MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Omišalj, 4. – 7. svibnja 2005. godine

I. razred

1. Odredite sve brojeve čiji je zapis u dekadskom sustavu oblika $\overline{13xy45z}$, gdje su x, y i z nepoznate znamenke, koji su djeljivi sa 792.

2. Spojnice središta trokutu upisane kružnice i njegovih vrhova dijele ga na tri trokuta od kojih je jedan sličan polaznome. Odredite kutove polaznog trokuta.

3. Koju najveću vrijednost može poprimiti izraz

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n},$$

ako su k, m, n prirodni brojevi takvi da je $\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}<1$.

4. Duljine stranica trokuta su a, b i c, a R je duljina polumjera opisane mu kružnice. Odredite kutove trokuta ako vrijedi $R=\dfrac{a\sqrt{bc}}{b+c}$.

Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Omišalj, 4. – 7. svibnja 2005. godine

II. razred

1. Neka su a, b, c realni brojevi, $a \neq 0$. Ako je x_1 jedno rješenje jednadžbe

$$ax^2 + bx + c = 0$$

i x_2 jedno rješenje jednadžbe

$$-ax^2 + bx + c = 0,$$

dokažite da je tada jedno rješenje x_3 jednadžbe

$$\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0,$$

između x_1 i x_2, tj. $x_1 \le x_3 \le x_2$ ili $x_2 \le x_3 \le x_1$.

2. Središte U upisane kružnice trokuta ABC spojeno je dužinama s njegovim vrhovima. Neka su O_1, O_2 i O_3 središta kružnica opisanih trokutima BCU, CAU i ABU. Dokažite da kružnice opisane trokutima ABC i $O_1O_2O_3$ imaju zajedničko središte.

3. Ako su a, b i c realni brojevi veći od 1, dokažite da za svaki realni broj r vrijedi nejednakost

$$(\log_a bc)^r + (\log_b ca)^r + (\log_c ab)^r \ge 3 \cdot 2^r.$$

4. Dokažite da u svakom skupu od 11 prirodnih brojeva postoji njih 6, čiji je zbroj djeljiv sa 6.

Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Omišalj, 4. – 7. svibnja 2005. godine

III. razred

1. Nađite sva rješenja k, l, $m \in \mathbb{N}$ jednadžbe:

$$k!\,l! = k! + l! + m!.$$

($n!$ označava umnožak prirodnih brojeva od 1 do n.)

2. Upisana kružnica trokuta ABC dodiruje stranice $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama M, N i R. Neka je S točka na manjem od dva luka $\widehat{MN}$ i t tangenta na taj luk s diralištem S. Tangenta t siječe $\overline{NC}$ i $\overline{MC}$ redom u točkama P i Q. Dokažite da se pravci AP, BQ, SR i MN sijeku u jednoj točki.

3. Odredite skup svih točaka triedra takvih da je zbroj njihovih udaljenosti od strana triedra jednak zadanom pozitivnom broju a.

4. Pravilni poligon s 2005 stranica ima vrhove obojane crvenom, bijelom i plavom bojom. "Dozvoljenim bojanjem" zovemo bojanje u kojem dva susjedna vrha, koja su obojana različitim bojama, obojimo trećom bojom.

a) Dokažite da postoji konačan niz "dozvoljenih bojanja" nakon kojeg su svi vrhovi poligona iste boje.

b) Je li ta boja jednoznačno određena početnim rasporedom boja vrhova?

Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Omišalj, 4. – 7. svibnja 2005. godine

IV. razred

1. Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je zadan rekurzivno s $a_1 = 1$,

$$a_n = a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} + 1, \quad \text{za } n \geq 2.$$

Odredite najmanji realni broj M takav da je

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} < M \quad \text{za svaki } m \in \mathbb{N}.$$

2. Neka je P polinom n-tog stupnja čiji su svi koeficijenti nenegativni, a vodeći i slobodni koeficijent jednaki su 1. Uz pretpostavku da su sve nultočke od P realni brojevi, dokažite da za svaki $x \geq 0$ vrijedi $P(x) \geq (x+1)^n$.

3. Dokažite da postoji točno jedan prirodni broj koji se u dekadskom sustavu zapisuje samo znamenkama 2 i 5, ima 2005 znamenaka i djeljiv je s 2^{2005}.

4. Neka je $ABCD$ konveksni četverokut i neka su P i Q redom točke na njegovim stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ takve da je $\sphericalangle BAP = \sphericalangle DAQ$. Dokažite da trokuti ABP i ADQ imaju jednake površine ako i samo ako je spojnica njihovih ortocentara okomita na pravac AC.

Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.