Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

9. ožujka 2007.

Zadatak 1. Odredite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$x^2 + 11^2 = y^2.$$

Zadatak 2. U krugu sa središtem u točki S, polumjera $r = 2$ cm, povučena su dva polumjera $\overline{SA}$ i $\overline{SB}$. Kut između njih je $45°$. Neka je K sjecište pravca AB i okomice povučene na pravac AS u točki S, a točka L je nožište visine trokuta ABS povučene iz vrha B. Izračunajte površinu trapeza $SKBL$.

Zadatak 3. Odredite x, y, z ako je

$$\frac{ay+bx}{xy} = \frac{bz+cy}{yz} = \frac{cx+az}{zx} = \frac{4a^2+4b^2+4c^2}{x^2+y^2+z^2}, \qquad a, b, c \in \mathbf{R}$$

Zadatak 4. Neka su a i b pozitivni realni brojevi takvi da je $a > b$ i $ab = 1$. Dokažite da tada vrijedi nejednakost $\dfrac{a-b}{a^2+b^2} \leq \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Ako vrijedi jednakost, koliko je $a+b$?

Zadatak 5. Duljine stranica pravokutnika odnose se kao $12 : 5$. Dijagonale pravokutnika dijele pravokutnik na četiri trokuta. Dvama od tih trokuta, koji imaju zajedničku stranicu, upisane su kružnice polumjera r_1 i r_2. Izračunajte omjer $r_1 : r_2$.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

9. ožujka 2007.

Zadatak 1. Odredite najmanju i najveću vrijednost izraza $\left|z-\frac{1}{z}\right|$, ako je z kompleksni broj takav da je $|z|=2$.

Zadatak 2. Odredite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$x^3+11^3=y^3.$$

Zadatak 3. Pravac p_1 presijeca graf kvadratne funkcije $y=ax^2+bx+c$ u točkama A i B. Pravac p_2 paralelan je pravcu p_1 i presijeca taj isti graf u točkama C i D. Dokažite da je suma apscisa točaka A i B jednaka sumi apscisa točaka C i D.

Zadatak 4. U paralelogramu $ABCD$ točke P, Q, R, S polovišta su stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ (tim redom). Pravci AR, BS, CP, DQ sijeku se i formiraju četverokut.

a) Dokažite da je taj četverokut paralelogram.

b) Nađite omjer površina tog paralelograma i početnog paralelograma.

Zadatak 5. Dokažite da je za svaku četvorku prirodnih brojeva a, b, c, d broj

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

djeljiv s 12.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

9. ožujka 2007.

Zadatak 1. Izračunajte:

$$\sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{2n}+\underbrace{11\ldots1}_{n+1}-\underbrace{66\ldots6}_{n\text{ znamenaka}}}\,.$$

Zadatak 2. Za koje cijele brojeve n funkcija $f(x)=\cos nx\cdot\sin\frac{5}{n}x$ ima period 3π?

Zadatak 3. Riješite jednadžbu:

$$x^2+10x\cdot\sin(xy)+25=0.$$

Zadatak 4. Dokažite da u trokutu ABC s duljinama stranica a, b, c, kutovima α, β, γ i poluopsegom s vrijedi jednakost

$$s^2=b^2\cos^2\frac{\gamma}{2}+c^2\cos^2\frac{\beta}{2}+2bc\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Zadatak 5. Osnovica piramide $ABCV$ je pravokutan trokut ABC s hipotenuzom $|AB|=c$ i kutom $\sphericalangle A=\alpha$. Pobočni bridovi jednako su nagnuti prema ravnini osnovice, a ravnina BCV zatvara s ravninom ABC kut β. Odredite volumen piramide.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

9. ožujka 2007.

Zadatak 1. Odredite, ako postoje, najmanji i najveći prirodni broj kojem je umnožak znamenaka 18 900.

Zadatak 2. Nađite međusobne omjere realnih brojeva x, y, z ako uz zadane brojeve a, b, c, $abc \neq -1$, vrijede jednakosti

$$x + by = y + cz = z + ax.$$

Zadatak 3. U skupu kompleksnih brojeva riješite jednadžbe

a) $z^3 = \overline{z}$,

b) $z^5 = \overline{z}$,

Zadatak 4. Zadana je hiperbola sa središtem O. Pravci kroz neku njenu točku paralelni njenim asimptotama sijeku realnu os te hiperbole u točkama U i V tako da je $|OU| < |OV|$. Neka je točka K presjek okomice na realnu os hiperbole u točki U i polukružnice s promjerom $\overline{OV}$. Dokažite da je $|OK| = a$, pri čemu je a duljina realne poluosi dane hiperbole.

Zadatak 5. Zadani su nizovi prirodnih brojeva $a_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$ i $b_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$; $n \in \mathbf{N}$. Dokažite da je, za svaki $n \in \mathbf{N}$, točno jedan od brojeva a_n i b_n djeljiv s 5.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.