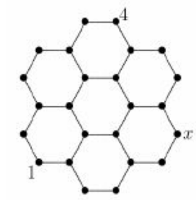
MATEMATIČKI KLOKAN S

RJEŠENJA

Pitanja za 3 boda:



1. Zbrojevi brojeva pridruženih krajnjim točkama iste dužine su jednaki, za sve dužine na slici. Dva broja su već pridružena dvjema krajnjim točkama. Koji broj treba pridružiti točki označenoj s x?

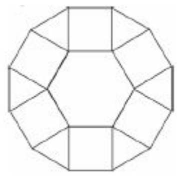
A) 5 B) 4 C) 3 **D) 1** E) nedovoljno podataka

Rješenje: **D.** Da bi zbrojevi brojeva pridruženih krajnjim točkama iste dužine svi bili jednaki, krajnjim točkama svih dužina moraju biti pridruženi brojevi 1 i 4. Prema tome, točki označenoj s x treba pridružiti broj 1.

2. Svi četveroznamenkasti brojevi čija je suma znamenaka 4 napisani su u padajućem nizu. Na kojem mjestu u tom nizu se nalazi broj 2011?

A) 10. **B) 9.** C) 8. D) 7. E) 6.

Rješenje: **B.** Padajući niz četveroznamenkastih brojeva sa zadanim svojstvom glasi: 4000, 3100, 3010, 3001, 2200, 2110, 2101, 2020, 2011, 2002, 1300, 1210, 1201, 1120, 1111, 1102, 1030, 1021, 1012, 1003.



3. Lik na slici sastoji se od pravilnog šesterokuta, šest trokuta i šest kvadrata. Duljina stranice pravilnog šesterokuta je 1 cm. Koliki je opseg tog lika?

A) $6(1+\sqrt{2})$ cm B) $6(1+\frac{\sqrt{3}}{2})$ cm C) 9 cm D) $(6+3\sqrt{2})$ cm **E) 12 cm**

Rješenje: **E.** Lik se sastoji od pravilnog šesterokuta, šest jednakostraničnih trokuta i šest kvadrata. Dužine koje omeđuju taj lik imaju sve duljinu 1 cm. Ima ih 12, pa je opseg lika 12 cm.

4. Mihael, Fernando i Sebastijan sudjelovali su u utrci. Odmah nakon starta, Mihael je bio prvi, Fernando drugi, a Sebastijan treći. Tijekom utrke Mihael i Fernando prestizali su se međusobno 9 puta, Fernando i Sebastijan 10 puta, a Mihael i Sebastijan 11 puta. U kojem poretku su završili utrku?

A) Mihael, Fernando, Sebastijan B) Sebastijan, Mihael, Fernando **C)** Fernando, Sebastijan, Mihael D) Sebastijan, Fernando, Mihael E) Fernando, Mihael, Sebastijan

Rješenje: **C.**

5. Ako je $2^x = 15$ i $15^y = 32$, tada je $x \cdot y$ jednak:

A) 5 B) $\log_2 15 + \log_{15} 32$ C) $\log_2 47$ D) 7 E) $\sqrt{47}$

Rješenje: **A.** Iz $2^x = 15$ slijedi da je $x = \log_2 15$, a iz $15^y = 32$ slijedi $y = \log_{15} 32$. Prema tome,

$x \cdot y = \log_2 15 \cdot \log_{15} 32 = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

6. Andrija je napisao na ploči neparne prirodne brojeve manje od 2012, zatim je Boris obrisao među njima sve višekratnike broja 3. Koliko je brojeva ostalo na ploči?

A) 335 B) 336 **C) 671** D) 1005 E) 1006

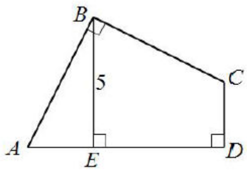
Rješenje: **C.** Od 1006 neparnih brojeva (manjih od 2012) 335 su djeljivi s 3. Na ploči je ostao 671 broj.

7. Imamo dvije kocke s bridovima duljina a dm i a+1 dm. Veća kocka puna je vode, dok je manja prazna. Prelijevamo vodu iz veće u manju kocku dok je ne napunimo, ostavljajući tako 217 litara vode u većoj kocki. Koliko je vode bilo u većoj kocki?

A) 243 *l* B) 512 *l* C) 125 *l* D) 1331 *l* **E) 729 *l***

Rješenje: **E.** Vrijedi $(a+1)^3 - a^3 = 217$, rješenje je a = 8. U manju kocku prelili smo 512 *l*. U većoj kocki bilo je 729 *l*.

8. Za četverokut ABCD na slici vrijedi: $|AB| = |BC|$, $|\angle ABC| = |\angle ADC| = 90°$, $BE \perp AD$, $|BE| = 5$. Kolika je površina četverokuta ABCD?

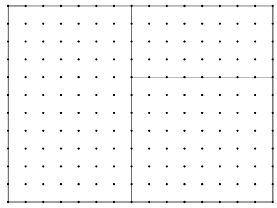


A) 20 B) 22.5 **C) 25** D) 27.5 E) 30

Rješenje: **C.** Premjestimo li pravokutni trokut AEB nad stranicu $\overline{BC}$, dobiveni četverokut bit će kvadrat sa stranicom duljine 5, a njegova površina 25.

Pitanja za 4 boda:

9. Veći pravokutnik podijeljen je na tri manja pravokutnika. Jedan od manjih ima stranice duljina 7 i 11. Drugi od manjih ima stranice duljina 4 i 8. Nađi duljine stranica trećeg od manjih pravokutnika s maksimalnom površinom.



A) 1 i 11 B) 3 i 4 C) 3 i 8 **D) 7 i 8** E) 7 i 11

Rješenje: **D.**

10. Mihael želi upisati brojeve u kvadratiće tako da zbroj u svakom kvadratu 2 x 2 iznosi 10. Četiri broja su već upisana, kao na slici. Koji od sljedećih brojeva može biti zbroj preostalih pet brojeva u kvadratu?

	2	
1		**3**
	4	

A) 9 B) 10 C) 12 D) 13 **E)** nijedan od ponuđenih brojeva nije rješenje

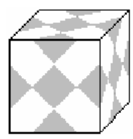
Rješenje: **E.**

11. Na skijaški izlet išlo je 48 - ero djece. Šestoro od njih bilo je s jednim bratom ili sestrom, devetero je bilo s točno dvoje braće ili sestara i četvero od njih s točno troje braće ili sestara. Ostala djeca nisu imala braće i sestara na izletu. Koliko je obitelji išlo na izlet?

A) 19 B) 25 C) 31 **D) 36** E) 48

Rješenje: **D.** Tri su para, tri trojke i jedna četvorka braće i sestara. Ostalih 29-oro su sami na izletu. Ukupno 36 obitelji.

12. Šimun ima staklenu kocku brida duljine 1 dm. Na strane kocke nalijepio je sukladne kvadrate zlatne boje, tako da kocka sa svih strana izgleda jednako, što se može vidjeti na slici. Koliko je površine kocke zlatne boje?



A) 375 cm² B) 300 cm² **C) 225 cm²** D) 150 cm² E) 37.5 cm²

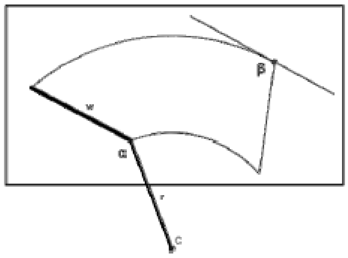
Rješenje: **C.** Za zlatne kvadrate vrijedi da je dvostruka duljina njihove dijagonale jednaka duljini brida kocke. Duljina dijagonale kvadrata je 0.5 dm, a duljina stranice kvadrata $\frac{\sqrt{2}}{4}$ dm. Površina zlatnog kvadrata je $\frac{1}{8}$ dm², a takvih zlatnih kvadrata ima 12, površina kocke zlatne boje je $\frac{9}{4}$ dm², odn. 225 cm².

13. Peteroznamenkasti broj $\overline{abcde}$ naziva se *zanimljivim* ako su mu sve znamenke međusobno različite i ako vrijedi $a = b + c + d + e$. Koliko ima *zanimljivih* brojeva?

A) 288 B) 216 **C) 168** D) 144 E) 72

Rješenje: **C.** Osnovni zanimljivi brojevi su: 90234, 90135, 90126, 80134, 80125, 70124, 60123, a preostali su permutacije znamenaka b, c d i e. Ima ih: $7 \cdot 4! = 168$.

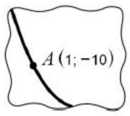
14. Brisač zadnjeg stakla na automobilu konstruiran je tako da se sastoji od dva dijela jednake duljine, metlice w i štapića r koji su spojeni tako da zatvaraju kut α. Brisač rotira oko točke C i briše površinu stakla, kao na slici. Odredi veličinu kuta β između metlice desno i tangente.



A) $\frac{3\pi - \alpha}{2}$ **B) $\pi - \frac{\alpha}{2}$** C) $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ D) $\frac{\pi}{2} + \alpha$ E) $\pi + \frac{\alpha}{2}$

Rješenje: **B.** Spojimo točku C sa vrhom brisača, dobit ćemo jednakokračan trokut u kojem kut pri vrhu brisača označimo sa x. $x + \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} = \pi$, $\beta = \frac{\pi}{2} + x$, $\beta = \pi - \frac{\alpha}{2}$.

15. U pravokutnom koordinatnom sustavu *xOy*, na paraboli $y = ax^2 + bx + c$ bila je označena točka $A(1,-1)$. Nakon toga, koordinatne osi i skoro cijela parabola su izbrisane, kao na slici. Koja je od sljedećih izjava netočna?



A) $a > 0$ B) $b < 0$ C) $a + b + c < 0$ D) $b^2 > 4ac$ **E) $c < 0$**

Rješenje: **E.**

16. Odredi zbroj svih pozitivnih cijelih brojeva x manjih od 100 za koje je izraz x^2 - 81 višekratnik broja 100.

A) 200 B) 100 C) 90 D) 81 E) 50

Rješenje: **A.** Izraz $x^2 - 81$ je višekratnik broja 100 za pozitivne cijele brojeve 9, 41, 59 i 91. Njihov zbroj je 200.

Pitanja za 5 bodova:

17. Koliko uređenih parova prirodnih brojeva (x, y) zadovoljava jednakost $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$?

A) 4 **B) 3** C) 2 D) 1 E) 0

Rješenje: **B.** (6, 6), (12, 4), (4, 12)

18. Braća Alan i Branimir dali su istinite izjave o broju članova njihovog šahovskog kluba. Alan je rekao: ″ Svi članovi kluba, osim njih 5, su dječaci″. Branimir je izjavio: ″ U svakoj grupi od 6 članova najmanje su četiri djevojke″. Koliko članova ima njihov šahovski klub?

A) 6 **B) 7** C) 8 D) 12 E) 18

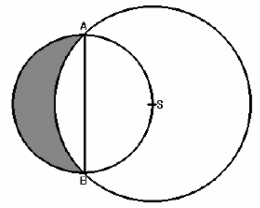
Rješenje: **B.**

19. U bubnju se nalaze loptice. Na svakoj od njih napisan je prirodni broj i nema loptica s jednakim brojevima. Brojevi djeljivi sa 6 napisani su na 30, brojevi djeljivi sa 7 na 20, a brojevi djeljivi s 42 na 10 loptica. Koliko najmanje loptica mora biti u bubnju?

A) 30 **B) 40** C) 53 D) 54 E) 60

Rješenje: **B.** Brojeva djeljivih s 42 ima 10, ali oni su ujedno djeljivi i sa 6 i sa 7. Brojeva djeljivih samo sa 7 ima 10, a brojeva djeljivih samo sa 6 ima 20. U bubnju ima najmanje 40 loptica.

20. Dva kruga nacrtana su kao na slici. Dužina AB promjer je manjeg kruga. Središte većeg kruga nalazi se na manjoj kružnici, a polumjer većeg kruga ima duljinu *r*. Kolika je površina osjenčanog dijela?



A) $\frac{1}{2} \cdot r^2$ B) $\frac{\sqrt{3} \cdot \pi}{12} \cdot r^2$ C) $\frac{\pi}{6} \cdot r^2$ D) $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot r^2$ E) neki drugi odgovor

Rješenje: **A.** Površinu osjenčanog dijela možemo dobiti kao razliku površine manjeg polukruga i površine odsječka većeg kruga nad tetivom $\overline{AB}$. Duljina polumjera manjeg kruga je $\frac{r\sqrt{2}}{2}$, a površina manjeg polukruga $\frac{r^2\pi}{4}$. Površina odsječka većeg kruga nad tetivom $\overline{AB}$ može se dobiti kao razlika površine kružnog isječka većeg kruga nad kružnim lukom *AB* i površine jednakokračnog pravokutnog trokuta *ASB*. Površina kružnog isječka većeg kruga nad kružnim lukom *AB* je $\frac{r^2\pi \cdot 90°}{360°} = \frac{r^2\pi}{4}$, a površina jednakokračnog pravokutnog trokuta *ASB* je $\frac{r^2}{2}$. Površina odsječka većeg kruga nad tetivom $\overline{AB}$ je $\frac{r^2\pi}{4} - \frac{r^2}{2}$. Površina osjenčanog dijela je $\frac{r^2\pi}{4}$ - $(\frac{r^2\pi}{4} - \frac{r^2}{2}) = \frac{r^2}{2}$.

21. Niz numeričkih funkcija $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$,... zadovoljava sljedeće uvjete: $f_1(x) = x$ i $f_{n+1}(x) = \frac{1}{1 - f_n(x)}$. Odredi vrijednost $f_{2011}(2011)$.

A) 2011 B) $-\frac{1}{2010}$ C) $\frac{2010}{2011}$ D) 1 E) – 2011

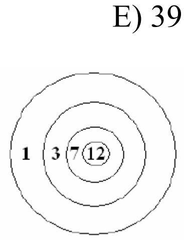
Rješenje: **A.** $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{1-x}$, $f_3(x) = \frac{x-1}{x}$, $f_4(x) = x$. Funkcije se ponavljaju ciklički, ostatak pri dijeljenju broja 2011 s 3 je 1. Znači, $f_{2011}(x) = 2011$.

22. Avio – kompanija naplaćuje taksu za prtljagu ako masa prtljage po osobi prelazi određeni iznos. Za svaki kilogram viška naplaćuje se taksa. Masa prtljage bračnog para Zetić iznosi 60 kg i naplaćena im je taksa od 3 €. Prtljaga gđe Čudić ima istu masu kao i prtljaga Zetićevih, ali joj je naplaćena taksa od 10,50 €. Kolika je maksimalna masa prtljage bez naplate takse?

A) 10 kg B) 18 kg C) 20 kg **D) 25 kg** E) 39 kg

Rješenje: **D.**

23. Robin Hood pogodio je tri strelice u metu i pri tome osvojio određeni broj bodova, kao što pokazuje slika. Koliko različitih zbrojeva bodova je on mogao postići?



A) 13 B) 17 **C) 19** D) 20 E) 21

Rješenje: **C.** Mogući različiti zbrojevi su: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 25, 26, 27, 31 i 36.

24. Dvadeset različitih prirodnih brojeva je upisano u tablicu 4 x 5. Bilo koja dva susjeda (brojevi u kvadratićima sa zajedničkom stranicom) imaju zajednički djelitelj veći od 1. Ako je *n* najveći broj u tablici, nađi njegovu najmanju moguću vrijednost.

A) 21 B) 24 **C) 26** D) 27 E) 40

Rješenje: **C.**