DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija, 3. svibnja 2007.

Rješenja

Zadatak 1B-1. Koja relacija povezuje brojeve a, b i c ako za neke x i y vrijede jednakosti

$$a = x - y, \qquad b = x^2 - y^2, \qquad c = x^3 - y^3?$$

Rješenje. Uvažavanjem prve jednakosti, druga i treća jednakost mogu se pojednostavniti:

$$\begin{aligned} b &= x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = a(x+y), \\ c &= x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) = a(x^2+xy+y^2). \end{aligned}$$

Sada iz sustava

$$\begin{aligned} x - y &= a, \\ x + y &= \frac{b}{a}, \\ x^2 + xy + y^2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

želimo eliminirati x i y.

Iz prve dvije jednadžbe nalazimo $x = \dfrac{b+a^2}{2a}$, $y = \dfrac{b-a^2}{2a}$, što uvrštavanjem u treću jednadžbu daje

$$\left(\frac{b+a^2}{2a}\right)^2 + \frac{b+a^2}{2a} \cdot \frac{b-a^2}{2a} + \left(\frac{b-a^2}{2a}\right)^2 = \frac{c}{a}.$$

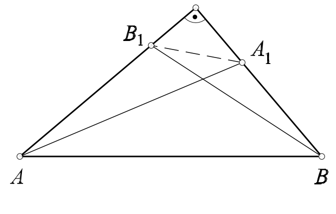
Nakon sređivanja ova jednakost poprima konačni oblik

$$a^4 + 3b^2 - 4ac = 0.$$

Zadatak 1B-2. Zadan je pravokutan trokut $\triangle ABC$, s pravim kutom pri vrhu C. Na kateti $\overline{BC}$ odaberimo točku A_1, a na kateti $\overline{AC}$ točku B_1. Dokažite da je

$$|AA_1|^2 + |BB_1|^2 = |AB|^2 + |A_1B_1|^2.$$

Rješenje.



Iz pravokutnog trokuta AA_1C slijedi

$$|A_1A|^2 = |AC|^2 + |CA_1|^2,$$

a iz pravokutnog trokuta BB_1C slijedi

$$|BB_1|^2 = |B_1C|^2 + |CB|^2.$$

Zbrajanjem tih jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} |AA_1|^2 + |BB_1|^2 &= |AC|^2 + |CB|^2 + |CA_1|^2 + |B_1C|^2 \\ &= |AB|^2 + |A_1B_1|^2, \end{aligned}$$

jer su trokuti ABC i A_1B_1C pravokutni.

Zadatak 1B-3. Dokažite da je broj

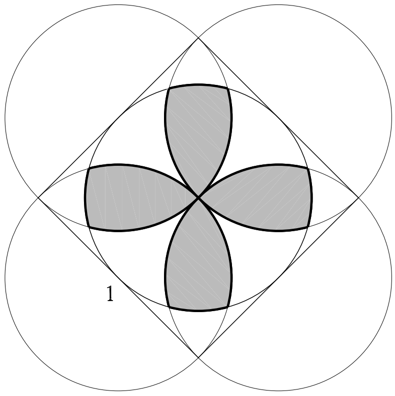
$$\underbrace{111\ldots1}_{2n} - \underbrace{222\ldots2}_{n \text{ znamenaka}}$$

kvadrat prirodnog broja.

Rješenje.

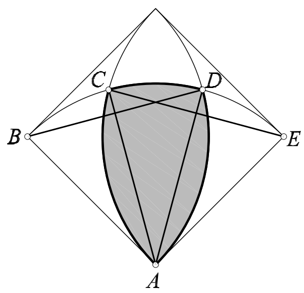
$$\begin{aligned} \underbrace{111\ldots1}_{2n} - \underbrace{222\ldots2}_{n} &= \underbrace{111\ldots1}_{2n} - 2\cdot\underbrace{111\ldots1}_{n} \\ &= (\underbrace{111\ldots1}_{n}\underbrace{000\ldots0}_{n} + \underbrace{111\ldots1}_{n}) - 2\cdot\underbrace{111\ldots1}_{n} \\ &= \underbrace{111\ldots1}_{n}\underbrace{000\ldots0}_{n} - \underbrace{111\ldots1}_{n} \\ &= \underbrace{111\ldots1}_{n}\cdot 10^n - \underbrace{111\ldots1}_{n} \\ &= \underbrace{111\ldots1}_{n}\cdot(10^n - 1) \\ &= \underbrace{111\ldots1}_{n}\cdot\underbrace{999\ldots9}_{n} \\ &= \underbrace{111\ldots1}_{n}\cdot(9\cdot\underbrace{111\ldots1}_{n}) \\ &= 9\cdot(\underbrace{111\ldots1}_{n})^2 = (3\cdot 111\ldots1)^2 \\ &= (\underbrace{333\ldots3}_{n})^2. \end{aligned}$$

Zadatak 1B-4. Kvadratu stranice duljine 1 upisana je kružnica, a nad njegovim stranicama kao promjerima konstruirane su četiri kružnice. Izračunajte opseg "propelera" na slici.



Rješenje.

Nacrtajmo četvrtinu kvadrata i odgovarajuće kružne lukove. Točka A je središte kvadrata, a B i E polovišta njegovih stranica.



Trokuti ABD i ACE su jednakostranični sa stranicom duljine 1, odakle slijedi da je trokut ACD jednakokračan sa kracima $\overline{AC}$ i $\overline{AD}$ duljine 1 i kutom $\sphericalangle CAD = 30°$.

Zato je opseg četvrtine "propelera" koji je jednak zbroju duljina lukova $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{AD}$ i $\overset{\frown}{CD}$ jednak

$$2 \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Ukupni opseg propelera iznosi

$$4 \cdot \frac{5\pi}{6} = \frac{10\pi}{3}.$$

Zadatak 1B-5. Nađite sve prirodne brojeve $m, n \in \mathbf{N}$ takve da vrijedi

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{mn}=\frac{2}{5}.$$

Rješenje. *Prvo rješenje.* Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $m \geq n$. Tada je

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{mn} \leq \frac{2}{n}-\frac{1}{mn}<\frac{2}{n}.$$

Dakle

$$\frac{2}{5}<\frac{2}{n} \iff n<5.$$

Sredimo jednadžbu po m:

$$\begin{aligned} n+m-1&=\frac{2}{5}mn,\\ 5n-5&=2mn-5m,\\ m&=\frac{5n-5}{2n-5}. \end{aligned}$$

Za $n=1$, $n=2$ dobivamo $m \leq 0$, pa rješenje ne postoji.

Za $n=3$ dobivamo $m=\dfrac{5 \cdot 3-5}{2 \cdot 3-5}=10$.

Za $n=4$ dobivamo $m=\dfrac{5 \cdot 4-5}{2 \cdot 4-5}=\frac{15}{3}=5$.

Rješenja su $m=10, n=3$; $m=5, n=4$; $m=4, n=5$; $m=3, n=10$.

Drugo rješenje. Jednakost možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} \frac{m+n-1}{mn}&=\frac{2}{5},\\ \frac{mn-m-n+1}{mn}&=1-\frac{2}{5},\\ \frac{(m-1)(n-1)}{mn}&=\frac{3}{5},\\ 5(m-1)(n-1)&=3mn \end{aligned}$$

Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je $m \geq n$. Broj $m-1$ relativno je prost sa m, a broj $n-1$ relativno je prost sa n. Zato su moguće samo dvije situacije:

(a) $m-1=n$, $5(n-1)=3m$, ili (b) $m-1=3n$, $5(n-1)=m$.

U slučaju (a) slijedi $5(n-1)=3(n+1)$ pa je $n=4$ i onda $m=5$.

U slučaju (b) slijedi $5(n-1)=3n+1$ pa je $n=3$ i onda $m=10$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija,
3. svibnja 2007.

Rješenja

Zadatak 2B-1. Odredite sve trojke uzastopnih neparnih prirodnih brojeva kojima je zbroj kvadrata jednak četveroznamenkastom broju s jednakim znamenkama.

Rješenje. Neka su to brojevi $2k-1$, $2k+1$ i $2k+3$. Prema uvjetu zadatka, vrijedi

$$(2k-1)^2+(2k+1)^2+(2k+3)^2 = 1000x+100x+10x+x.$$

Ovdje je x neka od znamenaka $1, 2, \ldots, 9$. Sređivanjem dobivamo

$$
\begin{aligned}
(*) \qquad 12k^2+12k+11 &= 1111x\\
12k^2+12k+11+1 &= 1111x+1\\
12(k^2+k+1) &= 12\cdot 92x+7x+1,
\end{aligned}
$$

tj. $7x+1$ treba biti djeljivo s 12, a to je moguće samo ako je $x=5$. Iz $(*)$ sada slijedi

$$12k^2+12k+11 = 5555$$

i odavde

$$k^2+k-462=0.$$

Rješenja ove jednadžbe su $k_1=21$ i $k_2=-22$. Prema tome, traženi su brojevi $2k-1=41$, $2k+1=43$, $2k+3=45$.

$$41^2+43^2+45^2=5555$$

Zadatak 2B-2. Ako su a, b i c duljine stranica nekog trokuta, dokažite da je funkcija

$$f(x)=b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2$$

pozitivna za svaki realni x.

Rješenje. Kvadratna funkcija $f(x)=Ax^2+Bx+C$ pozitivna je za svaki x ako je $A>0$ i $D=B^2-4AC<0$. Vrijedi $A=b^2>0$, pa je prvi uvjet ispunjen. Promotrimo diskriminantu:

$$
\begin{aligned}
D &= (b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2\\
&= (b^2+c^2-a^2-2bc)(b^2+c^2-a^2+2bc)\\
&= [(b-c)^2-a^2][(b+c)^2-a^2]\\
&= (b-c-a)(b-c+a)(b+c-a)(b+c+a).
\end{aligned}
$$

Kako su a, b i c duljine stranica trokuta, imamo: $a+b+c>0$, $a+b-c>0$, $b+c-a>0$ i $c+a-b>0$ (tj. $b-a-c<0$). Odavde slijedi da je $D<0$.

Zadatak 2B-3. Dan je skup parabola $y=(k-2)x^2-2kx+k+2$, pri čemu je $k \neq 2$ realni broj.

a) Dokažite da tjemena svih tih parabola leže na istom pravcu i odredite njegovu jednadžbu.

b) Imaju li sve ove parabole zajedničku točku?

Rješenje. **a)** Apscisa tjemena iznosi

$$x=\frac{2k}{2(k-2)}=\frac{k}{k-2},$$

a ordinata

$$y=\frac{4(k^2-4)-4k^2}{4(k-2)}=-\frac{4}{k-2}.$$

Kako iz $x=\dfrac{k}{k-2}$ slijedi $k=\dfrac{2x}{x-1}$, to je

$$y=-\frac{4}{\frac{2x}{x-1}-2}=-2x+2.$$

Dakle, geometrijsko mjesto tjemena svih ovih parabola je pravac $y=-2x+2$.

b) Danu parabolu možemo zapisati ovako:

$$k(x^2-2x+1)-y+2-2x^2=0.$$

Točka čije koordinate zadovoljavaju sustav jednadžbi

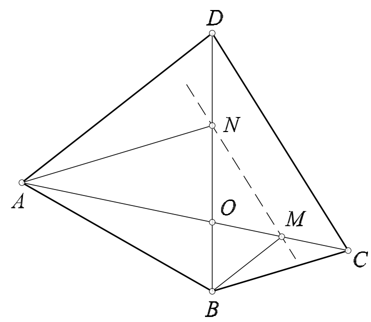
$$\begin{cases} x^2-2x+1=0 \\ -2x^2-y+2=0 \end{cases}$$

leži na svim parabolama.

Iz prve jednadžbe je $x=1$, pa iz druge dobivamo $y=0$.

Zadatak 2B-4. Na dijagonalama $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ konveksnog četverokuta $ABCD$ izabrane su redom točke M i N tako da je $MB \parallel AD$ i $NA \parallel BC$. Dokažite da je $MN \parallel CD$.

Rješenje. Promatramo proporcije s obzirom na točku O presjeka dijagonala.



Iz sličnosti trokuta OBM i ODA:

$$\frac{|OM|}{|OB|} = \frac{|OA|}{|OD|}.$$

Iz sličnosti trokuta ONA i OBC:

$$\frac{|ON|}{|OA|} = \frac{|OB|}{|OC|}.$$

Odavde slijedi

$$\frac{|OM|}{|ON|} = \frac{|OA| \cdot |OB|}{|OD|} \cdot \frac{|OC|}{|OA| \cdot |OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}.$$

Zaključujemo da su trokuti OMN i OCD slični, pa je $MN \parallel CD$.

Zadatak 2B-5. Dokažite da za pozitivne brojeve a, b, c vrijede nejednakosti:

a)

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$

b)

$$\frac{ab + c^2}{a + b} + \frac{bc + a^2}{b + c} + \frac{ca + b^2}{c + a} \geq a + b + c.$$

Rješenje. **a)** Tražena nejednakost je redom ekvivalentna sa sljedećim nejednakostima:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0,$$
$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0,$$

a ova posljednja ispunjena je za sve realne brojeve a, b, c. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

b) Dokažimo da je razlika lijeve i desne strane nejednadžbe nenegativna.

$$\begin{aligned}
&\frac{ab + c^2}{a + b} - c + \frac{bc + a^2}{b + c} - a + \frac{ca + b^2}{c + a} - b \\
&\qquad = \frac{c^2 + ab - ac - bc}{a + b} + \frac{a^2 + bc - ab - ac}{b + c} + \frac{b^2 + ac - ab - bc}{c + a} \\
&\qquad = \frac{(c - a)(c - b)}{a + b} + \frac{(a - b)(a - c)}{b + c} + \frac{(b - a)(b - c)}{c + a} \\
&\qquad = \frac{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2) + (a^2 - b^2)(a^2 - c^2) + (b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{(a + b)(b + c)(c + a)} \\
&\qquad = \frac{a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2}{(a + b)(b + c)(c + a)} \geq 0 \qquad \text{(prema a))}.
\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija,
3. svibnja 2007.

Rješenja

Zadatak 3B-1. a) Dokažite da vrijedi

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(60^\circ + x\right) \cdot \operatorname{tg}\left(60^\circ - x\right).$$

b) Izračunajte

$$\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ.$$

Rješenje. a) Primjenjujemo adicijski teorem za tangens:

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(2x + x) = \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{\dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}}$$

$$= \frac{\dfrac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}}{\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}$$

S druge strane, vrijedi:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(60^\circ + x\right) \cdot \operatorname{tg}\left(60^\circ - x\right) &= \operatorname{tg} x \cdot \frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} x} \cdot \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} x} \\
&= \operatorname{tg} x \cdot \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x} \cdot \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} x}{1 + \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x} \\
&= \operatorname{tg} x \cdot \frac{3 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}.
\end{aligned}$$

Iz jednakosti desnih strana slijedi istinitost zadane tvrdnje.

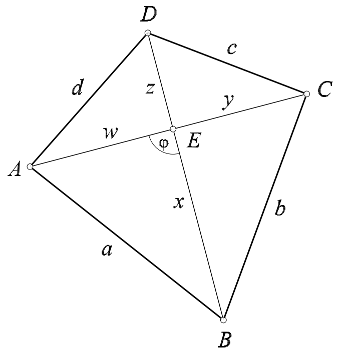
b) Ako u jednakost dokazanu pod a) stavimo $x = 20^\circ$, onda dobijemo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} 60^\circ &= \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \ / \ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \\
\operatorname{tg}^2 60^\circ &= \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ \\
3 &= \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ.
\end{aligned}$$

Zadatak 3B-2. Ako su u konveksnom četverokutu jednaki zbrojevi kvadrata duljina suprotnih stranica, dokažite da su mu dijagonale okomite.

Rješenje.

Označimo dijelove četverokuta prema slici:



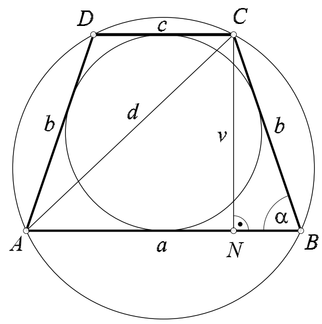
Primjenom kosinusovog poučka u svakom od četiri trokuta na koje dijagonale dijele zadani četverokut dobivamo:

$$\begin{aligned}
&a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \\
&w^2 + x^2 - 2wx\cos\varphi + z^2 + y^2 - 2zy\cos\varphi \\
&\qquad = x^2 + y^2 - 2xy\cos(\pi - \varphi) + z^2 + w^2 - 2zw\cos(\pi - \varphi) \\
&2\cos\varphi \cdot (wx + zy) = 2\cos(\pi - \varphi) \cdot (xy + zw) \\
&(wz + zy + xy + zw)\cos\varphi = 0 \implies \varphi = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Dakle, dijagonale se sijeku pod pravim kutom.

Zadatak 3B-3. Trapezu $ABCD$ je opisana i upisana kružnica. Omjer visine trapeza i polumjera opisane kružnice je $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Odredite kutove trapeza.

Rješenje. Trapez je tetivni, pa mora biti jednakokračni. Nacrtajmo sliku:



Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a > c$, pa je kut α šiljasti.

Trapez je tangencijalni, pa vrijedi $a + c = 2b$, odnosno $b = \frac{a+c}{2}$.

N je nožište visine spuštene iz vrha C. Onda je $|NB| = \frac{a-c}{2}$, $|AN| = \frac{a+c}{2}$, pa dobivamo $|AN| = b$. Zato za visinu trapeza vrijedi

$$v^2 = b^2 - |NB|^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = ac.$$

Dijagonalu d možemo izračunati na dva načina. Iz pravokutnog trokuta ANC dobivamo:

$$d^2 = |AN|^2 + v^2 = b^2 + v^2 = \frac{v^2}{\sin^2\alpha} + v^2.$$

Drugi prikaz slijedi iz trokuta ABC kojem je d stranica a R polumjer opisane kružnice:

$$d = 2R\sin\alpha.$$

Tako dobivamo

$$4R^2\sin^2\alpha = \frac{v^2}{\sin^2\alpha} + v^2.$$

Podijelimo s R^2 i iskoristimo zadani uvjet:

$$4\sin^2\alpha = \frac{v^2}{R^2}\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + 1\right) = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right).$$

Sredimo ovu jednadžbu i izračunajmo α:

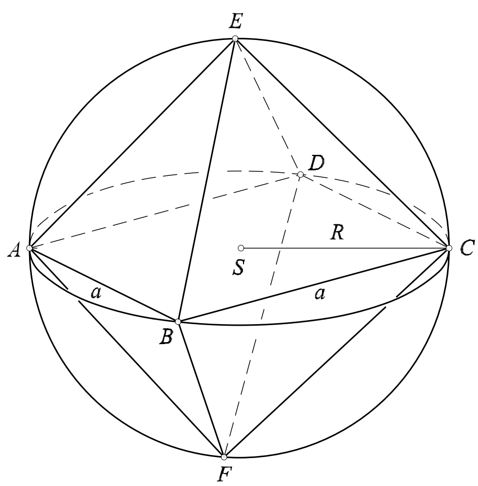
$$4\sin^2\alpha = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right) \Big/ \cdot \frac{3}{2}\sin^2\alpha,$$
$$6\sin^4\alpha = \sin^2\alpha + 1,$$
$$6\sin^4\alpha - \sin^2\alpha - 1 = 0 \implies (\sin^2\alpha)_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{12}$$
$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2} \implies \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

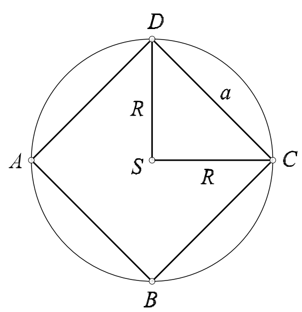
Dobili smo: $\alpha = 45^\circ$. Preostali su kutovi 135°; 135° i 45°.

Zadatak 3B-4. Pravilni oktaedar je tijelo sastavljeno od dvije pravilne četverostrane piramide sa zajedničkom osnovkom i preostala dva vrha simetrična s obzirom na ravninu te osnovke, takvo da svih 12 bridova imaju jednake duljine.

Odredite omjer volumena opisane i upisane kugle pravilnom oktaedru.

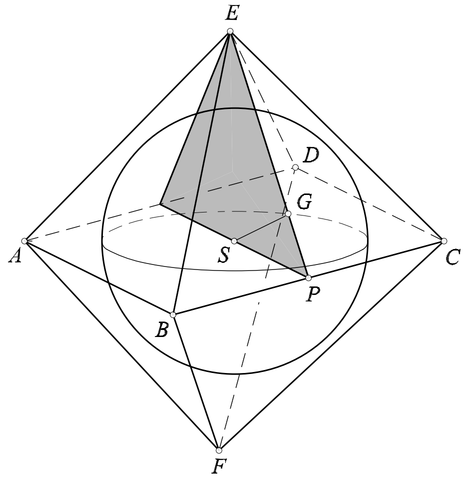
Rješenje.

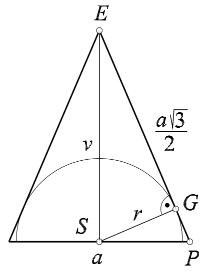




Označimo polumjer veće kugle s R, stranicu oktaedra s a i polumjer manje kugle s r. Računamo:

$$a = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$$





Iz trokuta SPE računamo

$$v = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\frac{\sqrt{2}}{2},$$

gdje je $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ visina trokuta BCE. Trokut GSE sličan je trokutu SPE pa je

$$\frac{r}{v} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \implies r = \frac{v}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot 2} \cdot R \cdot \sqrt{2} = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Omjer volumena opisane i upisane kugle pravilnom oktaedru je

$$\left(\frac{R}{r}\right)^3 = 3\sqrt{3}.$$

Zadatak 3B-5. Dokažite da za sve proste brojeve $p > 3$ broj $p^2 + 11$ ima više od šest različitih prirodnih djelitelja (računajući 1 i samog sebe).

Rješenje. Utvrdit ćemo da je za $p > 3$ broj $p^2 + 11$ djeljiv s 12. Broj 12 ima 6 različitih djelitelja: 1, 2, 3, 4, 6 i 12. Kako je $p^2 + 11 > 12$, time će tvrdnja biti dokazana.

Uočimo da je $p^2 + 11 = p^2 - 1 + 12 = (p-1)(p+1) + 12$. Od tri uzastopna broja $p - 1, p, p + 1$, jedan mora biti djeljiv s 3. To svakako nije prost broj p, već jedan od brojeva $p - 1$ ili $p + 1$. Osim toga, broj p je neparan, pa su $p - 1$ i $p + 1$ dva uzastopna parna broja. Zato je jedan od njih sigurno djeljiv s 4, a drugi je djeljiv s 2.

Prema tome je $(p - 1)(p + 1)$ djeljiv s 24. Zato je $p^2 + 11$ djeljiv s 12.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija,
3. svibnja 2007.

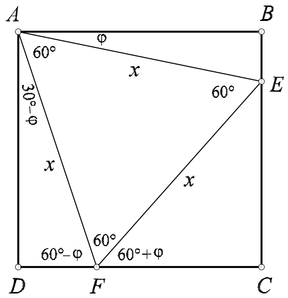
Rješenja

Zadatak 4B-1. U pravokutniku $ABCD$ zadane su točka E na stranici $\overline{BC}$ i točka F na stranici $\overline{CD}$. Ako je trokut AEF jednakostraničan, dokažite da je da je

$$P_{\triangle ECF} = P_{\triangle ABE} + P_{\triangle AFD}.$$

Rješenje.

Neka je x duljina stranice trokuta, a φ kut $\measuredangle BAE$.



Površine trokuta su:

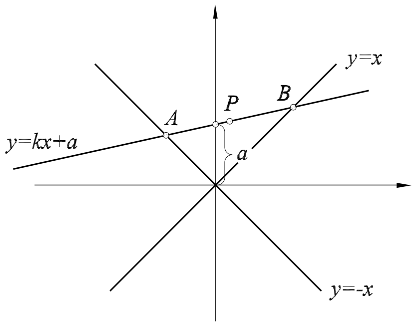
$$\begin{aligned}
P_{\triangle ABE} &= \frac{x\cos\varphi \cdot x\sin\varphi}{2} = \frac{x^2}{4}\sin 2\varphi \\
P_{\triangle AFD} &= \frac{x\cos(30^\circ-\varphi)\cdot x\sin(30^\circ-\varphi)}{2} = \frac{x^2}{4}\sin(60^\circ-2\varphi) \\
P_{\triangle ECF} &= \frac{x\cos(60^\circ-\varphi)\cdot x\sin(60^\circ-\varphi)}{2} = \frac{x^2}{4}\sin(120^\circ-2\varphi)
\end{aligned}$$

Adicijski teoremi:

$$\begin{aligned}
P_{\triangle ECF} &= \frac{x^2}{4}(\sin 120^\circ \cos 2\varphi - \cos 120^\circ \sin 2\varphi) \\
&= \frac{x^2}{4}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big) \\
P_{\triangle ABE} + P_{\triangle AFD} &= \frac{x^2}{4}(\sin 60^\circ \cos 2\varphi - \cos 60^\circ \sin 2\varphi + \sin 2\varphi) \\
&= \frac{x^2}{4}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big) = P_{\triangle ECF}
\end{aligned}$$

Zadatak 4B-2. Pravac kroz $(0, a)$ siječe simetrale kvadranata koordinatnog sustava u točkama A i B. Pokažite da polovište dužine AB leže na hiperboli. Odredite jednadžbu i koordinate središta te hiperbole.

Rješenje.



Odredimo sjecišta pravaca $y = -x$ i $y = x$ s pravcem $y = kx + a$ koji prolazi točkom $(0, a)$:

$$\begin{array}{llll} \text{I.} & -x = kx + a & \text{II.} & x = kx + a \\ & (-k-1)x = a & & (1-k)x = a \\ & x_A = \dfrac{-a}{k+1} & & x_B = \dfrac{a}{1-k} \\ & y_A = \dfrac{a}{k+1} & & y_B = \dfrac{a}{1-k} \end{array}$$

Koordinate polovišta su:

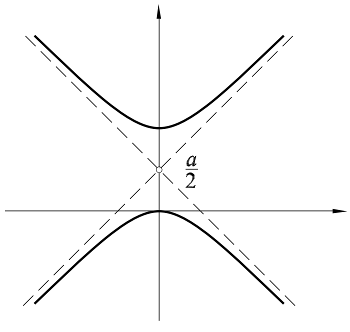
$$x = \frac{-a + ak + ak + a}{2(1-k^2)} = \frac{ak}{1-k^2},$$
$$y = \frac{a - ak + ak + a}{2(1-k^2)} = \frac{a}{1-k^2}.$$

Iz ovih jednadžbi trebamo eliminirati k. Dijeljenjem dobivamo $k = \dfrac{x}{y}$ pa imamo $y = \dfrac{a}{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}$.

Nakon sređivanja dobivamo $y^2 - x^2 = ay$, odnosno

$$\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 - x^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Točke P opisuju ovu hiperbolu. Koordinate središta hiperbole su $\left(0, \dfrac{a}{2}\right)$.



Zadatak 4B-3. Dokažite da je najveći koeficijent u razvoju $(a+b)^{2n}$ paran broj.

Rješenje. Dokažimo najprije da najveći koeficijent u binomnom razvoju izraza $(a+b)^{2n}$ iznosi $\binom{2n}{n}$. Omjer dva uzastopna koeficijenta iznosi

$$\binom{2n}{k-1} \Big/ \binom{2n}{k} = \frac{(2n)\cdots(2n-k+2)}{(k-1)!} \cdot \frac{k!}{(2n)\cdots(2n-k+1)} = \frac{k}{2n-k+1}.$$

Taj je omjer manji od 1 onda i samo onda kad je

$$k < 2n-k+1 \iff k < n+\tfrac{1}{2}.$$

Prema tome, najveći koeficijent će se dobiti za $k=n$.

Sada treba pokazati da je $\binom{2n}{n}$ paran broj.

Binomni koeficijent jednak je zbroju koeficijenata koji mu prethode u Pascalovom trokutu:

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} &= \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n} \\ &= \binom{2n-1}{2n-1-(n-1)} + \binom{2n-1}{n} \\ &= \binom{2n-1}{n} + \binom{2n-1}{n} \\ &= 2\cdot\binom{2n-1}{n}\end{aligned}$$

pa je doista $\binom{2n}{n}$ paran broj.

Zadatak 4B-4. Zbroj nekoliko uzastopnih prirodnih brojeva jednak je 1000. Nađite sve takve nizove.

Rješenje. Neka je traženi niz $k+1, k+2, \ldots, n-1, n$. Zbroj ovih brojeva jednak je zbroju prvih n brojeva umanjenom za zbroj prvih k brojeva i treba iznositi 1000.

$$\begin{aligned}&\frac{n(n+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} = 1000 \\ &n^2+n-k^2-k = 2000 \\ &(n-k)(n+k)+(n-k) = 2000 \\ &(n-k)(n+k+1) = 2000 \\ &(n-k)(n+k+1) = 2^4\cdot 5^3\end{aligned}$$

Vrijedi $n+k+1 > n-k$. Nadalje ova dva broja su različite parnosti, jer im je zbroj neparan: $(n-k)+(n+k+1) = 2n+1$. Ovim uvjetima odgovaraju sljedeće faktorizacije broja 2000:

$$1\cdot 2000, \quad 5\cdot 400, \quad 25\cdot 80, \quad 16\cdot 125.$$

Promotrimo ova četiri slučaja:

1)
$$\begin{array}{l} n+k+1=2000 \\ \underline{n-k=1 \qquad\qquad} \\ n=k+1 \\ k+1+k+1=2000 \\ k=999,\ n=1000. \end{array}$$

Dobili smo trivijalni niz: 1000.

2)
$$\begin{array}{l} n+k+1=400 \\ \underline{n-k=5 \qquad\qquad} \\ n=k+5 \\ k+5+k+1=400 \\ k=197,\ n=202. \end{array}$$

Niz: 198, 199, 200, 201, 202.

3)
$$\begin{array}{l} n+k+1=80 \\ \underline{n-k=25 \qquad\qquad} \\ n=k+25 \\ k+25+k+1=80 \\ k=27,\ n=52. \end{array}$$

Niz: 28, 29, 30,. . . , 52.

4)
$$\begin{array}{l} n+k+1=125 \\ \underline{n-k=16 \qquad\qquad} \\ n=k+16 \\ k+16+k+1=125 \\ k=54,\ n=70. \end{array}$$

Niz: 55, 56, 57,. . . , 70.

Zadatak 4B-5. Ako su a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1} uzastopni članovi aritmetičkog niza, dokažite da je

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

Rješenje. *Prvi način.*

Neka je traženi zbroj jednak S. Kako je

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\ldots=a_{n+1}-a_n=d$$

onda množenjem traženog zbroja s d imamo:

$$\begin{aligned}
S\cdot d &= \frac{d}{a_1a_2}+\frac{d}{a_2a_3}+\frac{d}{a_3a_4}+\ldots+\frac{d}{a_na_{n+1}}\\
&=\frac{a_2-a_1}{a_1a_2}+\frac{a_3-a_2}{a_2a_3}+\frac{a_4-a_3}{a_3a_4}+\ldots+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}}\\
&=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}+\ldots+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\\
&=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1\cdot a_{n+1}}\\
&=\frac{a_1+nd-a_1}{a_1\cdot a_{n+1}}=\frac{nd}{a_1\cdot a_{n+1}}
\end{aligned}$$

odakle slijedi tvrdnja.

Drugi način.

Neka je d razlika aritmetičkog niza. Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom.

Tvrdnja očito vrijedi za $n=1$.

Pretpostavimo da za neki $n\in\mathbf{N}$ vrijedi

$$S_n=\frac{1}{a_1\cdot a_2}+\frac{1}{a_2\cdot a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{n}{a_1\cdot a_{n+1}}.$$

Tada je

$$\begin{aligned}
S_{n+1}&=S_n+\frac{1}{a_{n+1}\cdot a_{n+2}}=\frac{n}{a_1\cdot a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+1}\cdot a_{n+2}}\\
&=\frac{na_{n+2}+a_1}{a_1\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}}=\frac{n(a_{n+1}+d)+a_1}{a_1\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}}=\frac{na_{n+1}+a_1+nd}{a_1\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}}\\
&=\frac{na_{n+1}+a_{n+1}}{a_1\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}}=\frac{n+1}{a_1\cdot a_{n+2}}.
\end{aligned}$$