Drugo rješenje: Odgovarajuća slika: **(2 boda)**

Površine sličnih trokuta ABC, MLC, KBL odnose se kao kvadrati duljina njihovih odgovarajućih stranica $\overline{AB}$, $\overline{ML}$, $\overline{KB}$. **(3 boda)**

Dakle

$$P(ABC) : P(MLC) : P(KBL) = c^2 : x^2 : (c-x)^2$$

Označimo površinu trokuta s P. Dobili smo

$$P(MLC) = \frac{x^2}{c^2}P, \qquad P(KBL) = \frac{(c-x)^2}{c^2}P. \qquad \textbf{(3 boda)}$$

Zato je površina paralelograma

$$P(AKLM) = P(ABC) - P(MLC) - P(KBL) \qquad \textbf{(2 boda)}$$

Odavde:

$$\begin{aligned} P(AKLM) &= P\left(1 - \frac{x^2}{c^2} - \frac{(x-c)^2}{c^2}\right) \\ &= \frac{c^2 - x^2 - (c-x)^2}{c^2} \cdot P \\ &= \frac{2x(c-x)}{c^2} \cdot P \qquad \textbf{(5 bodova)} \end{aligned}$$

Maksimum kvadratne $2x(c-x)$ funkcije postiže se za $x = \dfrac{c}{2} = 7$. Površina paralelograma je $\frac{1}{2}P$. **(5 bodova)** .

Pretpostavlja se da će učenik u nekom trenutku izračunati površinu trokuta P, iako to nije bitno za rješenje zadatka, niti za bodovanje.

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija,
29. siječnja 2007.

Rješenja

Zadatak 1. Da bi jednadžba imala smisla treba biti $x > 0$. Logaritmiranjem jednadžbe po bazi 5 dobivamo:

$$\log_5 x \cdot \log_5 15 + \log_5 45x \cdot \log_5 x = 0. \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Dalje redom imamo:

$$\begin{aligned} \log_5 x(\log_5 15 + \log_5 45x) &= 0 \\ \log_5 x(\log_5 15 + \log_5 45 + \log_5 x) &= 0 \\ \log_5 x(\log_5 675 + \log_5 x) &= 0, \qquad \textbf{(5 bodova)} \end{aligned}$$

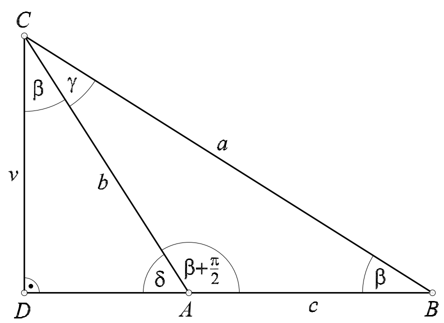
Odavde dobivamo dva rješenja:

$$\begin{aligned} \log_5 x = 0 &\implies x_1 = 1 \\ \log_5 x + \log_5 675 = 0 &\implies x_2 = \frac{1}{675}. \qquad \textbf{(10 bodova)} \end{aligned}$$

Zadatak 2. Prvo rješenje: Ako vrijedi $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$, tj. ako je trokut pravokutan, onda je, iz jednakosti površina, $ab = cv$, pa dobivamo

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2 + a^2}{a^2 b^2} = \frac{c^2}{c^2 v^2} = \frac{1}{v^2}. \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Pretpostavimo sad da trokut nije pravokutan. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\alpha > \beta$, t.j. da vrijedi $\alpha = \beta + \dfrac{\pi}{2}$. Nacrtajmo sliku:



U pravokutnom trokutu ACD za kut δ vrijedi $\delta = \pi - \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ pa je kut $\angle ACD = \beta$.**(5 bodova)**

Iz pravokutnih trokuta ACD i BCD sada čitamo:

$$\cos\beta = \frac{v}{b}, \qquad \sin\beta = \frac{v}{a}$$

pa je

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{\sin^2\beta}{v^2} + \frac{\cos^2\beta}{v^2} = \frac{\sin^2\beta + \cos^2\beta}{v^2} = \frac{1}{v^2}. \qquad \textbf{(10 bodova)}$$

Drugo rješenje. Vrijedi

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{a^2\sin^2\gamma + b^2\sin^2\gamma}{a^2 b^2 \sin^2\gamma}.$$

Sad koristimo poučak o sinusima i formule za površinu trokuta:

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} &\implies a\sin\gamma = c\sin\alpha, \\ \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} &\implies b\sin\gamma = c\sin\beta, \\ a^2 b^2 \sin^2\gamma = 4P = c^2 v^2. \end{aligned}$$

Dobivamo:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{c^2\sin^2\alpha + c^2\sin^2\beta}{c^2 v^2} = \frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}{v^2}.$$

(15 bodova) Ako je trokut pravokutan, onda je $\sin\beta = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$. Ako u trokutu vrijedi $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$, onda je $\sin\beta = \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos\alpha$. Ako vrijedi pak $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$, onda je $\sin\beta = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$. U svim je tim situacijama

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

i tvrdnja je dokazana.**(5 bodova)**

Zadatak 3. Za svaki α vrijedi

$$\log \operatorname{tg}\alpha + \log \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \log\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin(90 - \alpha)}{\cos(90 - \alpha)}\right) = \log 1 = 0.$$

Također, $\log \operatorname{tg} 45^\circ = \log 1 = 0$. Zato je

$$\begin{gathered} \log \operatorname{tg} 1^\circ + \log \operatorname{tg} 89^\circ = 0, \\ \log \operatorname{tg} 2^\circ + \log \operatorname{tg} 88^\circ = 0, \\ \vdots \\ \log \operatorname{tg} 44^\circ + \log \operatorname{tg} 46^\circ = 0, \\ \log \operatorname{tg} 45^\circ = 0 \end{gathered}$$

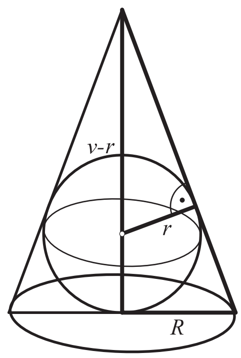
pa je lijeva strana jednadžbe jednaka nuli. **(15 bodova)**

$$
\begin{aligned}
0 &= \cos 2x \\
2x &= \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \\
x &\in \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\}
\end{aligned}
$$

(5 bodova)

Napomena. Ukoliko učenik previdi da srednji član u sumi nema svog para, treba oduzeti 5 bodova.

Zadatak 4. Nacrtajmo sliku:**(3 boda)**



Iz sličnosti trokuta sa slike izlazi:

$$
\begin{aligned}
r : (v - r) &= R : \sqrt{v^2 + R^2} \\
\frac{r^2}{(v-r)^2} &= \frac{R^2}{R^2 + v^2} \qquad \textbf{(5 bodova)}
\end{aligned}
$$

Odavde trebamo izračunati visinu v:

$$
\begin{aligned}
r^2(R^2 + v^2) &= R^2(v^2 - 2vr + r^2) \\
R^2r^2 + v^2r^2 &= R^2v^2 - 2vrR^2 + R^2r^2 \\
v^2(r^2 - R^2) + 2vrR^2 &= 0 \\
v(v(r^2 - R^2) + 2rR^2) &= 0 \\
v \neq 0 \implies v &= \frac{2rR^2}{R^2 - r^2} \qquad \textbf{(7 bodova)}
\end{aligned}
$$

Sad dobivamo

$$
V = \frac{r^2\pi v}{3} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{rR^4}{R^2 - r^2}. \qquad \textbf{(5 bodova)}
$$

Zadatak 5. m je neparan pa je m^k također neparan. Stoga je zbroj $1+m+m^2+\cdots+m^{2007}$ paran jer ima parno mnogo neparnih pribrojnika. Međutim 3^n je neparan. Jednadžba nema rješenja. Znači da ne postoji neparan prirodan broj m i prirodan broj n koji bi zadovoljavali danu jednakost. **(20 bodova)**

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija, 29. siječnja 2007.

Rješenja

Zadatak 1. Traženi pravac ima jednadžbu

$$y - 24 = k(x - 7)$$

za neki realni broj k. **(3 boda)**

Rješavanjem dvaju sustava dobivamo da su točke presjeka ovog pravca sa zadanim pravcima $T_1(\frac{7k-18}{k-0.75}, \frac{11.25k-18}{k-0.75})$ i $T_1(\frac{7k-21}{k-0.75}, \frac{8.25k-18}{k-0.75})$. **(7 bodova)**

Iz uvjeta da udaljenost točaka T_1 i T_2 iznosi 4, dobivamo jednadžbu:

$$\left(\frac{3}{k-0.75}\right)^2 + \left(\frac{3k}{k-0.75}\right)^2 = 16,$$

koja se svodi na kvadratnu jednadžbu

$$7k^2 - 24k = 0,$$

čija su rješenja $k_1 = 0$ i $k_2 = \frac{24}{7}$. Dakle, traženi pravci su $y = 24$ i $y = \frac{24}{7}x$. **(10 bodova)**

Zadatak 2.

$$(1+i\sqrt{3})^n = 2^n \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2^n \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n = 2^n \cdot \left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right).$$

(10 bodova) Prirodni broj n može se napisati u obliku $n = 6k + r$, pri čemu je k cijeli broj i r ostatak dijeljenja. U ovisnosti o ostatku, imamo:

$$\mathrm{Re}(1+i\sqrt{3})^n = 2^n \cdot \cos\frac{n\pi}{3} = \begin{cases} 2^n, & n = 6k \\ 2^{n-1}, & n = 6k+1 \\ -2^{n-1}, & n = 6k+2 \\ -2^n, & n = 6k+3 \\ -2^{n-1}, & n = 6k+4 \\ 2^{n-1}, & n = 6k+5, \end{cases}$$

Time je tvrdnja dokazana.**(10 bodova)**

Zadatak 3. Iz uvjeta $\binom{m}{3} = 5 \cdot \binom{m}{1}$ dobivamo:

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{6} = 5m. \qquad \textbf{(3 boda)}$$

Kako je m prirodni broj veći ili jednak 3, dijeljenjem s m dobivamo jednadžbu:

$$m^2 - 3m - 28 = 0,$$

čija su rješenja $m_1 = -4$ (koje otpada jer nije prirodan broj) i $m_2 = 7$. **(7 bodova)** Tada je:

$$\binom{7}{3}(\sqrt{2^{x-1}})^4 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2^x}}\right)^3 = 20 \cdot 7,$$

$$35 \cdot 2^{2x-2} \cdot 2^{-x} = 140,$$

$$2^{x-2} = 4 = 2^2,$$

$$x = 4. \qquad \textbf{(10 bodova)}$$

Napomena. Ukoliko se ne odbaci rješenje kvadratne jednadžbe $m_1 = -4$, dobit će se odgovarajući $x = -\frac{21}{5}$. Ako učenik ne odbaci to rješenje, treba oduzeti 7 bodova.

Zadatak 4. Prvo rješenje: Prema nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine vrijede sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned} a+1 &\geq 2\sqrt{a}, \\ 2a+1 &\geq 2\sqrt{2a}, \\ &\vdots \\ na+1 &\geq 2\sqrt{na}. \qquad \textbf{(10 bodova)} \end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti i sređivanjem dobivamo redom:

$$\begin{aligned} (a+1)+(2a+1)+\cdots+(na+1) &\geq 2\sqrt{a}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}), \\ a(1+2+\cdots+n)+n &\geq 2\sqrt{a}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}), \\ a \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n &\geq 2\sqrt{a}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}), \\ n(n+1)a+2n &\geq 4\sqrt{a}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}), \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.**(10 bodova)**

Drugo rješenje: Dokazujemo indukcijom. Za $n = 1$ tvrdnja glasi

$$2a + 2 \geq 4\sqrt{a} \iff 2(\sqrt{a} - 1)^2 \geq 0. \qquad \textbf{(5 bodova)}$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n. Tada za $n+1$ trebamo dokazati

$$(n+1)(n+2)a+2(n+1) \geq 4\sqrt{a}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}). \qquad \textbf{(3 boda)}$$

Koristimo pretpostavku indukcije:

$$n(n+1)a + 2n \geq 4\sqrt{a}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}).$$

Zato je

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)a + 2(n+1) &= n(n+1)a + 2n + 2a(n+1) + 2 \\ &\geq \left[4\sqrt{a}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n})\right] + 4\sqrt{a} \cdot \sqrt{n+1}\end{aligned}$$

Tu smo iskoristili nejednakost

$$2a(n+1) + 2 \geq 4\sqrt{a(n+1)}.$$

Time je tvrdnja dokazana.**(12 bodova)**

Zadatak 5. Drugo rješenje: Iz posljednje dvije jednadžbe, dobivamo $b(1-c^2) = c+1$, tj. $c+1 = 0$ ili $b = \frac{1}{1-c}$. Slijedi da je $c \in \{-1, 0, 2\}$. Uvrštavanjem $c = 0$ i $c = 2$, ne dobivamo cjelobrojna rješenja za a i b, pa je $c = -1$. **(10 bodova)** To znači da je $a + b = 1$, a $ab = -6$. Stoga su a i b rješenja kvadratne jednadžbe $t^2 - t - 6 = 0$, a to su -2 i 3. To znači da su jedina rješenja sustava $(-2, 3, -1)$ i $(3, -2, -1)$. **(10 bodova)**

Prvo rješenje: Oduzimanjem posljednjih dviju jednadžbi dobivamo

$$c(b-a) = a - b,$$
$$(b-a)(c+1) = 0.$$

Odavde je $c = -1$ ili $a = b$. **(5 bodova)**

(a) Ako je $c = -1$, tada sustav prelazi u:

$$ab = -6,$$
$$a = 1 - b.$$

Eliminacijom nepoznanice a slijedi

$$b^2 - b + 6 = 0,$$

a odavde $b = 3$, $a = -2$ ili $b = -2$, $a = 3$. **(7 bodova)**

(b) Ako je $a = b$, dobivamo sustav

$$a^2 + 5 = c,$$
$$ac + 1 = a.$$

Ovaj se sustav može analizirati na više načina. Na primjer:

(b1) Eliminacijom nepoznanice c:

$$a^3 + 4a + 1 = 0.$$

Ova jednadžba nema cjelobrojnih rješenja. (Sva takva rješenja moraju biti djelitelji slobodnog člana 1).

(b2) Iz druge jednadžbe je

$$c = 1 - \frac{1}{a}$$

pa mora biti $a = 1$ ili $a = -1$, a niti jedan slučaj ne zadovoljava prvu jednadžbu.

Svako ispravno rješenje treba bodovati s **8 bodova**.