Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

3. svibnja 2007.

Zadatak 1. Nađite realna rješenja sustava jednadžbi:

$$\begin{gathered} x+y+z=2 \\ (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)=1 \\ x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-6 \end{gathered}$$

Zadatak 2. Na polupravcima p i q sa zajedničkim početkom O dane su točke A i C (na p) te B i D (na q). Ako je pravac CD paralelan s težišnicom trokuta OAB, dokažite da je pravac AB paralelan s težišnicom trokuta OCD.

Zadatak 3. **a)** Dokažite da se ploča dimenzija 4×4 može obojiti u dvije boje tako da za svaki izbor dvaju redaka i dvaju stupaca vrijedi da četiri polja u presjecima tih redaka i stupaca nisu sva obojana istom bojom.

b) Dokažite da gore navedeno svojstvo ne vrijedi za ploču dimenzija 5×5.

Zadatak 4. Odredite najveći prirodni broj n takav da $n^2 + 2007n$ bude kvadrat nekog prirodnog broja.

Svaki se zadatak boduje s 25 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

3. svibnja 2007.

Zadatak 1. U skupu kompleksnih brojeva riješite jednadžbu

$$(x^2 - a^2)^2 - 4ax - 1 = 0,$$

gdje je a realni broj.

Zadatak 2. Dana je polukružnica nad promjerom $\overline{AB}$ i na njoj točke C i D tako da vrijedi:

a) točka C pripada luku $\overset{\frown}{AD}$;

b) $\measuredangle CSD$ je pravi, pri čemu je S središte dužine $\overline{AB}$.

Neka je E sjecište pravaca AC i BD, a F sjecište AD i BC. Dokažite da je $|EF| = |AB|$.

Zadatak 3. Nađite sve prirodne brojeve koji su najveća zajednička mjera brojeva oblika $5n + 6$ i $8n + 7$ za neko $n \in \mathbf{N}$.

Zadatak 4. Unutar trokuta ABC nalazi se točka S. Dokažite da je umnožak udaljenosti točke S od stranica trokuta ABC najveći kada je točka S njegovo težište.

Svaki se zadatak boduje s 25 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

3. svibnja 2007.

Zadatak 1. Neka je n prirodan broj takav da je $n + 1$ djeljiv s 24.

a) Dokažite da broj n ima paran broj djelitelja (uključujući 1 i sam broj n).

b) Dokažite da je zbroj svih djelitelja broja n djeljiv s 24.

Zadatak 2. U trokutu ABC s kutom $\sphericalangle BAC = 120^\circ$ simetrale kutova $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCA$ sijeku nasuprotne stranice u točkama D, E i F redom. Dokažite da kružnica s promjerom $\overline{EF}$ prolazi kroz D.

Zadatak 3. U šiljastokutnom trokutu ABC udaljenosti od vrha A do središta opisane kružnice i ortocentra su jednake. Izračunati kut $\alpha = \sphericalangle BAC$.

Zadatak 4. Deset brojeva $1, 4, 7, \ldots, 28$ (razlika dvaju uzastopnih je 3) raspoređeno je u krug. Sa N označimo najveću od deset suma koje dobivamo tako da svaki od brojeva zbrojimo s dva njemu susjedna broja. Koja je najmanja vrijednost broja N koju možemo postići?

Svaki se zadatak boduje s 25 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

3. svibnja 2007.

Zadatak 1. Neka je n prirodan broj takav da je $n+1$ djeljiv s 24.

a) Dokažite da broj n ima paran broj djelitelja (uključujući 1 i sam broj n).

b) Dokažite da je zbroj svih djelitelja broja n djeljiv s 24.

Zadatak 2. Niz (a_n) zadan je rekurzivno:

$$\begin{aligned} &a_0 = 3 \\ &a_n = 2 + a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}, \qquad n \geq 1. \end{aligned}$$

a) Dokažite da su svi članovi tog niza u parovima relativno prosti prirodni brojevi.

b) Odredite a_{2007}.

Zadatak 3. Zadana je tablica $5 \times n$ kojoj je svako polje obojano u crvenu ili plavu boju. Nađite najmanji n za koji se uvijek mogu odabrati tri retka i tri stupca takva da je svih 9 polja u njihovom presjeku iste boje.

Zadatak 4. Šiljastokutni trokut ABC kome su A_1, B_1 i C_1 polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ upisan je u kružnicu sa središtem u točki O polumjera 1. Dokažite da je

$$\frac{1}{|OA_1|} + \frac{1}{|OB_1|} + \frac{1}{|OC_1|} \geq 6.$$

Svaki se zadatak boduje s 25 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.