RJEŠENJA ZADATAKA ZA 4. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prva je vjeverica prikupila

   84 + 78 + 96 + 65 = 323 oraha. . . . . 4 boda

   Druga je vjeverica prikupila

   3 · (78 + 96) = 3 · 174 = 522 oraha.. . . . . 5 bodova

   Te su dvije vjeverice prikupile

   323 + 522 = 845 oraha. . . . . 1 bod

. . . . .UKUPNO 10 BODOVA

2. Mirna i Tina sada imaju zajedno 7 + 2 · 7 = 7 + 14 = 21 godinu . . . . 5 bodova

   Za 7 godina Mirna i Tina će zajedno imati

   21 + 2 · 7 = 21 + 14 = 35 godina . . . . 5 bodova

. . . . .UKUPNO 10 BODOVA

3. a)

$$\begin{array}{rcccccc} & 3 & \boxed{7} & 5 & 3 & \boxed{4} & 6 \\ + & \boxed{1} & 4 & 5 & \boxed{9} & 7 & \boxed{4} \\ \hline & 5 & 2 & \boxed{1} & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

. . . . . 2 boda

b)

$$\begin{array}{rcccccc} & 6 & \boxed{0} & 5 & \boxed{4} & 7 & 0 \\ - & 3 & 2 & \boxed{6} & 4 & 8 & \boxed{1} \\ \hline & \boxed{2} & 7 & 8 & 9 & \boxed{8} & 9 \end{array}$$

. . . . 2 boda

c)

$$\begin{array}{c} \boxed{1}\ 3\ \boxed{6} \cdot \boxed{6} \\ \hline 8\ 1\ 6 \end{array}$$

. . . . 3 boda

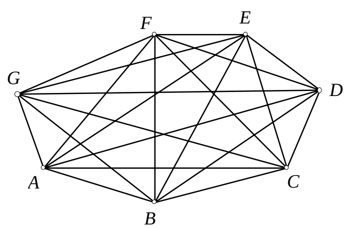
d)

$$\begin{array}{c} \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6} \cdot 5 \\ \hline 2\ 2\ 8\ 0 \end{array}$$

. . . . 3 boda

. . . . .UKUPNO 10 BODOVA

4. Slika: . . . . 3 boda



Tražene dužine su: $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{AF}, \overline{AG}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{BF}, \overline{BG},$

$\overline{CD}, \overline{CE}, \overline{CF}, \overline{CG}, \overline{DE}, \overline{DF}, \overline{DG}, \overline{EF}, \overline{EG}, \overline{FG}$ . . . . 6 bodova

Ukupno ima 21 dužina. . . . . 1 bod

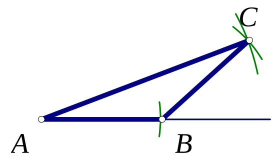
Napomene:

1. Raspored točaka u ravnini nije važan za rješenje zadatka (istom pravcu mogu pripadati tri ili više točaka).
2. Za 7 ispravno dobivenih dužina dobivaju se 2 boda.
3. Za 4 ispravno navedene dužine dobiva se 1 bod.

. . . . .UKUPNO 10 BODOVA

5. a)

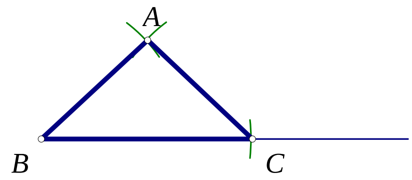
$o = a + b + c$
$76 = 19 + 37 + c$
$76 = 56 + c$
$c = 76 - 56$
$c = 20$



Duljina stranice c je 20 mm. . . . . 3 boda

b)

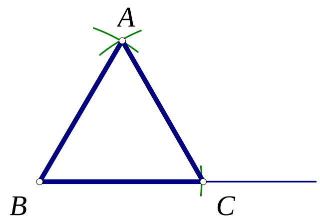
$o = a + 2 \cdot b$
$83 = a + 2 \cdot 24$
$83 = a + 48$
$a = 83 - 48$
$a = 35$



Duljina osnovice a je 35 mm. . . . . 4 boda

c)

$o = 3 \cdot a$
$81 = 3 \cdot a$
$a = 81 : 3$
$a = 27$



Duljina stranice a je 27 mm. . . . . 3 boda

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

RJEŠENJA ZA 5. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

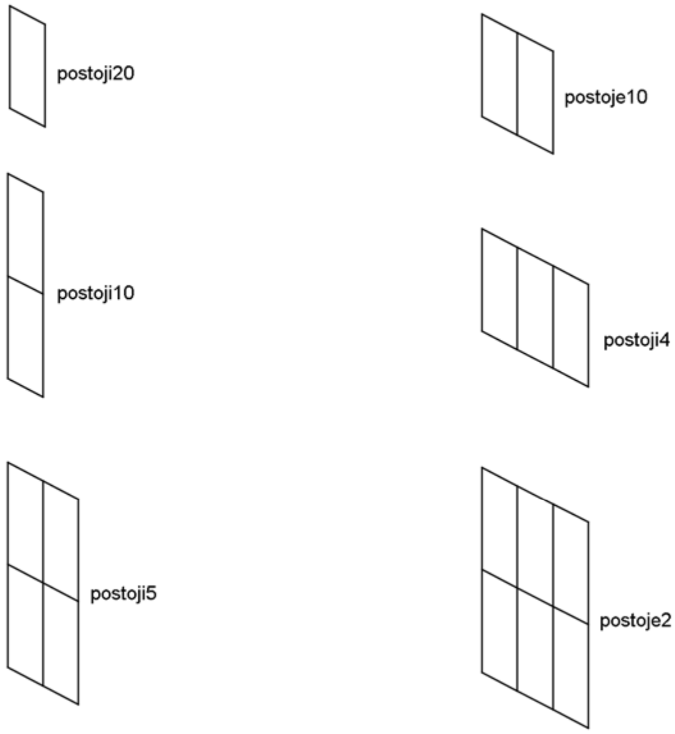
1. Vrijednost novčanica u kasici je $9 \cdot 100+9 \cdot 50+9 \cdot 25+9 \cdot 10+9 \cdot 1=1674$ kn. 2 boda
   Vrijednost kovanica u kasici je $10 \cdot 10+10 \cdot 20+10 \cdot 50=800$ lp odnosno 8 kn. 2 boda
   Dakle, Maja je u kasici imala 1674+8=1682 kn. 2 boda
   Novčana potraživanja pred Majom iznose $372+259+143+11+2 \cdot 448=1681$ kn. 2 boda
   Kako je 1682>1681, Maja će imati dovoljno novaca. 2 boda
   ……………………………………………………………………UKUPNO 10 BODOVA

2. Uz primjenu svojstva distributivnosti množenja prema zbrajanju odnosno distributivnosti množenja prema oduzimanju slijedi
   $5 \cdot (31 \cdot 2 \cdot 44 + 38 \cdot 2 \cdot 22) + 11 \cdot (4 \cdot 117 - 17 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 4 + 11 \cdot 7 \cdot (31 \cdot 2 + 2 \cdot 69) =$
   $= 5 \cdot (62 \cdot 44 + 38 \cdot 44) + 11 \cdot (4 \cdot 117 - 17 \cdot 4) \cdot 4 + 11 \cdot 7 \cdot 2 \cdot (31 + 69) =$
   $= 5 \cdot (62 + 38) \cdot 44 + 11 \cdot 4 \cdot (117 - 17) \cdot 4 + 11 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 100 =$ 4 boda
   $= 5 \cdot 100 \cdot 44 + 11 \cdot 16 \cdot 100 + 11 \cdot 14 \cdot 100 =$
   $= 5 \cdot 100 \cdot 44 + 11 \cdot (16 + 14) \cdot 100 =$ 4 boda
   $= 5 \cdot 100 \cdot 4 \cdot 11 + 11 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 100 =$
   $= 5 \cdot 100 \cdot 11 \cdot (4 + 6) =$
   $=55000$ 2 boda
   ……………………………………………………………………UKUPNO 10 BODOVA

3. Zajednički djelitelji brojeva 144 i 66 su 1,2,3 i 6. 2 boda
   Postoje slijedeće mogućnosti:
   a) 1 grupa sa 144 učenika i 66 lopti po grupi,
   b) 2 grupe s po 72 učenika i 33 lopte po grupi,
   c) 3 grupe s po 48 učenika i 22 lopte po grupi,
   d) 6 grupa s po 24 učenika i 11 lopti po grupi. 6 bodova
   Najviše takvih grupa može biti 6. 2 boda
   ……………………………………………………………………UKUPNO 10 BODOVA

4. Tražene dužine su $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{AF}, \overline{AG}, \overline{AH}$, 2 boda
   $\overline{BC}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{BF}, \overline{BG}, \overline{BH}$, 2 boda
   $\overline{CD}, \overline{CE}, \overline{CF}, \overline{CG}, \overline{CH}$, 2 boda
   $\overline{DE}, \overline{DF}, \overline{DG}, \overline{DH}$, 2 boda
   $\overline{EF}, \overline{EG}, \overline{EH}$, 1 bod
   $\overline{FG}, \overline{FH}$,
   $\overline{GH}$. 1 bod
   ……………………………………………………………………UKUPNO 10 BODOVA

5. Uočavamo paralelograme slijedećih oblika:



Ukupan broj paralelograma je 51.

………………………………………………………………………..UKUPNO 10 BODOVA

RJEŠENJA ZADATAKA ZA 6. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1.

$$\frac{3\frac{1}{3}\cdot 1.9+19.5:4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-0.16}:\frac{3.5+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}}{0.5\cdot\left(1\frac{1}{20}+4.1\right)}=\frac{\frac{10}{3}\cdot\frac{19}{10}+\frac{39}{2}:\frac{9}{2}}{\frac{62}{75}-\frac{4}{25}}:\frac{\frac{7}{2}+\frac{14}{3}+\frac{32}{15}}{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{21}{20}+\frac{41}{10}\right)}= \text{................ 2 boda}$$

$$=\frac{\frac{19}{3}+\frac{39}{2}\cdot\frac{2}{9}}{\frac{62-12}{75}}:\frac{\frac{105+140+64}{30}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{21+82}{20}}= \text{................ 3 boda}$$

$$=\frac{\frac{19}{3}+\frac{13}{3}}{\frac{50}{75}}:\frac{\frac{309}{30}}{\frac{103}{40}}= \text{......................... 2 boda}$$

$$=\frac{\frac{32}{3}}{\frac{2}{3}}:\frac{1}{\frac{1}{4}}= \text{................................ 2 boda}$$

$= 16 : 4 = 4$ . . . . 1 bod

. . . . .UKUPNO 10 BODOVA

2. MOŽE.

U prvom vaganju brašno se raspolovi, tj. 4.5 kg + 4.5 kg, ...2 boda

u drugom vaganju raspolovi se jedna od polovina, tj. 2.25 kg + 2.25 kg, ... 2 boda

u trećem vaganju se na jednu stranu vage dodaju utezi, 0.200 kg + 0.050 kg = 0.25 kg, i izdvoji dio brašna dok opet vaga ne bude u ravnoteži. . . . . .5 bodova

Sad je na strani vage gdje su utezi točno 2 kg brašna . . . . .1 bod

. . . . .UKUPNO 10 BODOVA

3. Prvi radnik za 1 sat napravi $\frac{1}{6}$ norme, drugi radnik za 1 sat napravi $\frac{1}{5}$ norme, a treći radnik za 1 sat napravi $\frac{1}{4.5}=\frac{2}{9}$ norme . . . . 3 boda

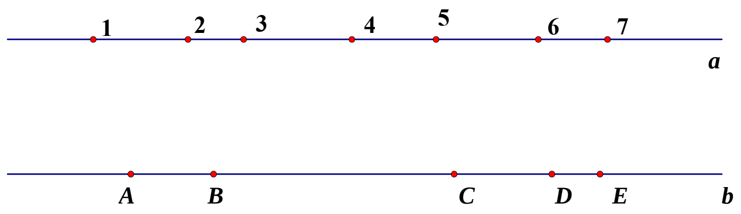
Zajedno za 1 sat naprave $\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{2}{9}=\frac{53}{90}$ norme. . . . . 2 boda

To znači da je $\frac{53}{90}$ norme 848 predmeta, tj. da je norma $848\cdot\frac{90}{53}$ = 1 440 predmeta. . . . .2 boda

Prvi radnik u 1 satu napravi 1440 : 6 = 240 predmeta, drugi 1440 : 5 = 288 predmeta,
a treći 1440 : 4.5 = 320 predmeta. . . . . 3 boda

. . . . .UKUPNO 10 BODOVA

4.



Treba zaključiti da sve dužine na jednom pravcu i vrhovi na drugom (i obratno) određuju tražene trokute.

1 bod

Na pravcu *a* nalazi se 7 točaka, koje određuju 21 dužinu (12, 13, 14, 15, 16, 17, 23, 24, 25, 26, 27, 34, 35, 36, 37, 45, 46, 47, 56, 57, 67) . . . . 2 boda

Ta 21 dužina pravca *a* s 5 točaka pravca *b* određuje 105 trokuta ($21 \cdot 5 = 105$) . . . . 2 boda

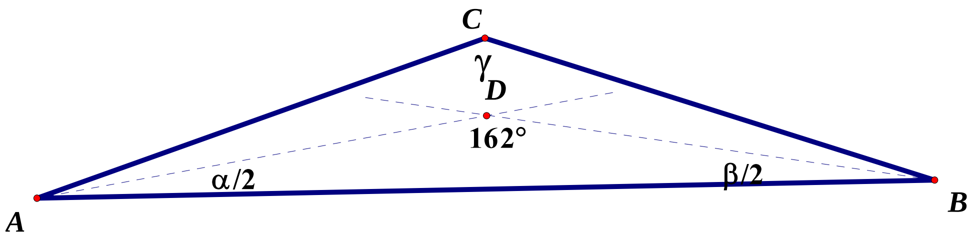
Na pravcu *b* nalazi se 5 točaka, koje određuju 10 dužina (AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE) . . . . .2 boda

Tih 10 dužina pravca *b* sa 7 točaka pravca *a* određuje 70 trokuta ($10 \cdot 7 = 70$) . . . . .2 boda

Ukupno je $105 + 70 = 175$ trokuta . . . . .1 bod

. . . . .UKUPNO 10 BODOVA

5. Slika . . . . 2 boda



Δ ABD

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+162^\circ = 180^\circ$$ . . . . .2 boda

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=18^\circ$$ . . . . 2 boda

$$\alpha+\beta=36^\circ$$ . . . . .1 bod

Δ ABC

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$$ . . . . 1 bod

$$36^\circ + \gamma = 180^\circ$$ . . . . .1 bod

$$\gamma = 144^\circ$$ . . . . .1 bod

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

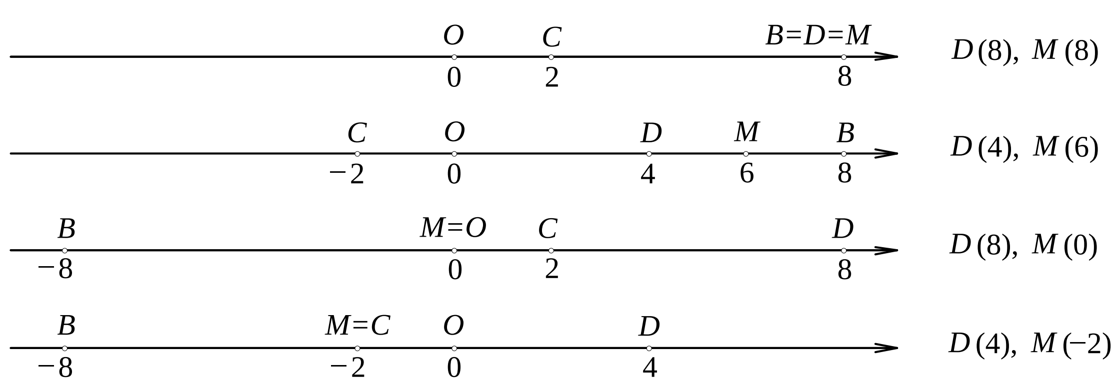
OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Iz uvjeta $\overline{abc} : c = \overline{bc}$ slijedi da je $\overline{abc} = c \cdot \overline{bc}$, odakle dobivamo da znamenka c može poprimiti sljedeće tri vrijednosti: $c = 1$, $c = 5$ i $c = 6$. 3 BODA
Ako je $c = 1$ slijedi da je $\overline{ab1} = \overline{b1}$, što ne može biti jer je lijeva strana troznamenkast, a desna strana dvoznamenkast broj. 1 BOD
Ako je $c = 5$ slijedi da je $100a + 10b + 5 = 5(10b + 5)$ odnosno nakon sređivanja $5a = 2b + 1$. 2 BODA
Ispitivanjem svih mogućnosti vidimo da prethodna jednadžba ima rješenje za $a = 1$ i $a = 3$.
Ako je $a = 1$, onda je $b = 2$, a ako je $a = 3$, onda je $b = 7$. 2 BODA
Preostaje jos razmotriti slučaj kada je $c = 6$. Iz uvjeta zadatka slijedi jednakost
$100a + 10b + 6 = 6(10b + 6)$, odnosno nakon sređivanja $10a - 5b = 3$.
Ta jednadžba očito nema rješenja jer je lijeva strana jednadžbe djeljiva s 5, a desna nije. 2 BODA
Dakle imamo dva rješenja: $a = 1$, $b = 2$, $c = 5$ i $a = 3$, $b = 7$ i $c = 5$.
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka je x količina zlata čistoće 0.45 koju treba uzeti da se dobije 180 g zlata čistoće 0.65.
Od te količine dobiva se $0.45x$ g čistog zlata. 2 BODA
Sada, od zlata čistoće 0.75 treba uzeti $(180 - x)$ g koje sadrži $0.75(180 - x) = 135 - 0.75x$ g čistog zlata. 2 BODA
Kako treba dobiti 180 g zlata čistoće 0.65, vrijedi jednadžba $0.45x + 135 - 0.75x = 0.65 \cdot 180$,
odnosno $-0.3x = -18$, čije je rješenje $x = 60$. 4 BODA
Prema tome, treba uzeti 60 g zlata čistoće 0.45 i $180 - 60 = 120$ g zlata čistoće 0.75,
da bi se dobilo 180 g zlata čistoće 0.65. 2 BODA
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

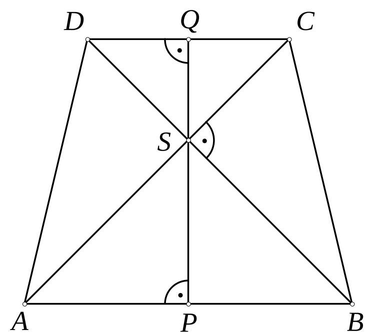
3. Prvog je dana u trgovini prodano 10% ukupne količine brašna, odnosno $0.1 \cdot 5600 = 560$ kg brašna. 2 BODA
Drugog je dana prodano $\frac{1}{3}$ ostatka, odnosno $\frac{1}{3}(5600 - 560) = 1680$ kg brašna. 2 BODA
Ostatak od $5600 - 560 - 1680 = 3360$ kg treba razdijeliti u dvije prodavaonice u omjeru $0.2 : \frac{4}{25} = 5 : 4$. 2 BODA
Prema tome, jedna prodavaonica dobiva $\frac{5}{9}$, a druga $\frac{4}{9}$ ostatka. 2 BODA
Konačno, jedna je prodavaonica dobila $\frac{5}{9} \cdot 3360 = 1866\frac{2}{3}$ kg, a druga $\frac{4}{9} \cdot 3360 = 1493\frac{1}{3}$ kg brašna. 2 BODA
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4. Kako je $|OB| = 8$ točka B može imati koordinate 8 i -8, a točka C koordinate 2 i -2,
pa imamo sljedeća četiri slučaja. 2 BODA



Svaki točno riješeni slučaj nosi po 2 boda. 8 BODOVA
. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5. SKICA:



1 BOD

Neka je točka S sjecište dijagonala trapeza. Duljina h visine trapeza jednaka je zbroju duljina visina trokuta ABS i CDS iz vrha S na osnovice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. 1 BOD

Sada, kako je trapez jednakokračan i budući da se dijagonale sijeku pod pravim kutem, slijedi da su trokuti ABS i CDS jednakokračni pravokutni pa je $\sphericalangle SAB = \sphericalangle SBA = 45°$ i $\sphericalangle SCD = \sphericalangle SDC = 45°$. 2 BODA

Zbog toga je $\sphericalangle ASP = \sphericalangle BSP = 45°$ i $\sphericalangle CSQ = \sphericalangle DSQ = 45°$, pa su trokuti APS i SQD jednakokračni pravokutni, pri čemu su P i Q nožišta visina povučenih iz točke S na osnovice trapeza. 2 BODA

Zbog toga je $|PS| = |AP| = \dfrac{|AB|}{2}$ i $|QS| = |CQ| = \dfrac{|CD|}{2}$ 2 BODA

Konačno, $|PQ| = \dfrac{|AB|}{2} + \dfrac{|CD|}{2} = \dfrac{5+3}{2} = 4\,\text{cm}$ 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Racionalizacijom nazivnika u prva dva člana izraza dobivamo:
$\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$ i $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$. 4 BODA

Nadalje, vrijedi $\frac{\sqrt{1.5}-\sqrt{3.5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}$. 3 BODA

Konačno $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}=\frac{2\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$. 3 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

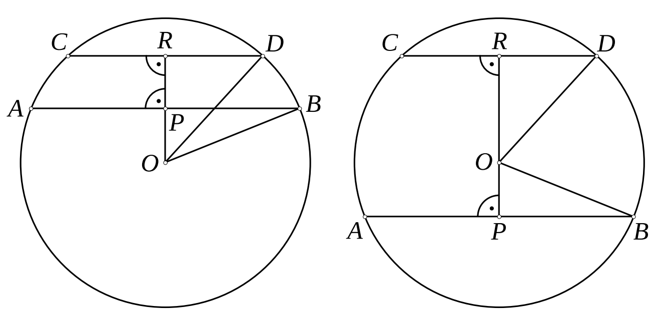
2. Iz uvjeta zadatka slijedi da je $a+b+(a+b)^2=10a+b$, odnosno $(a+b)^2=9a$. 2 BODA
Iz prethodne jednakosti slijedi da je $9a$ potpun kvadrat, odnosno znamenka a mora biti potpun kvadrat, pa znamenka a može poprimiti samo tri vrijednosti $a=1$, $a=4$ i $a=9$. 2 BODA
Ako je $a=1$, onda je $(a+b)^2=9$, tj. $a+b=3$, $b=2$, pa je broj 12 rješenje. 2 BODA
Ako je $a=4$, onda je $(a+b)^2=36$, tj. $a+b=6$, $b=2$, pa je broj 42 rješenje. 2 BODA
Ako je $a=9$, onda je $(a+b)^2=81$, tj. $a+b=9$, $b=0$, pa je broj 90 rješenje. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. Kvadriramo li jednakost $x+y=15$, dobivamo $x^2+2xy+y^2=225$.
Kako je $x^2+y^2=117$, slijedi da je $2xy=225-117=108$. 3 BODA
Nadalje, imamo da je $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2=117-108=9$, pa je $x-y=3$ ili $x-y=-3$. 3 BODA
Rješenje sustava $x+y=15$, $x-y=3$ je $x=9$ i $y=6$. 2 BODA
Rješenje sustava $x+y=15$, $x-y=-3$ je $x=6$ i $y=9$. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4. Istaknimo dijametar kružnice koji je okomit na tetive $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Neka su P i R točke presjeka tog dijametra sa tetivama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ redom. Vidimo da imamo dva slučaja u ovisnosti o tome da li se točke P i R nalaze s iste ili sa različitih strana središta O kružnice, što vidimo na sljedećoj slici:

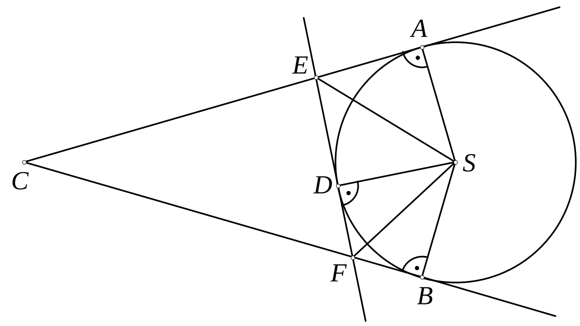


2 BODA

Kako su točke P i R polovišta tetiva $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ redom, iz Pitagorinog poučka slijedi da je
$|OP|=\sqrt{|OB|^2-|PB|^2}=\sqrt{169-144}=\sqrt{25}=5$ i $|OR|=\sqrt{|OD|^2-|RD|^2}=\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12$. 4 BODA
U prvom slučaju udaljenost tetiva je $|PR|=|OR|-|OP|=12-5=7\,\text{cm}$. 2 BODA
U drugom slučaju udaljenost tetiva je $|PR|=|OR|+|OP|=12+5=17\,\text{cm}$. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5. SKICA



1 BOD

Pokažimo prvo da su trokuti SAE i SED sukladni. Sukladnost tih trokuta slijedi iz činjenice da im je stranica $\overline{SE}$ zajednička, te zbog $\overline{SA} = \overline{SD}$ i $\sphericalangle SAE = \sphericalangle SDE$. 3 BODA

Iz dokazane sukladnosti slijedi da je $|AE| = |DE|$. 1 BOD

Analogno se pokazuje da su trokuti SDF i SFB sukladni, pa iz te sukladnosti također slijedi da je $|BF| = |DF|$. 2 BODA

Konačno, za opseg trokuta CFE vrijedi

$$
\begin{aligned}
|CE| + |EF| + |CF| &= |CE| + |ED| + |DF| + |CF| \\
&= |CE| + |AE| + |BF| + |CF| = |AC| + |BC| \\
&= 27 + 27 = 54\text{cm}
\end{aligned}
$$

3 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA