Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

3. svibnja 2007.

Zadatak 1. Koja relacija povezuje brojeve a, b i c ako za neke x i y vrijede jednakosti

$$a = x - y, \qquad b = x^2 - y^2, \qquad c = x^3 - y^3?$$

Zadatak 2. Zadan je pravokutan trokut $\triangle ABC$, s pravim kutom pri vrhu C. Na kateti $\overline{BC}$ odaberimo točku A_1, a na kateti $\overline{AC}$ točku B_1. Dokažite da je

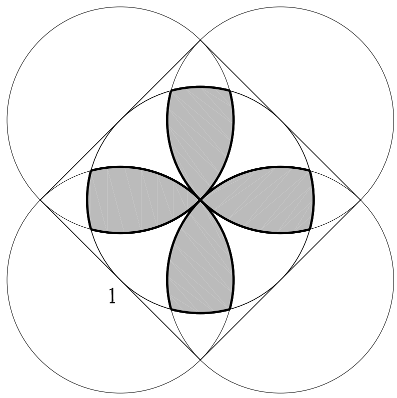
$$|AA_1|^2 + |BB_1|^2 = |AB|^2 + |A_1B_1|^2.$$

Zadatak 3. Dokažite da je broj

$$\underbrace{111\ldots1}_{2n} - \underbrace{222\ldots2}_{n \text{ znamenaka}}$$

kvadrat prirodnog broja.

Zadatak 4. Kvadratu stranice duljine 1 upisana je kružnica, a nad njegovim stranicama kao promjerima konstruirane su četiri kružnice. Izračunajte opseg "propelera" na slici.



Zadatak 5. Nađite sve prirodne brojeve $m, n \in \mathbf{N}$ takve da vrijedi

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} = \frac{2}{5}.$$

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

3. svibnja 2007.

Zadatak 1. Odredite sve trojke uzastopnih neparnih prirodnih brojeva kojima je zbroj kvadrata jednak četveroznamenkastom broju s jednakim znamenkama.

Zadatak 2. Ako su a, b i c duljine stranica nekog trokuta, dokažite da je funkcija

$$f(x) = b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$$

pozitivna za svaki realni x.

Zadatak 3. Dan je skup parabola $y = (k-2)x^2 - 2kx + k + 2$, pri čemu je $k \neq 2$ realni broj.

a) Dokažite da tjemena svih tih parabola leže na istom pravcu i odredite njegovu jednadžbu.

b) Imaju li sve ove parabole zajedničku točku?

Zadatak 4. Na dijagonalama $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ konveksnog četverokuta $ABCD$ izabrane su redom točke M i N tako da je $MB \| AD$ i $NA \| BC$. Dokažite da je $MN \| CD$.

Zadatak 5. Dokažite da za pozitivne brojeve a, b, c vrijede nejednakosti:

a)

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$

b)

$$\frac{ab + c^2}{a + b} + \frac{bc + a^2}{b + c} + \frac{ca + b^2}{c + a} \geq a + b + c.$$

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

3. svibnja 2007.

Zadatak 1. **a)** Dokažite da vrijedi

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(60^\circ + x) \cdot \operatorname{tg}(60^\circ - x).$$

b) Izračunajte

$$\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ.$$

Zadatak 2. Ako su u konveksnom četverokutu jednaki zbrojevi kvadrata duljina suprotnih stranica, dokažite da su mu dijagonale okomite.

Zadatak 3. Trapezu $ABCD$ je opisana i upisana kružnica. Omjer visine trapeza i polumjera opisane kružnice je $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Odredite kutove trapeza.

Zadatak 4. Pravilni oktaedar je tijelo sastavljeno od dvije pravilne četverostrane piramide sa zajedničkom osnovkom i preostala dva vrha simetrična s obzirom na ravninu te osnovke, takvo da svih 12 bridova imaju jednake duljine.

Odredite omjer volumena opisane i upisane kugle pravilnom oktaedru.

Zadatak 5. Dokažite da za sve proste brojeve $p > 3$ broj $p^2 + 11$ ima više od šest različitih prirodnih djelitelja (računajući 1 i samog sebe).

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.

Ministarstvo prosvjete i športa Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

3. svibnja 2007.

Zadatak 1. U pravokutniku $ABCD$ zadane su točka E na stranici $\overline{BC}$ i točka F na stranici $\overline{CD}$. Ako je trokut AEF jednakostraničan, dokažite da je da je

$$P_{\triangle ECF} = P_{\triangle ABE} + P_{\triangle AFD}.$$

Zadatak 2. Pravac kroz točku $(0, a)$, $a > 0$, siječe simetrale kvadranata koordinatnog sustava u točkama A i B. Pokažite da polovište dužine AB leže na hiperboli. Odredite jednadžbu i koordinate središta te hiperbole.

Zadatak 3. Dokažite da je najveći koeficijent u razvoju $(a+b)^{2n}$ paran broj.

Zadatak 4. Zbroj nekoliko uzastopnih prirodnih brojeva jednak je 1000. Nađite sve takve nizove.

Zadatak 5. Ako su a_1, a_2, $\ldots$, a_n, a_{n+1} uzastopni članovi aritmetičkog niza, dokažite da je

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \ldots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

Svaki se zadatak boduje s 20 bodova.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.