RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

1. Kako je $12\% = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$, to zbog uvjeta zadatka vrijedi jednakost $\overline{ac} = \frac{3}{25}\overline{abc}$, tj. $25(10a+c) = 3(100a+10b+c)$, odnosno $50a+30b = 22c$.
Iz zadnje jednakosti slijedi da je broj $22c$ djeljiv sa 10 jer su oba pribrojnika djeljiva sa 10, a to znači da je $c = 5$, zato jer je očito $c \neq 0$.
Stoga je $50a+30b = 110$, odnosno $5a+3b = 11$. Kako je $5a < 11$, slijedi da je $a = 1$ ili $a = 2$.
Za $a = 1$ dobivamo da je $b = 2$, pa je $\overline{abc} = 125$. Za $a = 2$ zadatak nema rješenja.

2. Neka su x i y redom količine soka u prvoj i drugoj boci (u litrama). Budući da je koncentracija soka u prvoj boci 20%, u prvoj boci je $\frac{1}{5}x$ litara sirupa. Slično, u drugoj boci je $\frac{1}{2}y$ litara sirupa.
Nakon prelijevanja $\frac{1}{6}$ soka, tj. $\frac{1}{6}x$ litara soka iz prve boce u drugu, u drugoj boci bi se nalazilo $\frac{1}{6}x+y$ litara soka, odnosno $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}x+\frac{1}{2}y = \frac{1}{30}x+\frac{1}{2}y$ litara sirupa. Koncentracija je tada 42.5%, odnosno

$$\frac{1}{30}x+\frac{1}{2}y = 0.425(\frac{1}{6}x+y). \tag{1}$$

Kad bismo soku iz prve boce dodali sok iz druge boce i 3 litre vode, u boci bi bilo $x+y+3$ litre soka, tj. $\frac{1}{5}x+\frac{1}{2}y$ litara sirupa. Koncentracija je tada 22.5%, odnosno

$$\frac{1}{5}x+\frac{1}{2}y = 0.225(x+y+3). \tag{2}$$

(1) i (2) daje sustav jednadžbi $x-2y = 0$, $x-11y+27 = 0$. Rješenje sustava je $x = 6$, $y = 3$.
Dakle, u prvoj posudi su 6 litara, a u drugoj 3 litre soka.

3. Pogledajmo ponajprije koliko ima ureenih parova (m,n) gdje su m i n prirodni brojevi koji zadovoljavaju uvjete zadatka. Ako je $m = 1$, onda n može poprimiti vrijednosti $1,2,3,\ldots,2003$; ako je $m = 2$ onda n može poprimiti vrijednosti $1,2,3,\ldots,2002;\ldots$; ako je $m = 2003$ onda n može poprimiti samo vrijednost 1. Dakle, ureenih parova (m,n) gdje su m i n prirodni brojevi ima

$$1+2+3+\cdots+2003 = \frac{2003\cdot 2004}{2} = 2007006.$$

Pogledajmo sada koliko ukupno ima ureenih parova (m,n) koji zadovoljavaju uvjet zadatka, gdje su m i n cijeli brojevi različiti od nule. Iz uvjeta $|m|+|n| < 2005$ slijedi da svakom ureenom paru (m,n) prirodnih brojeva koji zadovoljavaju zadani uvjet možemo pridružiti ureene parove $(-m,n)$, $(m,-n)$ i $(-m,-n)$ cijelih brojeva koji zadovoljavaju uvjete zadatka. Prema tome, broj ureenih parova cijelih brojeva (m,n) koji su različiti od nule ima ukupno

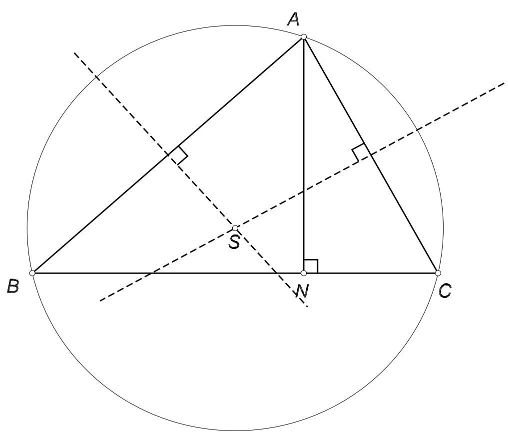
$$4\cdot 2007006 = 8028024.$$

Konačno, preostaje prebrojati ureene parove kojima je barem jedna koordinata jednaka nuli. Ako je $m = 0$, onda uvjet $|m|+|n| < 2005$ prelazi u $|n| < 2005$, a cijelih brojeva n koji zadovoljavaju taj uvjet ima $2\cdot 2004+1 = 4009$. Dakle, ureenih parova kojima je prva koordinata jednaka nuli, a zadovoljavaju uvjet zadatka, ima 4009. Analogno, ureenih parova kojima je druga koordinata jednaka nuli, a zadovoljavaju uvjet zadatka ima takoer 4009. Ukupno, ureenih parova cijelih brojeva kojima je barem jedna koordinata jednaka nuli ima $4009+4009-1 = 8017$ jer smo ureeni par $(0,0)$ računali dva puta.
Konačno, traženi broj je jednak

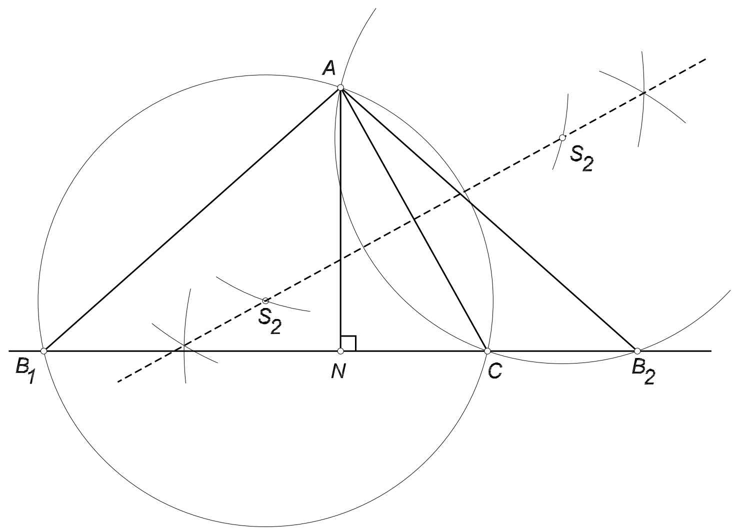
$$8028024+8017 = 8036041.$$

4.

ANALIZA: U pravokutnom trokutu ANC poznate su duljine dviju stranica v_a i b pa njega možemo konstruirati. Kako je središte S opisane kružnice sjecište simetrala stranica trokuta ABC, točka S se mora nalaziti na simetrali stranice $\overline{AC}$.



KONSTRUKCIJA

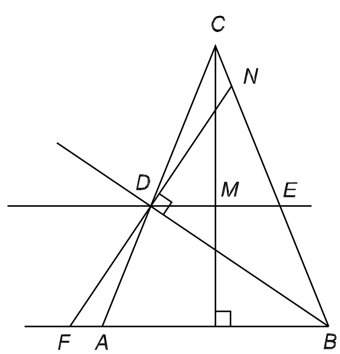


1. Konstruirati $\triangle ANC$.
2. Konstruirati simetralu stranice $\overline{AC}$.
3. Konstruirati točku S kao presjek kružnice sa središtem A i polumjerom r i simetrale stranice $\overline{AC}$.
4. Konstruirati vrh B kao presjek kružnice sa središtem S i polumjerom r i pravca NC.

Zadatak ima dva rješenja: $\triangle AB_1C$, $\triangle AB_2C$.

5.

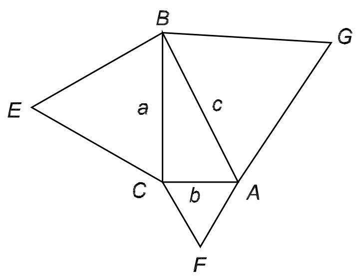
Neka je točka N presjek pravaca FD i BC. Trokuti BDF i BDN su sukladni, pa je $|FD| = |DN|$. Budući da je DE paralelno s BF i DE prolazi polovištem dužine $\overline{FN}$, slijedi da je $\overline{DE}$ srednjica trokuta FBN. Iz toga slijedi da je $|DE| = \frac{1}{2}|FB|$.
Pravac DE paralelan je s AB pa je trokut CDE jednakokračan s visinom $\overline{CM}$. Dakle, $|DM| = \frac{1}{2}|DE|$.
Sad je $|DM| = \frac{1}{2}|DE| = \frac{1}{4}|FB|$.



RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

1. Dani će razlomak biti prirodan broj ako je nazivnik djelitelj od 22, tj. ako je $a^2+b^2+c^2$ jednako 1,2,11 ili 22. Razmatranjem tih četiriju slučajeva dobivaju se ovi troznamenkasti brojevi: 100, 101, 110, 113, 131, 311, 233, 323, 332.

2. Neka su oznake kao na slici i neka je $a > b$. $P(AGB)+P(ACF) = P(CBE)+P(ABC)$, $\frac{c^2\sqrt{3}}{4}+\frac{b^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{ab}{2}$. Uvrštavanjem $c^2=a^2+b^2$ i sreivanjem dobivamo $a=b\sqrt{3}$.
Uvrštavanjem te relacije u $c^2=a^2+b^2$ dobivamo da je $c=2b$. Traženi omjer duljina hipotenuze i kraće katete je 2:1.

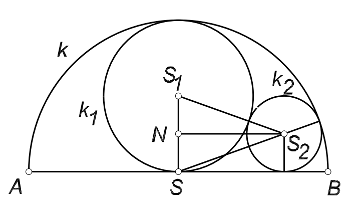


3. Tvrdnje 1. i 2. ne mogu istovremeno biti ispravne, jer nijedan kvadrat prirodnog broja nema posljednju znamenku jednaku 3. Isto tako, tvrdnje 2. i 3. ne mogu biti obje ispravne, jer bi to značilo da je broj s posljednjom znamenkom 8 jednak kvadratu nekog prirodnog broja, a to je nemoguće. Dakle, ispravne su 1. i 3. tvrdnja.

Neka je $n=x^2$ i $n+15=y^2$. Oduzimanjem prve jednakosti od druge dobivamo: $y^2-x^2=15$, tj. $(y-x)(y+x)=15$. Odavde dobivamo sustave jednadžbi: $(y-x=1, y+x=15)$ i $(y-x=3, y+x=5)$. Rješenje prvog sustava je $(x,y)=(7,8)$, a drugog $(x,y)=(1,4)$, pa je $n=1$ ili $n=49$.

4. Uvedimo zamjenu: $\sqrt{x}=a$. Tada je $a>1$ i uvjet glasi: $a^2-\frac{1}{a^2}=a+\frac{1}{a}$, tj. $(a-\frac{1}{a})(a+\frac{1}{a})=a+\frac{1}{a}$. Ovu jednakost možemo podijeliti s $a+\frac{1}{a}$ jer taj izraz nije 0 za brojeve a veće od 1. Dakle, $a-\frac{1}{a}=1$. Kvadriranjem zadnje relacije dobivamo $a^2+\frac{1}{a^2}=3$, tj. $x+\frac{1}{x}=3$.

5.



Neka je središte kružnice k_1 točka S_1, a polumjer R, a središte kružnice k_2 točka S_2 i polumjer r. Tada je polumjer kružnice k jednak $2R$. Iz središta S_2 povucimo okomicu S_2N na polumjer $\overline{SS_1}$. Time je trokut SS_1S_2 podijeljen na dva pravokutna trokuta, a primjena Pitagorina poučka na te trokute daje: $|NS_2|^2=(2R-r)^2-r^2$, $|NS_2|^2=(R+r)^2-(R-r)^2$. Izjednačavanjem tih jednakosti dobivamo $R=2r$. Tada je $|S_1S_2|=R+r=3r$ i $|SS_2|=2R-r=3r$, pa je trokut SS_1S_2 jednakokračan.