

ŽUPANIJSKO NATJECANJE
IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

9. ožujka 2007.

Zadatak 1. Odredite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$x^2 + 11^2 = y^2.$$

Zadatak 2. Ako vrijedi

$$\frac{37}{13} = 2 + \frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}},$$

odredite $x, y, z \in \mathbf{N}$.

Zadatak 3. Odredite četveroznamenkasti broj koji je četiri puta manji od broja s istim znamenkama u obrnutom redoslijedu.

Zadatak 4. a) Riješite jednadžbu

$$|3x - 2| + |3x + 2| = 5.$$

b) Izračunajte površinu lika omeđenog pravcem $y = 5$ i grafom funkcije

$$y = \sqrt{9x^2 - 12x + 4} + \sqrt{9x^2 + 12x + 4}.$$

Zadatak 5. Unutar trokuta ABC s kutom $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ određena je točka D tako da vrijedi $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB = 45^\circ$. Dokažite da je pravac BD okomit na pravac AC .

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE
IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

9. ožujka 2007.

Zadatak 1. Odredite sva rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{cases} |z + 1 + 8i|^2 - |z + 2 + i|^2 = 100 \\ |z - 5| = 5 \end{cases}$$

u skupu kompleksnih brojeva.

Zadatak 2. Stranice \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} trokuta ABC produljene su (preko točaka B , C i A) do točaka D , E , F tako da bude $|BD| = 2|AB|$, $|CE| = 2|BC|$, $|AF| = 2|CA|$. Izračunajte omjer površina trokuta DEF i ABC .

Zadatak 3. Pravac p_1 presijeca graf kvadratne funkcije $y = ax^2 + bx + c$ u točkama A i B . Pravac p_2 paralelan je pravcu p_1 i presijeca taj isti graf u točkama C i D . Dokažite da je suma apscisa točaka A i B jednaka sumi apscisa točaka C i D .

Zadatak 4. Odredite sva realna rješenja jednadžbe

$$x^3 + x^2 + x^1 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} = 6.$$

Zadatak 5. Oko kružnice polumjera r opisan je jednakokračan trapez. Dokažite da duljina dijagonale trapeza nije manja od $2\sqrt{2}r$.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE
IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

9. ožujka 2007.

Zadatak 1. Riješite jednadžbu

$$\log_2(4^x + 16) - \frac{2}{\log_5 4} = x + 1.$$

Zadatak 2. Koliki je zbroj duljina svih dijagonala pravilnog osmerokuta, kojemu stranice imaju duljinu 1?

Zadatak 3. U trokutu ABC točka D dijeli stranicu \overline{BC} na dijelove duljina $u = |BD|$ i $v = |DC|$.

a) Ako je $\sphericalangle BDA = \varphi$, a duljina $|AD| = t$, izrazite b i c pomoću t, u, v i φ .

b) Izrazite duljinu t pomoću b, c, u i v .

Zadatak 4. Opseg pravokutnika je $2s$, a površina $\frac{3}{16}s^2$. Izračunajte tangens kuta što ga određuju dijagonale pravokutnika.

Zadatak 5. Osnovica piramide $ABCV$ je pravokutan trokut ABC s hipotenuzom $|AB| = c$ i kutom $\sphericalangle A = \alpha$. Pobočni bridovi jednako su nagnuti prema ravni osnove, a ravnina BCV zatvara s ravinom ABC kut β . Odredite volumen piramide.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE
IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

9. ožujka 2007.

Zadatak 1. Suma triju pozitivnih brojeva α , β , γ jednaka je $\frac{\pi}{2}$. Izračunajte

$$\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \gamma,$$

ako je poznato da $\operatorname{ctg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \beta$, $\operatorname{ctg} \gamma$ čine aritmetički niz.

Zadatak 2. Zadan je niz: 1, 8, 22, 43, ... u kojem razlike uzastopnih članova tvore aritmetički niz. Koji je po redu broj 35 351 u tom nizu?

Zadatak 3. Ako za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$f(x+1) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)},$$

pokažite da je f periodička funkcija.

Zadatak 4. U koordinatnom sustavu dane su točke $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(0, h)$, pri čemu je $a > 0$, $b < 0$ i $h > 0$. Odredite skup koji čine središta svih pravokutnika koji su upisani u trokut ABC , tako da su mu dva vrha na stranici \overline{AB} , a po jedan vrh na svakoj od ostalih stranica.

Zadatak 5. Odredite, ako postoje, najmanji i najveći prirodni broj kojem je umnožak znamenaka 18 900.

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.

Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.