RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK OCIJENITI I BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Kako je umnožak jednak 0 samo ako je jedan od faktora jednak 0, onda je $x = 0$, $|x| - 2 = 0$ ili $x + 2.2 = 0$.

Zato slijedi $x_1 = 0$.

Iz $|x| - 2 = 0$ slijedi $|x| = 2$ odnosno $x_2 = 2$ i $x_3 = -2$.

Na kraju $x_4 = -2.2$.

Najmanji cijeli broj koji je rješenje jednadžbe je broj -2.

Zbroj svih rješenja je $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 + 2 + (-2) + (-2.2) = -2.2$.

2. Neka je x broj prodanih lopti iz prve kutije. Brojevi prodanih lopti iz ostalih kutija tada su redom $2x$, $3x$, $4x$, $5x$, $6x$, $7x$, $8x$, $9x$ i $10x$, što je ukupno $55x$.

Iz posljednje kutije prodano je $10x$ lopti a ostala je jedna lopta. To znači da je u toj kutiji bilo $10x + 1$ lopta. Prema uvjetu zadatka i u svim ostalim kutijama bilo je toliko lopti, pa je ukupan broj lopti u kutijama bio $10(10x + 1)$ lopti.

Dakle, bilo je $10(10x + 1)$ lopti, prodano je $55x$ lopti, a ostalo 370 lopti. Vrijedi jednakost $10(10x + 1) = 55x + 370$. Odavde nalazimo $x = 8$.

U svakoj kutiji na početku prodaje bilo je $10x + 1 = 81$ lopta.

3. Neka su x i y mase kristala na početku.

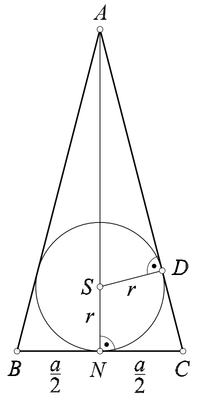
Povećanje mase prvog kristala nakon godinu dana iznosi $\frac{1}{25}x$, a za jedan mjesec $\frac{1}{300}x$.

Povećanje mase drugog kristala nakon godinu dana iznosi $\frac{1}{20}y$, a za jedan mjesec $\frac{1}{240}y$.

Masa prvog kristala za tri se mjeseca povećala za $\frac{1}{100}x$, a masa drugog kristala za sedam mjeseci povećala se za $\frac{7}{240}y$.

Kako su ta povećanja jednaka, izjednačavanje daje $\frac{1}{100}x = \frac{7}{240}y$. Odavde dobivamo konačno traženi odnos masa $x : y = 35 : 12$.

4.



$$\left.\begin{aligned} |AN| &= 4 \text{ cm} \\ |SN| &= |SD| = r \end{aligned}\right\} \implies |AS| = 40 - r$$

$\triangle ANC \sim \triangle ADS$ jer su pravokutni sa zajedničkim kutom $\sphericalangle NAC$. Vrijedi:

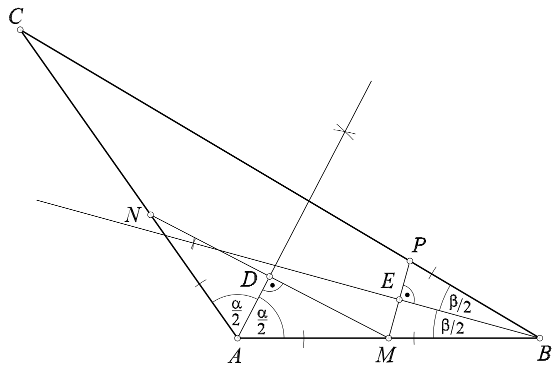
$$\frac{|NC|}{|AC|} = \frac{|DS|}{|AS|}$$
$$\frac{a}{2} : b = r : (4 - r).$$

Zbog $a : b = 1 : 2$, vrijedi $\dfrac{a}{2} : b = 1 : 4$ pa je:

$$\begin{aligned} 1 : 4 &= r : (4 - r) \\ 4r &= 4 - r \\ 5r &= 4 \\ r &= \frac{4}{5} \text{ cm.} \end{aligned}$$

Duljina polumjera trokutu upisane kružnice je $\dfrac{4}{5}$ cm.

5.



Kako je $\sphericalangle MAD = \sphericalangle NAD = \dfrac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle ADM = \sphericalangle ADN = 90°$ i $\overline{AD}$ zajednička stranica trokuta $\triangle AMD$ i $\triangle AND$, prema teoremu K-S-K o sukladnosti slijedi $\triangle AMD \cong \triangle AND$. Iz sukladnosti slijedi $|AM| = |AN|$.

S obzirom da je $\sphericalangle MBE = \sphericalangle PBE = \dfrac{\beta}{2}$, $\sphericalangle BEM = \sphericalangle BEP$ i $\overline{BE}$ zajednička stranica trokuta $\triangle BEM$ i $\triangle BEP$, prema teoremu K-S-K o sukladnosti slijedi $\triangle BEM \cong \triangle BEP$. Iz sukladnosti slijedi $|BM| = |BP|$.

Neka je $x = |AN|$, $y = |BP|$ i $n = |CN|$. Tada vrijedi $|CP| = 2|CN| = 2n$, $|AC| = |AN| + |NC| = x + n$ i $|BC| = |BP| + |PC| = y + 2n$.

Dalje je $x + n = 10$ i $y + 2n = 16$ odnosno $x = 10 - n$ i $y = 16 - 2n$.

Budući da je $|AB| = |AM| + |MB| = |AN| + |BP| = x + y$, slijedi

$$\begin{aligned} x + y &= 8 \\ (10 - n) + (16 - 2n) &= 8 \\ -3n &= 8 - 10 - 16 \\ -3n &= -18 \\ n &= 6. \end{aligned}$$

Dakle, $x = 10 - n = 4$ i $y = 16 - 2n = 4$.

Na kraju, $|AM| : |MB| = |AN| : |BP| = x : y = 4 : 4 = 1 : 1$.

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK OCIJENITI I BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Transformirajmo zadanu jednakost:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b}-\frac{b}{a}&=a+b\\
\frac{a^2-b^2}{ab}&=a+b\\
\frac{(a-b)(a+b)}{ab}&=a+b \;/\; :(a+b)\neq 0\\
\frac{a-b}{ab}&=1\\
\frac{a}{ab}-\frac{b}{ab}&=1\\
\frac{1}{b}-\frac{1}{a}&=1\\
\frac{1}{a}-\frac{1}{b}&=-1
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&\left(2006-\sqrt{1+2008\sqrt{1+2007\cdot 2005}}\right)^2\\
&=\left(2006-\sqrt{1+2008\sqrt{1+(2006+1)(2006-1)}}\right)^2\\
&=\left(2006-\sqrt{1+2008\sqrt{1+2006^2-1^2)}}\right)^2\\
&=\left(2006-\sqrt{1+2008\sqrt{2006^2}}\right)^2\\
&=\left(2006-\sqrt{1+2008\cdot 2006}\right)^2\\
&=\left(2006-\sqrt{1+(2007+1)(2007-1)}\right)^2\\
&=\left(2006-\sqrt{1+2007^2-1^2}\right)^2\\
&=\left(2006-\sqrt{2007^2}\right)^2\\
&=(2006-2007)^2\\
&=(-1)^2\\
&=1
\end{aligned}$$

3. Neka je d_t duljina tunela, d_v duljina vozila i n broj vozila u koloni. Neka su v_1, v_2 i v_3 brzine, a t_1, t_2 i t_3 vremena prolaska kroz tunel u dolasku, povratku odnosno zamišljenom slučaju povratka. Tada vrijedi sustav jednadžbi

$$
\begin{aligned}
d_t + nd_v + 2(n-1)d_v &= v_1t_1, \\
d_t + nd_v + 3(n-1)d_v &= v_2t_2, \\
d_t + \frac{n}{2}d_v + 4\left(\frac{n}{2}-1\right)d_v &= v_3t_3.
\end{aligned}
$$

Lako se odredi da je $v_1 = 20$ m/s, $v_2 = 31$ m/s, $v_3 = 30$ m/s, $t_1 = 292$ sek., $t_2 = 190$ sek., $t_3 = 193$ sek., pa vrijedi

$$
\begin{aligned}
d_t + nd_v + 2(n-1)d_v &= 5840, \\
d_t + nd_v + 3(n-1)d_v &= 5890, \\
d_t + \frac{n}{2}d_v + 4\left(\frac{n}{2}-1\right)d_v &= 5790.
\end{aligned}
$$

Ako od druge jednadžbe sustava oduzmemo prvu jednadžbu i od druge jednadžbe oduzmemo treću jednadžbu, tada slijedi

$$
\begin{aligned}
(n-1)d_v &= 50, \\
\left(\frac{n}{2}+n+1\right)d_v &= 100.
\end{aligned}
$$

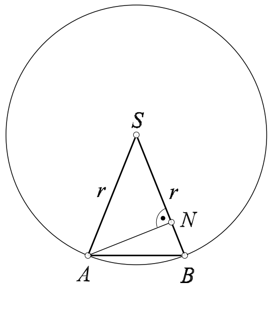
Izrazimo li d_v iz prve jednadžbe te uvrstimo u drugu jednadžbu, slijedi

$$\left(\frac{n}{2}+n+1\right)\cdot\frac{50}{n-1} = 100.$$

Dalje slijedi $n = 6$, $d_v = 10$ i $d_t = 5680$.

Duljina tunela je 5680 m. Duljina vozila u koloni je 10 m, a broj vozila je 6.

4.



Izdvojimo karakterističan trokut pravilnog osmerokuta $\triangle ABS$. Duljine krakova su 8 cm. Točka N pripada $\overline{BS}$ i $\overline{AN} \perp \overline{BS}$, tj. $\overline{AN}$ je visina na krak $\triangle ABS$.

$\measuredangle ASB = 45°$, pa je $\triangle ANS$ jednakokračan i pravokutan.

Neka je $|AN| = |NS| = v_b$. U $\triangle ANS$ vrijedi $r = v_b\sqrt{2}$, odakle je

$$v_b\sqrt{2} = 8, \quad \text{tj.}$$
$$v_b = 4\sqrt{2}.$$

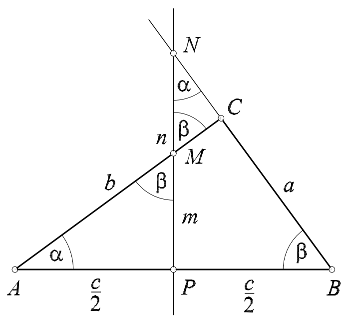
Površina $\triangle ABS$ je

$$P_{\triangle ABS} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2} \text{ cm}^2.$$

Površina osmerokuta je

$$P = 8 \cdot P_{\triangle ABS} = 8 \cdot 16\sqrt{2} = 128\sqrt{2} \text{ cm}^2.$$

5.



Neka su α i β kutovi trokuta ABC. Tada je zbog okomitih krakova i $\sphericalangle PNB = \alpha$, a $\sphericalangle AMP = \sphericalangle CMN = \beta$. Trokuti APM i BPN su slični, pa je $\dfrac{c}{2} : m = n : \dfrac{c}{2}$, odakle dobivamo duljinu hipotenuze $c = 2\sqrt{mn}$. Iz trokuta APM dobivamo još da je $|AM| = \sqrt{\dfrac{c^2}{4} + m^2} = \sqrt{mn + m^2}$.

Trokuti APM i ABC su slični, pa je $m : |AM| = a : c$, odnosno $a|AM| = mc$. Uvrštavanjem i sređivanjem dobivamo duljinu prve katete $a = \dfrac{2m\sqrt{mn}}{\sqrt{mn + m^2}}$.

Trokuti APM i MCN su slični, pa je $m : |AM| = (b - |AM|) : (n - m)$, odnosno $(b - |AM|)|AM| = m(n - m)$. Sređivanjem dobivamo duljinu druge katete $b = \dfrac{2mn}{\sqrt{mn + m^2}}$.