Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

27. siječnja 2014.

1. Dokaži da je broj $2012^9 + 2016^9$ djeljiv s 2014.

2. Pravilni šesterokut i jednakostranični trokut imaju isti opseg.
Koliki je omjer njihovih površina?

3. U kutiji se nalazi po k loptica s oznakom k za sve $k = 1, 2, \ldots, 50$ (dakle jedna loptica s oznakom 1, dvije loptice s oznakom 2, ..., 50 loptica s oznakom 50).

Iz kutije se izvlače loptice bez gledanja. Koliko je najmanje loptica potrebno izvući da bismo bili sigurni da je izvučeno barem 10 loptica s istom oznakom?

4. Neka su a i b različiti realni brojevi i neka je $s = a - b$ i $t = a^3 - b^3$.
Izrazi $(a + b)^2$ pomoću s i t.

5. Koliko ima četveroznamenkastih brojeva koji su sastavljeni od međusobno različitih znamenaka iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ i djeljivi su sa 5?

* * *

6. Odredi sve prirodne brojeve n takve da je

$$3^{2n+1} - 4^{n+1} + 6^n$$

prost broj.

7. Neka je ABC trokut u kojem je najdulja stranica $\overline{BC}$, a kut $\sphericalangle BCA$ tri puta veći od kuta $\sphericalangle ABC$. Simetrala vanjskog kuta kod vrha A siječe pravac BC u točki A_0, a simetrala vanjskog kuta kod vrha B siječe pravac AC u točki B_0. Ako je $|AA_0| = |BB_0|$, odredi kutove danog trokuta.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

27. siječnja 2014.

1. Učenici su odlučili igrati igru s ukupno 960 žetona. Najprije su podijelili sve žetone tako da svatko od njih ima isti broj žetona. Čim su to napravili, stigao je njihov nastavnik te je poželio priključiti se igri. Svaki učenik mu je dao po 4 žetona, pa su svi imali jednak broj žetona i bili su spremni za početak igre. Koliko učenika sudjeluje u igri?

2. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$\left|z^2 - i\right| = 1 \quad \text{i} \quad |z| = \sqrt{2}.$$

3. Neka su a, b i c cijeli brojevi i $a \neq 0$. Može li diskriminanta kvadratne funkcije

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

biti jednaka 51?

4. Vrhovi peterokuta $ABCDE$ leže na istoj kružnici. Ako je $\sphericalangle CAD = 50^\circ$, odredi

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle AED.$$

5. Neka je A broj šesteroznamenkastih brojeva čiji je umnožak znamenki 105, a B broj šesteroznamenkastih brojeva čiji je umnožak znamenki 147. Odredi omjer $A : B$.

$*\quad*\quad*$

6. U trokut ABC upisan je romb $AKLM$ tako da točka K leži na $\overline{AB}$, točka L na $\overline{BC}$, a točka M na $\overline{CA}$. Ako je duljina stranice tog romba $2\sqrt{2}$, površina trokuta LMC iznosi 3, a površina trokuta KLB iznosi 4, dokaži da je $\sphericalangle BAC = 60^\circ$.

7. Neka je a prirodni broj te b i c cijeli brojevi, takvi da jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ ima dva različita rješenja u intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}]$. Dokaži da je $a \geqslant 6$.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

27. siječnja 2014.

1. Kolika je najmanja, a kolika najveća vrijednost koju postiže funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x) = \cos^2 x + \sin x$?

2. Dokaži da je

$$\log_2\left(1+\frac{1}{1}\right) + \log_2\left(1+\frac{1}{2}\right) + \cdots + \log_2\left(1+\frac{1}{k}\right) + \cdots + \log_2\left(1+\frac{1}{2014}\right) < 11.$$

3. U trokutu ABC vrijedi $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle BAC$. Dokaži da je $|AC| < 2|BC|$.

4. Ako su p i p^2+8 prosti brojevi, dokaži da je i broj p^3+4 prost.

5. Šahovska ploča je ploča s 8 redaka i 8 stupaca čija su polja obojana naizmjence crno-bijelo tako da je polje u prvom retku i prvom stupcu obojano crno. U svako polje šahovske ploče upisan je po jedan cijeli broj. Poznato je da je zbroj svih brojeva na bijelim poljima jednak 26, a zbroj svih brojeva u neparnim stupcima jednak 43.

Ako promijenimo predznake svih brojeva na bijelim poljima, koliki će biti zbroj svih brojeva u neparnim redcima nakon te promjene?

* * *

6. Dan je pravokutni trokut ABC. Na simetrali pravog kuta $\sphericalangle ACB$ odabrana je točka M. Ako vrijedi $\sin\sphericalangle MAC = \frac{8}{17}$ i $\cos\sphericalangle MBC = \frac{3}{5}$, odredi omjer $|AB| : |CM|$.

7. Dokaži da među bilo kojih sedam kvadrata prirodnih brojeva postoje dva čija je razlika djeljiva sa 20.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

27. siječnja 2014.

1. Nikola je zamislio pet brojeva. Prvi broj koji je zamislio je -2, a peti je 6. Prva četiri broja su uzastopni članovi aritmetičkog niza, a zadnja tri su uzastopni članovi geometrijskog niza. Koje je brojeve Nikola zamislio?

2. Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$\sqrt{n+\sqrt{(n-1)+\sqrt{(n-2)+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}<\sqrt{n}+1.$$

3. Za realni broj a, neka je $\mathcal{P}_a$ parabola s jednadžbom $y=x^2+ax+(2014-a)$.
Dokaži da sve parabole $\mathcal{P}_a$ prolaze istom točkom.

4. Tamara je na ploču napisala paran prirodan broj. Nakon toga je, jednog za drugim, napisala još dvanaest brojeva tako da je svaki broj za 5 veći od kvadrata prethodno napisanog broja. Odredi kojom znamenkom može završiti posljednji napisani broj.

5. Na ploči dimenzija 5×7 kojoj su sva polja bijela, potrebno je obojati točno 17 polja crnom bojom tako da nastali raspored crnih i bijelih polja na ploči bude centralnosimetričan, tj. da se ne mijenja rotacijom za 180° oko središta ploče. Na koliko je načina to moguće napraviti?

$*\quad*\quad*$

6. Točkama A, B i C parabole povučene su tangente na tu parabolu. One se u parovima sijeku u točkama K, L i M tako da je KL tangenta u točki A, KM tangenta u točki B, a LM tangenta u točki C. Presjek pravca AC i paralele s osi parabole kroz točku B je točka N. Dokaži da je četverokut $KLMN$ paralelogram.

7. Višnja je odlučila napisati na ploču sve prirodne brojeve od 1 do 2014 u nekom poretku. Višnjin brat Marijan će između svaka dva susjedna broja napisati apsolutnu vrijednost njihove razlike, a zatim sve početne brojeve obrisati. Ovaj postupak Marijan će ponavljati sve dok na ploči ne ostane samo jedan broj.

Odredi najveći mogući broj koji na kraju može ostati na ploči.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.