DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija,
3. svibnja 2007.

Rješenja

Zadatak 1A-1. Nađite realna rješenja sustava jednadžbi:

$$
\begin{gathered}
x+y+z=2 \\
(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)=1 \\
x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-6
\end{gathered}
$$

Rješenje. Najprije ćemo transformacijom jednadžbi dobiti ekvivalentan, ali jednostavniji sustav.

Sređivanjem druge jednadžbe, i zatim korištenjem prve jednakosti dobivamo:

$$
\begin{gathered}
x^2+y^2+z^2+3xy+3yz+3zx=1 \\
(x+y+z)^2+xy+yz+zx=1 \\
xy+yz+zx=-3
\end{gathered}
$$

Slično postupamo i s trećom jednakošću:

$$
\begin{gathered}
x(xy+xz)+y(yz+xy)+z(xz+yz)=-6 \\
x(3+yz)+y(3+xz)+z(3+xy)=6 \\
x+y+z+xyz=2 \\
xyz=0
\end{gathered}
$$

Dakle, polazni sustav ekvivalentan je sa sustavom:

$$
\begin{gathered}
x+y+z=2 \\
xy+yz+zx=-3 \\
xyz=0
\end{gathered}
$$

Iz posljednje jednadžbe je $x=0$ ili $y=0$ ili $z=0$, pa se sustav svodi tri još jednostavnija sustava:

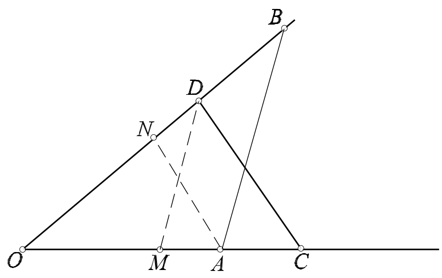
$$
\begin{array}{lll}
x=0, & yz=-3, & y+z=2 \\
y=0, & xz=-3, & x+z=2 \\
z=0, & xy=-3, & x+y=2
\end{array}
$$

odakle dobivamo rješenja:

$$
(x,y,z)\in\{(0,3,-1),(0,-1,3),(3,0,-1),(-1,0,3),(3,-1,0),(-1,3,0)\}.
$$

Zadatak 1A-2. Na polupravcima p i q sa zajedničkim početkom O dane su točke A i C (na p) te B i D (na q). Ako je pravac CD paralelan s težišnicom trokuta OAB, dokažite da je pravac AB paralelan s težišnicom trokuta OCD.

Rješenje. Neka je M sjecište paralele s pravcem AB kroz točku D i polupravca p, te neka je N sjecište paralele s pravcem CD kroz točku A i polupravca q.



Zbog sličnosti trokuta OAB i OMD vrijedi $\frac{|OM|}{|OA|} = \frac{|OD|}{|OB|}$, a zbog sličnosti trokuta OCD i OAN vrijedi $\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|ON|}{|OD|}$.

Stoga je $|OM| \cdot |OB| = |OA| \cdot |OD|$ i $|OA| \cdot |OD| = |OC| \cdot |ON|$, pa vrijedi i $|OM| \cdot |OB| = |OC| \cdot |ON|$.

Ako je pravac CD paralelan s težišnicom trokuta OAB, onda je $\overline{AN}$ težišnica tog trokuta, pa je N polovište dužine $\overline{OB}$.

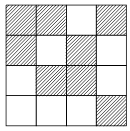
Sada zbog $|OB| = 2|ON|$ iz prethodne jednakosti slijedi $|OC| = 2|OM|$, pa je M polovište dužine $\overline{OC}$, tj. $\overline{DM}$ je težišnica trokuta OCD, a to je i trebalo pokazati.

Zadatak 1A-3. **a)** Dokažite da se ploča dimenzija 4×4 može obojiti u dvije boje tako da za svaki izbor dvaju redaka i dvaju stupaca vrijedi da četiri polja u presjecima tih redaka i stupaca nisu sva obojana istom bojom.

b) Dokažite da gore navedeno svojstvo ne vrijedi za ploču dimenzija 5×5.

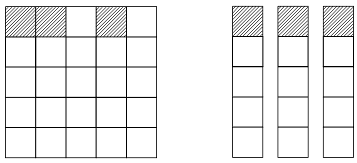
Rješenje.

a) Jedno moguće bojanje prikazano je na slici:



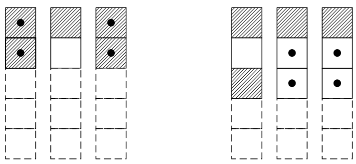
b) Pretpostavimo suprotno, tj. da je ploča dimenzija 5×5 obojana bijelom i crnom bojom tako da je uvjet ispunjen.

U prvom retku jednom su bojom (recimo crnom) obojana barem tri polja. Uočimo stupce u kojima je prvo polje crno:



Ako bi u drugom retku bila sva tri polja bijela, dalje bi bilo nemoguće popuniti tablicu.

Zapravo, u svakom od preostala četiri retka tih triju stupaca moraju biti točno dva bijela polja. Naime, ako bi bila dva (ili tri) crna polja, uvjet ne bi bio ispunjen.



No, to nije moguće jer takvih mogućnosti imamo samo tri (a ponavljanja ne smije biti).

Zadatak 1A-4. Odredite najveći prirodni broj n takav da $n^2 + 2007n$ bude kvadrat nekog prirodnog broja.

Rješenje. Neka je $n^2 + 2007n = m^2$. Tada je $m = n + k$ za neki cijeli broj k, pa iz $n^2 + 2007n = (n+k)^2$ dobivamo $n = \dfrac{k^2}{2007 - 2k}$. Kako je n prirodan broj, mora biti $2007 - 2k > 0$, uz uvjet da je k^2 djeljiv sa $2007 - 2k$. Dakle, bit će $k \leq 1003$. Kako se traži najveći broj n, to brojnik razlomka mora biti što veći, a nazivnik što manji, pa se najveći n dobiva za $k = 1003$. Tada je $n = \dfrac{1003^2}{1} = 1006009$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija,
3. svibnja 2007.

Rješenja

Zadatak 2A-1. U skupu kompleksnih brojeva riješite jednadžbu

$$(x^2 - a^2)^2 - 4ax - 1 = 0,$$

gdje je a realni broj.

Rješenje. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&(x^2 - a^2)^2 - 4ax - 1 = 0 \\
&(x^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 - 4ax - 1 = 0 \\
&(x^2 + a^2)^2 - (2ax + 1)^2 = 0 \\
&(x^2 + a^2 - 2ax - 1)(x^2 + a^2 + 2ax + 1) = 0 \\
&\Big[(x - a)^2 - 1\Big]\Big[(x + a)^2 + 1\Big] = 0 \\
&(x - a - 1)(x - a + 1)\Big[(x + a)^2 + 1\Big] = 0.
\end{aligned}$$

Rješenja su $x_1 = a + 1$, $x_2 = a - 1$, $x_3 = -a + i$ i $x_4 = -a - i$.

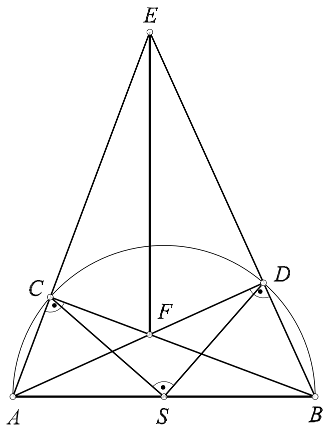
Zadatak 2A-2. Dana je polukružnica nad promjerom $\overline{AB}$ i na njoj točke C i D tako da vrijedi:

a) točka C pripada luku $\overset{\frown}{AD}$;

b) $\sphericalangle CSD$ je pravi, pri čemu je S središte dužine $\overline{AB}$.

Neka je E sjecište pravaca AC i BD, a F sjecište AD i BC. Dokažite da je $|EF| = |AB|$.

Rješenje.



Točke C i D pripadaju polukružnici nad promjerom AB, pa je

$$AD \perp BD, \qquad BC \perp AC.$$

Zato je točka F ortocentar trokuta ABE. Prema tome $EF \perp AB$.

Kako je $\sphericalangle CSD = 90°$, to je $\sphericalangle CAD = 45°$. Prema tome trokut ACF je jednakokračan pravokutan, pa je $|AC| = |CF|$.

Osim toga $\sphericalangle ECF = \sphericalangle BCA = 90°$ i $\sphericalangle EFC = \sphericalangle BAC$ (kutovi s okomitim kracima). Iz ovoga slijedi da su trokuti ECF i BCA sukladni, pa je $|EF| = |AB|$.

Zadatak 2A-3. Nađite sve prirodne brojeve koji su najveća zajednička mjera brojeva oblika $5n + 6$ i $8n + 7$ za neko $n \in \mathbf{N}$.

Rješenje. S $M(a, b)$ označavamo najveću zajedničku mjeru brojeva a i b. Poznato je da vrijedi $M(a, b) = M(b, a - b)$.

Stoga imamo:

$$\begin{aligned} M(8n+7, 5n+6) &= M(5n+6, 3n+1) = M(3n+1, 2n+5) \\ &= M(2n+5, n-4) = M(n-4, n+9) = M(n-4, 13) \end{aligned}$$

Kako je 13 prost broj, zajednička mjera broja 13 i još nekog broja može biti samo 1 ili 13.

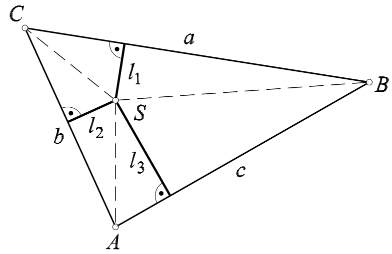
Preostaje pokazati da se oba slučaja mogu dogoditi. Na primjer,

$$\begin{aligned} n = 1 \quad &\Longrightarrow \quad M(11, 15) = 1 \\ n = 4 \quad &\Longrightarrow \quad M(26, 39) = 13. \end{aligned}$$

Zadatak 2A-4. Unutar trokuta ABC nalazi se točka S. Dokažite da je umnožak udaljenosti točke S od stranica trokuta ABC najveći kada je točka S njegovo težište.

Rješenje.

Neka su l_1, l_2, l_3 udaljenosti točke S do stranica trokuta. Nacrtajmo sliku:



Jasno je da je

$$a \cdot l_1 + b \cdot l_2 + c \cdot l_3 = 2 \cdot P_{ABC},$$

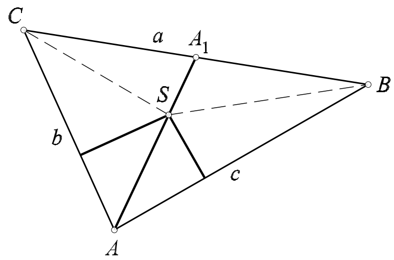
dakle, konstantan broj.

Zbog A-G nejednakosti vrijedi

$$(al_1) \cdot (bl_2) \cdot (cl_3) \leq \left(\frac{a \cdot l_1 + b \cdot l_2 + c \cdot l_3}{3} \right)^3 .$$

Jednakost će biti ispunjena ako je $al_1 = bl_2 = cl_3$ i tada je vrijednost umnoška $(al_1) \cdot (bl_2) \cdot (cl_3)$ (pa samim tim i umnoška $l_1 l_2 l_3$) najveća.

Tvrdnja. Ako vrijedi $al_1 = bl_2 = cl_3$, onda se točka S nalazi u presjeku težišnica trokuta.



Dokaz. Neka je A_1 točka u kojoj pravac AS siječe stranicu $\overline{BC}$. Onda je

$$|BA_1| : |A_1C| = P_{BA_1A} : P_{A_1CA} = P_{ASB} : P_{ASC} = cl_3 : bl_2 = 1$$

pa je $\overline{AA_1}$ težišnica trokuta. Analogno se dokaže da S leži i na ostalim težišnicama.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

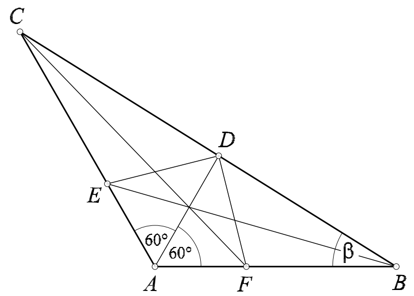
3. razred – srednja škola – A kategorija, 3. svibnja 2007.

Rješenja

Zadatak 3A-1. Vidi Zadatak 4A-1

Zadatak 3A-2. U trokutu ABC s kutom $\sphericalangle BAC = 120^\circ$ simetrale kutova $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCA$ sijeku nasuprotne stranice u točkama D, E i F redom. Dokažite da kružnica s promjerom $\overline{EF}$ prolazi kroz D.

Rješenje.



Prvo rješenje. Promotrimo trokut ABD. Točka E leži na simetrali kuta $\sphericalangle ABD$ i na vanjskoj simetrali kuta $\sphericalangle BAD$, jer je $\sphericalangle CAD = 60^\circ = \dfrac{180^\circ - \sphericalangle BAD}{2}$.

Iz toga slijedi da je E središte pripisane kružnice trokuta ABD (središte kružnice koja dira $\overline{AD}$ i produžetke stranica BA i BD). Zato E leži i na vanjskoj simetrali kuta $\sphericalangle BDA$, dakle ED je simetrala kuta $\sphericalangle ADC$. Analogno je FD simetrala kuta $\sphericalangle ADB$.

Odatle slijedi $\sphericalangle EDF = 90^\circ$, te po Talesovom teoremu i tvrdnja zadatka.

Drugo rješenje. Primijenimo sinusov poučak na trokut ABC:

$$\frac{|AC|}{\sin\beta} = \frac{|BC|}{\sin 120^\circ}, \quad \text{tj.} \quad \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\beta.$$

Kako je CF simetrala $\sphericalangle BCA$, slijedi

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AC|}{|CB|},$$

pa slijedi

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\beta.$$

Primjenom sinusovog poučka na trokut ABD dobivamo:

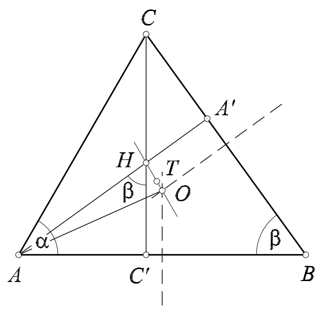
$$\frac{|AD|}{\sin\beta} = \frac{|BD|}{\sin 60^\circ}, \quad \text{tj.} \quad \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\beta.$$

Sada slijedi
$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AF|}{|FB|},$$
tj. FD je simetrala kuta $\sphericalangle ADB$.

Analogno zaključujemo da je ED simetrala kuta $\sphericalangle ADC$. Zato je $\sphericalangle EDF = 90°$ i tvrdnja zadatka slijedi.

Zadatak 3A-3. U šiljastokutnom trokutu ABC udaljenosti od vrha A do središta opisane kružnice i ortocentra su jednake. Izračunati kut $\alpha = \sphericalangle BAC$.

Rješenje. *Slika.*



Neka je H ortocentar, A' nožište visine iz vrha A, C' nožište visine iz vrha C, α kut kod vrha A i β kut kod vrha B.

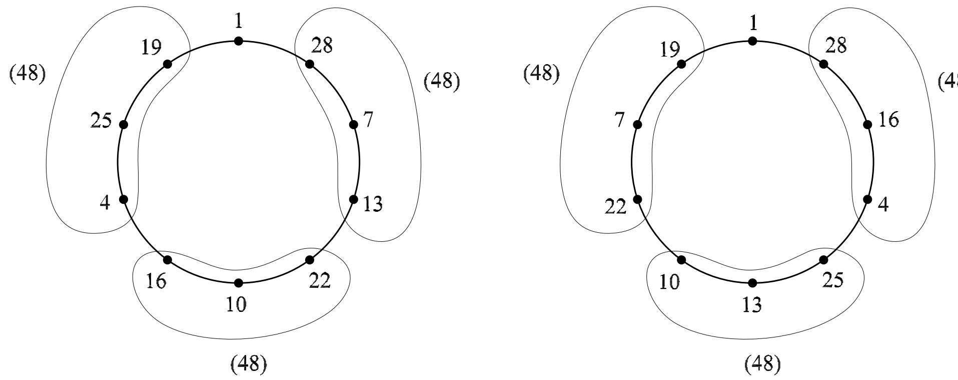
Iz uvjeta zadatka slijedi $|AH| = R$, radijus opisane kružnice.

Četverokut $BA'HC'$ je tetivni jer su kutovi kod A' i C' pravi. Stoga je $\sphericalangle A'HC' = 180° - \beta$ pa je $\sphericalangle AHC' = 180° - \sphericalangle A'HC' = \beta$. Iz trokuta $AC'C$ dobivamo:
$$|CC'| = |AC'| \operatorname{tg} \alpha.$$
Iz trokuta $AC'H$ dobivamo:
$$\frac{|AC'|}{|AH|} = \sin\beta.$$
Zato je
$$|CC'| = R \sin\beta \operatorname{tg} \alpha. \tag{1}$$
Primjenom sinusovog poučka na trokut ABC dobivamo:
$$2R = \frac{|CB|}{\sin\alpha} \implies |CB| = 2R\sin\alpha,$$
Iz trokuta BCC' je:
$$\sin\beta = \frac{|CC'|}{|CB|} \implies |CC'| = |CB|\sin\beta.$$
Dakle,
$$|CC'| = 2R\sin\alpha\sin\beta. \tag{2}$$
Iz (1) i (2) zaključujemo da je $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ pa je $\alpha = 60°$.

Zadatak 3A-4. Deset brojeva 1, 4, 7,. . . , 28 (razlika dvaju uzastopnih je 3) raspoređeno je u krug. Sa N označimo najveću od deset suma koje dobivamo tako da svaki od brojeva zbrojimo s dva njemu susjedna broja. Koja je najmanja vrijednost broja N koju možemo postići?

Rješenje. Za po volji odabran raspored brojeva, podijelimo krug u četiri sektora: S_1, S_2, S_3, S_4. S_1 neka sadrži samo broj 1, a ostali po 3 broja koja idu po redu, jedan do drugoga. Zbroj svih brojeva iz S_2, S_3 i S_4 je $4+7+10+\ldots+28 = 144$, Vrijedi $\frac{144}{3} = 48$, zato tražena vrijednost broja N ne može biti manja od 48. (Inače bi zbroj svih upisanih brojeva bio manji od 145, što nije moguće.)

Preostaje pokazati da postoji raspored u kojem se postiže najmanji zbroj $N = 48$. To možemo vidjeti iz dva predložena rasporeda.



DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija,
3. svibnja 2007.

Rješenja

Zadatak 4A-1. Neka je n prirodan broj takav da je $n+1$ djeljiv s 24.

a) Dokažite da broj n ima paran broj djelitelja (uključujući 1 i sam broj n).

b) Dokažite da je zbroj svih djelitelja broja n djeljiv s 24.

Rješenje. **a)** Dokažimo najprije da n nije potpun kvadrat. Podijelimo prirodne (cijele) brojeve u klase u zavisnosti o tome koliki im je ostatak pri dijeljenju s 4, te izračunajmo njihove kvadrate:

$$\begin{aligned}
(4k)^2 &= 16k^2 \equiv 0 \pmod 4\\
(4k+1)^2 &= 16k^2+8k+1 \equiv 1 \pmod 4\\
(4k+2)^2 &= 16k^2+16k+4 \equiv 0 \pmod 4\\
(4k+3)^2 &= 16k^2+24k+9 \equiv 1 \pmod 4.
\end{aligned}$$

Odavde zaključujemo da potpun kvadrat može biti ili djeljiv s 4 ili daje ostatak 1 pri dijeljenju s 4. Zato n nije potpun kvadrat, jer on pri dijeljenju s 4 daje ostatak 3.

Djelitelje broja n možemo stoga podijeliti u parove različitih brojeva: d i $\frac{n}{d}$, pri čemu je $d < \sqrt{n}$ bilo koji djelitelj broja n. Zato je tih djelitelja paran broj.

b) Da bismo dokazali traženu tvrdnju dovoljno je dokazati da je $d + \frac{n}{d}$ djeljivo s 24 za svaki djelitelj d. Dakle, želimo dokazati

$$24 \;\Big|\; \frac{d^2+n}{d}.$$

Jer je n oblika $n = 24k+1$, djelitelj d broja n relativno je prost s 24. Zato je dovoljno dokazati da $24 \mid d^2+n$, odnosno da $24 \mid d^2-1$, jer je n oblika $24k-1$.

Jer je d relativno prost s 24, on nije paran, niti je djeljiv s 3.

Vrijedi $d^2-1=(d-1)(d+1)$. Budući da d nije paran, jedan od ovih faktora mora biti djeljiv s 4, a drugi s 2. Zato je d^2-1 djeljiv s 8.

Također, d nije djeljiv s 3, pa je jedan od brojeva $d-1$ ili $d+1$ djeljiv s 3. Prema tome, d^2-1 je djeljiv s 24, čime smo dokazali traženu tvrdnju.

Zadatak 4A-2. Niz (a_n) zadan je rekurzivno:

$$\begin{aligned} a_0 &= 3 \\ a_n &= 2 + a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}, \qquad n \geq 1. \end{aligned}$$

a) Dokažite da su svi članovi tog niza u parovima relativno prosti prirodni brojevi.

b) Odredite a_{2007}.

Rješenje. **a)** Iz rekurzije se vidi da su svi članovi niza (a_n) neparni, zbog neparnosti od a_0. Sada pretpostavimo suprotno: dva člana niza, npr. a_k i a_n $(k < n)$ nisu relativno prosti. Onda postoji $m \in \mathbf{N}$, $m \neq 1$ za koji vrijedi $m|a_k$ i $m|a_n$. Iz rekurzije

$$a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_k \cdot \ldots \cdot a_{n-1} = a_n - 2$$

slijedi $m|2$, pa je jedina mogućnost $m = 2$. Međutim, tada bi bilo $2|a_k$ i $2|a_n$ što je kontradikcija s neparnošću svih članova niza. Dakle, vrijedi tvrdnja a).

b) Napišimo rekurziju za opći član:

$$a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} = a_n - 2.$$

Tu uvrstimo $a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-2} = a_{n-1} - 2$ i dobivamo:

$$(a_{n-1} - 2)a_{n-1} = a_n - 2$$

što je ekvivalentno s $a_n - 1 = (a_{n-1} - 1)^2$. Slijedi:

$$\begin{aligned} a_n - 1 &= (a_{n-1} - 1)^2 = (a_{n-2} - 1)^4 = \ldots \\ &= (a_{n-k} - 1)^{2^k} = (a_0 - 1)^{2^n} = 2^{2^n} \end{aligned}$$

Dakle, $a_n = 2^{2^n} + 1$ pa je $a_{2007} = 2^{2^{2007}} + 1$.

Napomena. Moguće je i napisati prvih par članova niza, naslutiti opći član i dokazati ga matematičkom indukcijom. (Riječ je zapravo o Fermatovim brojevima.)

Zadatak 4A-3. Zadana je tablica $5 \times n$ kojoj je svako polje obojano u crvenu ili plavu boju. Nađite najmanji n za koji se uvijek mogu odabrati tri retka i tri stupca takva da je svih 9 polja u njihovom presjeku iste boje.

Rješenje. Stavimo $n = 40$. Tablica tada ima 5 redaka i 40 stupaca. Svaki stupac obojimo tako da su tri polja obojana jednom, a dva drugom bojom. Takvih različitih bojanja stupaca ima $2 \cdot \binom{5}{3} = 2 \cdot 10 = 20$. Tako popunimo prvih 20 stupaca, a na isti način i sljedećih 20. Tada, koja god tri retka odabrali, nećemo moći naći tri stupca koja zadovoljavaju uvjete zadatka.

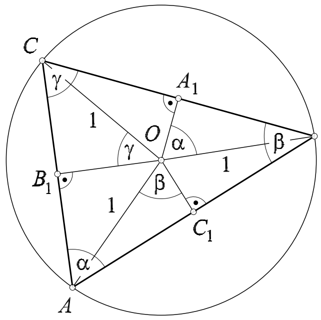
Stavimo $n = 41$. Tada barem 21 stupac ima više polja jedne (npr. crvene) boje nego li druge. U tim su stupcima, dakle, barem tri polja crvene boje. Oni se mogu rasporediti unutar redaka na $\binom{5}{3} = 10$ načina. S obzirom da je takvih stupaca 21, jedna te ista se trojka mora pojaviti i po treći put.

Zadatak 4A-4. Šiljastokutni trokut ABC kome su A_1, B_1 i C_1 polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ upisan je u kružnicu sa središtem u točki O polumjera 1. Dokažite da je

$$\frac{1}{|OA_1|} + \frac{1}{|OB_1|} + \frac{1}{|OC_1|} \geq 6.$$

Rješenje.

Nacrtajmo sliku.



Kut $\sphericalangle COB$ je središnji, pa vrijedi $\sphericalangle COB = 2\alpha$. Pravac OA_1 simetrala je tog kuta, odakle slijedi $\sphericalangle BOA_1 = \alpha$.

Iz pravokutnog trokuta OA_1B dobivamo $\cos\alpha = \dfrac{1}{|OA_1|}$, te analogno iz trokuta OC_1A i OB_1C dobivamo $\cos\beta = \dfrac{1}{|OB_1|}$, $\cos\gamma = \dfrac{1}{|OC_1|}$. Tada je

$$\begin{aligned}\frac{1}{|OA_1|} + \frac{1}{|OB_1|} + \frac{1}{|OC_1|} &= \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} + \frac{1}{\cos\gamma} \\ &\geq \frac{9}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma},\end{aligned}$$

pri čemu smo koristili nejednakost između aritmetičke i harmonijske sredine.

Dovoljno je stoga dokazati da je $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \dfrac{3}{2}$, pri čemu je $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Imamo

$$\begin{aligned}&\cos\alpha + \cos\beta + \cos(180^\circ - \alpha - \beta) \\ &\qquad = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos(\alpha+\beta) \\ &\qquad = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + 1 \\ &\qquad \leq 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - 2\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + 1 \\ &\qquad = \frac{3}{2} - 2\left(\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{2}.\end{aligned}$$