

# RJEŠENJA ZA 4. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK OCJENITI I BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1.

$$3256 - 256 \cdot 3 - (446 + 119 : 7) - (229 \cdot 0 + 21) \cdot 3 + 495 : 11 \\ = 3256 - 768 - (446 + 17) - 63 + 45$$

5 BODOVA

$$= 3256 - 768 - 463 - 63 + 45 \\ = 2488 - 463 - 63 + 45 \\ = 2025 - 63 + 45 \\ = 1962 + 45 = 2007$$

5 BODOVA

..... UKUPNO

10 BODOVA

2.

Katarina:

1 mjesec	1 godina = 12 mjeseci	18 - 5 = 13 godina
5 viceva	5 · 12 = 60 viceva	13 · 60 = 780 viceva

2 BODA

3 BODA

Luka:

1 godina = 60 viceva	8 godina
60 : 4 = 15 igrica	15 · 8 = 120 igrica

2 BODA

3 BODA

3.

$$10 \text{ kn} = 2 \cdot 5 \text{ kn} \\ = 1 \cdot 5 \text{ kn} + 5 \cdot 1 \text{ kn} \\ = 1 \cdot 5 \text{ kn} + 2 \cdot 2 \text{ kn} + 1 \cdot 1 \text{ kn} \\ = 1 \cdot 5 \text{ kn} + 1 \cdot 2 \text{ kn} + 3 \cdot 1 \text{ kn} \\ = 5 \cdot 2 \text{ kn} \\ = 4 \cdot 2 \text{ kn} + 2 \cdot 1 \text{ kn} \\ = 3 \cdot 2 \text{ kn} + 4 \cdot 1 \text{ kn} \\ = 2 \cdot 2 \text{ kn} + 6 \cdot 1 \text{ kn} \\ = 1 \cdot 2 \text{ kn} + 8 \cdot 1 \text{ kn} \\ = 10 \cdot 1 \text{ kn}$$

..... Svaki prikaz - 1 BOD

4. Zbog uvjeta zadatka vrijedi:

$$\overline{abba} - \overline{cdc} = 2007$$

$$\text{ili} \quad \begin{array}{r} abba \\ - cdc \\ \hline 2007 \end{array} \quad \text{ili} \quad \begin{array}{r} 2007 \\ + cdc \\ \hline abba \end{array}$$

**2 BODA**

Znamenka  $a = 2$ , znamenka  $c = 5$ .

$$\begin{array}{r} 2007 \\ + 5d5 \\ \hline 2bb2 \end{array}$$

odakle je  $d + 1 = b$  i  $b = 5$ , pa je  $d = 4$ .

Dešifrirano:

$$2552 - 545 = 2007.$$

Dodatno bodovanje: za svaku od znamenaka  $a, b, c, d$  po **2 BODA**.

5. 10 dužina, 10 trokuta. Ima jednak broj dužina i trokuta.

**2 BODA**

Dužine su:  $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{CD}, \overline{CE}, \overline{DE}$ .

**4 BODA**

Trokuti su:  $ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE$ ,

**4 BODA**

# RJEŠENJA ZA 5. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK OCIJENITI I BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1.

$$456 \cdot 79 - 19 \cdot 456 + 1250 - 250 \cdot (36 + 164 : 4) - 22\,059 : 3$$

$$= 456 \cdot (79 - 19) + 1250 - 250 \cdot (36 + 41) - 7353$$

4 BODA

$$= 27\,360 + 1250 - 250 \cdot 77 - 7353$$

$$= 27\,360 + 1250 - 19\,250 - 7353$$

3 BODA

$$= 28\,610 - 19\,250 - 7353$$

$$= 9360 - 7353$$

$$= 2007$$

3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka su  $a$  i  $b$  traženi brojevi.

Tada je  $a + b = 531$  i  $a = 59m$ ,  $b = 59n$ ,  $m, n \in \mathbf{N}$ .

2 BODA

Zato je  $a + b = 59n + 59m = 59(n + m)$ , ili  $59(m + n) = 531$ ,  $m + n = 9$ .

3 BODA

$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$n = 8$	$n = 7$	$n = 6$	$n = 5$

3 BODA

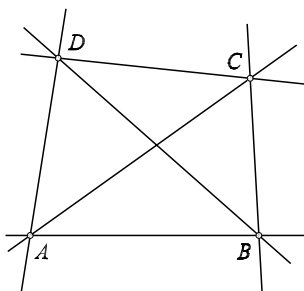
Traženi parovi brojeva su:

$a = 59$	$a = 118$	$a = 177$	$a = 236$
$b = 472$	$b = 413$	$b = 354$	$b = 295$

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Na slici je 12 kutova.



Traženi kutovi su:  $\sphericalangle ABC$ ,  $\sphericalangle ABD$ ,  $\sphericalangle ACD$ ,  $\sphericalangle BCD$ ,  $\sphericalangle BAC$ ,  $\sphericalangle BAD$ ,  $\sphericalangle CAD$ ,  $\sphericalangle CBD$ ,  $\sphericalangle ACB$ ,  $\sphericalangle ADB$ ,  $\sphericalangle ADC$ ,  $\sphericalangle BDC$ .

Bodovanje (prema pronađenim kutovima):

3 kuta – 1 BOD, 4 kuta – 2 BOD, 5 kutova – 3 BOD, ..., 12 kutova – 10 BODOVA.

4. Kako je  $\overline{aa} = a \cdot 10 + a \cdot 1 = a \cdot 11$  i

2 BODA

$$\begin{aligned} \overline{aaaaaa} &= a \cdot 100\,000 + a \cdot 10\,000 + a \cdot 100 + a \cdot 10 + a \cdot 1 \\ &= a \cdot 111\,111 \end{aligned}$$

2 BODA

$$\begin{aligned} \text{Iz } \overline{aa} \cdot \overline{ababa} &= \overline{aaaaaa} \quad \text{slijedi} \\ a \cdot 11 \cdot \overline{ababa} &= a \cdot 111\,111 \\ 11 \cdot \overline{ababa} &= 111\,111 \\ 11 \cdot \overline{ababa} &= 11 \cdot 10\,101 \\ \overline{ababa} &= 10\,101 \end{aligned}$$

Dakle,  $a = 1$ ,  $b = 0$ .

Na kraju,  $\overline{ab} \cdot \overline{ababa} = 10 \cdot 10\,101 = 101\,010$ .

3 BODA

1 BOD

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

5.

$$\begin{array}{r|l} 506 & 2 \\ 253 & 11 \\ 23 & \end{array} \quad \underline{506 = 22 \cdot 23}$$

3 BODA

$$a = 23 \text{ m}$$

$$\underline{b = 22 \text{ m}}$$

2 BODA

$$\underline{a + b = 45}$$

2 BODA

$$P_{kv} = 45 \cdot 45$$

$$P_{kv} = 2025 \text{ m}^2$$

3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

## RJEŠENJA ZA 6. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK OCIJENITI I BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1.

$$\begin{aligned} & \frac{0.8 : \left(\frac{4}{5} \cdot 1.25\right)}{0.64 - \frac{1}{25}} + \frac{\left(1.08 - \frac{2}{25}\right) : \frac{4}{7}}{\left(6\frac{5}{9} - 3\frac{1}{4}\right) \cdot 2\frac{2}{17}} + (1.2 \cdot 0.5) : \frac{4}{5} \\ &= \frac{0.8 : 1}{0.6} + \frac{1 : \frac{4}{7}}{3\frac{11}{36} \cdot 2\frac{2}{17}} + 0.6 : \frac{4}{5} \\ &= \frac{4}{3} + \frac{\frac{7}{4}}{\frac{7}{4}} + \frac{3}{4} = \frac{4}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\ &= 2\frac{1}{3} \end{aligned}$$

4 BODA

4 BODA

2 BODA

2. Označimo s  $a$  i  $b$  brojeve kovanica od 2 kune i 5 kuna. Vrijednost  $a$  kovanica od dvije kune je  $2a$  kuna, a vrijednost  $b$  kovanica od 5 kuna je  $5b$  kuna. Za 100 kuna tada vrijedi jednakost

$$2a + 5b = 100.$$

2 BODA

U jednakosti su jedan pribrojnik i zbroj djeljivi s 5, pa mora i drugi pribrojnik  $2a$ , a to znači broj  $a$ , biti djeljiv s 5.

3 BODA

Za broj  $a$  povoljne su sljedeće mogućnosti 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50.

2 BODA

Tada za  $b$  dobivamo 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0.

2 BODA

Iznos od 100 kuna može se isplatiti kovanicama od 2 kune i 5 kuna na 11 različitih načina.

1 BOD

3. Kako je svaki treći pozitivan cijeli broj djeljiv s 3, pri čemu je broj 3 prvi takav, i  $999 = 333 \cdot 3$ , postoje 333 tražena pozitivna cijela broja.

Lako zaključujemo da postoje i 333 tražena negativna cijela broja. S obzirom da je i broj 0 djeljiv s 3, ukupan broj traženih cijelih brojeva djeljivih s 3 je  $333 + 333 + 1 = 667$ .

3 BODA

Da bismo odredili koliko ima traženih cijelih brojeva koji nisu djeljivi s 4, prvo prebrojimo koliko ima cijelih brojeva  $z$ ,  $-444 < z < 444$ , koji jesu djeljivi s 4.

2 BODA

Kako je svaki četvrti pozitivan cijeli broj djeljiv s 4, pri čemu je broj 4 prvi takav, i  $443 = 110 \cdot 4 + 3$ , postoji 110 pozitivnih cijelih brojeva  $z$  djeljivih s 4.

Lako zaključujemo da postoji i 110 negativnih cijelih brojeva  $z$  djeljivih s 4.

S obzirom da je i broj 0 djeljiv s 4, ukupan broj cijelih brojeva  $z$  djeljivih s 4 je  $110 + 110 + 1 = 221$ .

**3 BODA**

Tada je ukupan broj traženih cijelih brojeva koji nisu djeljivi s 4 jednak  $887 - 221 = 666$ .

**1 BOD**

Dakle, cijelih brojeva  $x$ ,  $-1000 < x < 1000$ , koji su djeljivi s 3 ima više.

**1 BOD**

4. Broj izvađenih kuglica mora biti djeljiv sa 7 ( $6 + 1$ ).

Ako iz kutije izvadimo šest puta više bijelih nego crvenih, to znači da smo izvadili 7, 14, 21, 28, 35, 42 ili 49 kuglica.

**3 BODA**

Preostalo je 51, 44, 37, 30, 23, 16 ili 11 kuglica.

Broj preostalih kuglica mora biti djeljiv sa 6 ( $5 + 1$ ).

**3 BODA**

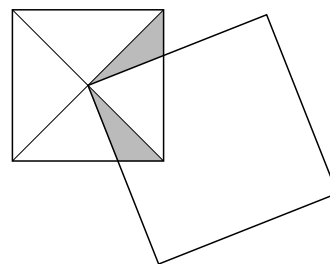
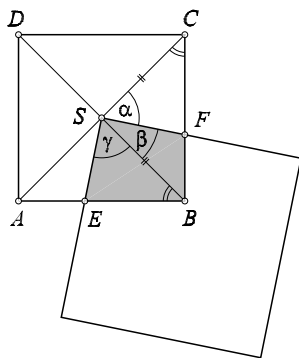
To znači da smo izvadili 28 kuglica i to 24 bijele i 4 crvene, a preostalo je 30 kuglica i to 25 crvenih i 5 bijelih kuglica.

**3 BODA**

Dakle, bilo je  $24 + 5 = 29$  bijelih i  $4 + 25 = 29$  crvenih kuglica.

**1 BOD**

5.



**1 BOD**

1)

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 90^\circ & \text{dijagonale se sijeku pod pravim kutom} \\ \beta + \gamma = 90^\circ & \text{kut većeg kvadrata} \end{cases} \implies \alpha = \gamma$$

**3 BODA**

2)  $|SC| = |SB|$  (dijagonale se raspolavljaju)

3)  $|\sphericalangle SBA| = |\sphericalangle SCB| = 45^\circ$ ;  $\alpha = \gamma \implies \triangle EBS \cong \triangle FCS$  po poučku

KSK  $\implies P_{\triangle BCS} = P_{\triangle EBS}$

**4 BODA**

4)  $\triangle BCS$  je četvrtina kvadrata  $ABCD \implies EBFS$  je četvrtina manjeg kvadrata.

**2 BODA**

## RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK OCIJENITI I BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Iz  $2a = 3b \implies b = \frac{2}{3}a$ . Iz  $2a = 4c \implies c = \frac{1}{2}a$ . Iz  $2a = 5d \implies d = \frac{2}{5}a$ . 6 BODOVA

$$\begin{aligned} \text{Iz } 2a &= x(a + b + c + d) \implies \\ 2a &= x \left( a + \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}a + \frac{2}{5}a \right) \end{aligned}$$

2 BODA

$$\begin{aligned} 2a &= x \cdot \frac{77}{30}a \\ x &= 2a : \frac{77}{30}a \\ x &= \frac{2a \cdot 30}{77a} \\ x &= \frac{60}{77} \end{aligned}$$

2 BODA

2. Neka je  $x$  duljina stranice najmanjeg kvadrata iz kvadratne mreže. Tada vrijedi

$$P_{\triangle MNL} = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{1}{2}x \cdot x \quad \text{i}$$

2 BODA

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABC} &= 3x \cdot 3x - \left( \frac{x \cdot 3x}{2} + \frac{x \cdot 2x}{2} + \frac{3x \cdot 2x}{2} \right) \\ &= 9x \cdot x - \frac{11}{2} \cdot x \cdot x \\ &= \frac{7}{2} \cdot x \cdot x \end{aligned}$$

6 BODOVA

Dakle,  $P_{\triangle ABC} : P_{\triangle MNL} = \left( \frac{7}{2} \cdot x \cdot x \right) : \left( \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \right) = 7 : 1$ . 2 BODA

3. Cijena u prvoj trgovini  $x$

$$x \xrightarrow{+20\%x} = 1.2x \implies 1.2x - 20\% \cdot 1.2x = 0.96x$$

3 BODA

Cijena u drugoj trgovini  $y$

$$y \xrightarrow{-20\%y} = 0.8y \implies 0.8y + 20\% \cdot 0.8y = 0.96y$$

3 BODA

$$|0.96x - 0.96y| = 120$$

2 BODA

$$0.96|x - y| = 120$$

$$|x - y| = 120 : 0.96$$

$$|x - y| = 125$$

Razlika prije prve promjene je bila 125 kn.

2 BODA

4. Neka su  $a$ ,  $b$ ,  $c$  traženi prosti brojevi. Tada vrijedi jednakost

$$a \cdot b \cdot c = 5(a + b + c).$$

1 BOD

Kako je desna strana jednakosti djeljiva s 5, zaključujemo da je i lijeva strana djeljiva s 5.

Zbog uvjeta zadatka nužno slijedi da je jedan od tri broja djeljiv s 5. Neka je  $c = 5$ .

1 BOD

Tada je

$$a \cdot b \cdot 5 = 5(a + b + 5)$$

$$a \cdot b = a + b + 5$$

$$ab - a = b + 5$$

$$a(b - 1) = b + 5$$

$$a = \frac{b + 5}{b - 1}$$

2 BODA

ili dalje redom

$$a = \frac{b - 1 + 6}{b - 1} = \frac{b - 1}{b - 1} + \frac{6}{b - 1} = 1 + \frac{6}{b - 1}.$$

2 BODA

Broj  $a$  će biti prirodan broj samo ako je razlomak  $\frac{6}{b-1}$  prirodan broj.

$$b - 1 = 1$$

$$b = 2$$

$$a = 7$$

$$b - 1 = 2$$

$$b = 3$$

$a$  nema rješenja

$$b - 1 = 3$$

nema rješenja

$$b - 1 = 6$$

$$b = 7$$

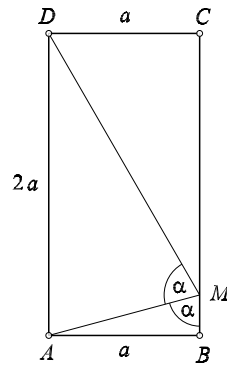
$$a = 2$$

$$a = 2, \quad b = 7, \quad c = 5$$

4 BODA



5.



Neka je  $\alpha = |\sphericalangle AMB| = |\sphericalangle AMD|$  i  $a = |AB|$ .

**1 BOD**

Tada je  $|\sphericalangle DAM| = \alpha$  (kutovi uz presječnicu).

**2 BODA**

Kako je  $|\sphericalangle DAM| = |\sphericalangle AMD|$ , onda je  $\triangle AMD$  jednakokrčan.

**2 BODA**

To znači da je  $|DM| = |DA|$  odnosno  $|DM| = 2a$ .

**1 BOD**

S obzirom da je  $\triangle MCD$  pravokutan i  $|DM| = 2|DC|$ , onda je  $\triangle MCD$  polovina jednakostraničnog trokuta odnosno  $|\sphericalangle CDM| = 60^\circ$ ,  $|\sphericalangle DMC| = 30^\circ$ .

**3 BODA**

Dakle,  $2\alpha + 30^\circ = 180^\circ$  odnosno  $\alpha = 75^\circ$ .

**1 BOD**

# RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK OCIJENITI I BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1.

$$\frac{0.8}{0.4}x - \frac{5^4 \cdot 5}{5^4}y - \frac{2 \cdot 106}{53} = 0$$
$$\underline{3x - 9y + 3 - 2x + 4y = 6}$$

3 BODA

$$2x - 5y = 4$$
$$\underline{x - 5y = 3 / \cdot (-1)}$$

3 BODA

$$x = 1 \quad \mathbf{2 \text{ BODA}}$$
$$5y = x - 3$$
$$y = \frac{1 - 3}{5}$$
$$y = -\frac{2}{5} \quad \mathbf{2 \text{ BODA}}$$

2.

$$9x^2 + 4y^2 - 12xy - 16a^2 = 12$$
$$(3x - 2y)^2 - 16a^2 = 12$$

2 BODA

$$(3x - 2y - 4a)(3x - 2y + 4a) = 12$$

2 BODA

$$(3x - 2y - 4a) \cdot 4 = 12$$

2 BODA

$$3x - 2y - 4a = 3$$

$$\underline{3x - 2y + 4a = 4}$$

2 BODA

$$2(3x - 2y) = 7$$

$$\underline{3x - 2y = \frac{7}{2}}$$

2 BODA

3. Neka je  $x$  km na sat brzina bicikliste uzbrdo. Tada je  $x + 5$  km na sat brzina bicikliste na ravnom dijelu ceste.

1 BOD

To znači da je biciklist vozio uzbrdo  $\frac{20}{x}$  sati, a na ravnom dijelu ceste  $\frac{60}{x+5}$  sati. Zato vrijedi jednačba

$$\frac{20}{x} + \frac{60}{x+5} = 6.$$

2 BODA

Ili dalje redom,

$$20(x+5) + 60x = 6x(x+5),$$

$$20x + 100 + 60x = 6x^2 + 30x,$$

$$6x^2 - 50x - 100 = 0$$

$$3x^2 - 25x - 50 = 0$$

2 BODA

$$3x^2 - 30x + 5x - 50 = 0,$$

$$3x(x-10) + 5(x-10) = 0$$

$$(x-10)(3x+5) = 0$$

2 BODA

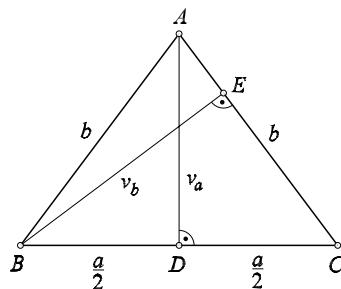
Pozitivno rješenje jednačbe je  $x - 10 = 0$ , tj.  $x = 10$ .

2 BODA

Prema tome, biciklist je uzbrdo vozio brzinom od 10 km na sat, a na ravnom dijelu ceste brzinom od 15 km na sat.

1 BOD

4.



1 BOD

$$P_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_a}{2}$$

$$5a = 6b$$

$$a = \frac{6}{5}b \quad \text{ili} \quad b = \frac{5}{6}a$$

3 BODA

Kako je  $\triangle ADC$  pravokutan, prema Pitagorinu poučku slijedi

$$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 10^2$$

$$\left(\frac{5}{6}a\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 10^2$$

$$\frac{16}{36}a^2 = 100$$

$$a = 15 \text{ cm}$$

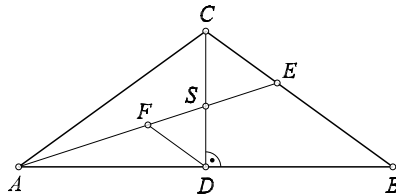
**3 BODA**

Zato je

$$P_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{15 \cdot 10}{2} = 75 \text{ cm}^2$$

**3 BODA**

5. Neka je točka  $S$  presjek simetrale  $AE$  kuta  $\sphericalangle BAC$  i visine  $\overline{CD}$ .



**1 BOD**

1) Očito je  $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD = 54^\circ$ , iz čega slijedi da je  $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA = 36^\circ$ , pa je  $\sphericalangle CAE = 18^\circ$ . U trokutu  $CAE$  je  $\sphericalangle AEC = 180^\circ - (108^\circ + 18^\circ)$ , tj.  $\sphericalangle AEC = 54^\circ$ . To znači da je trokut  $SCE$  jednakokravan, pa je  $|SE| = |SC|$ .

**3 BODA**

2) Neka je točka  $F$  središte dužine  $\overline{AE}$ . To znači da je  $\overline{FD}$  srednjica trokuta  $ABE$ , pa je  $FD \parallel BE$ . Zbog toga je  $\sphericalangle SDF = \sphericalangle SCE = 54^\circ$  i  $\sphericalangle SFD = \sphericalangle SEC = 54^\circ$ , jer su to kutovi uz presječnicu  $CD$  odnosno  $EF$ . Zato je trokut  $SFD$  jednakokravan, pa je  $|SF| = |SD|$ .

**5 BODOVA**

3) Kako je  $|AE| = |AF| + |FE|$ , a zbog  $|AF| = |FE|$ , vrijede redom ove jednakosti

$$|AE| = |FE| + |FE|,$$

$$|AE| = 2|FE|, \quad \text{a zbog } |FE| = |SF| + |SE| \implies$$

$$|AE| = 2(|SF| + |SE|),$$

$$|AE| = 2(|SD| + |SC|), \quad \text{a zbog } |SD| + |SC| = |CD| \implies$$

$$|AE| = 2|CD|$$

**2 BODA**