MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za državno natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
Omišalj, 4.– 7. svibnja 2005. godine

7. razred

1. Odredi troznamenkasti broj $\overline{abc}$, tako da je dvoznamenkasti broj $\overline{ac}$ jednak 12% broja $\overline{abc}$.

2. Sok od naranče odreene koncentacije dobije se razrijeivanjem narančinog sirupa vodom. U jednoj boci nalazi se sok koncentracije 20%, a u drugoj koncentracije 50%. Kad bismo $\frac{1}{6}$ soka iz prve boce prelili u drugu bocu, sok u drugoj boci bio bi koncentracije 42.5%. Kad bismo soku iz prve boce dodali sav sok iz druge boce i još 3 litre vode, dobili bismo sok koncentracije 22.5%. Koliko je soka u kojoj boci?

3. Koliko ima ureenih parova cijelih brojeva (m, n) takvih da je
$$|m| + |n| < 2005\,?$$

4. Konstruiraj trokut ABC ako je $v_a = 3.5$ cm, $b = 4$ cm i polumjer opisane kružnice $r = 3$ cm.

5. Dan je šiljastokutan jednakokračan trokut ABC. Simetrala kuta $\angle ABC$ siječe krak $\overline{AC}$ u točki D. Okomica točkom D na simetralu BD siječe pravac AB u točki F. Paralela točkom D s osnovicom $\overline{AB}$ siječe krak $\overline{BC}$ u točki E, a visinu iz vrha C na osnovicu $\overline{AB}$ u točki M. Dokaži da je
$$|DM| = \frac{1}{4}|FB|.$$

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za državno natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
Omišalj, 4.– 7. svibnja 2005. godine

8. razred

1. Odredi sve troznamenkaste brojeve $\overline{abc}$ koji imaju svojstvo da je $\dfrac{22}{a^2+b^2+c^2}$ prirodan broj.

2. Nad stranicama pravokutnog trokuta konstruirani su izvana jednakostranični trokuti. Za njih vrijedi da je zbroj površina trokuta nad hipotenuzom i trokuta nad kraćom katetom jednak zbroju površina trokuta nad duljom katetom i pravokutnog trokuta. Izračunaj omjer duljina hipotenuze i kraće katete.

3. Nai sve prirodne brojeve n za koje su ispravne točno dvije od sljedeće tri tvrdnje:

   1) Broj n je kvadrat prirodnog broja.

   2) Posljednja znamenka broja n je 3.

   3) Broj $n+15$ je kvadrat prirodnog broja.

4. Ako za realni broj x, $x>1$, vrijedi jednakost

$$x-\frac{1}{x}=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}},$$

   koliko je $x+\dfrac{1}{x}$?

5. Neka je dana kružnica k središta S i promjera $\overline{AB}$. U nju je upisana kružnica k_1 tako da dira promjer $\overline{AB}$ u središtu S i kružnicu k. Kružnica k_2 dira obje kružnice k i k_1 te promjer $\overline{AB}$ (slika). Dokaži da su središta tih triju kružnica vrhovi jednakokračnog trokuta.