ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

27. siječnja 2014.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Dokaži da je broj $2012^9 + 2016^9$ djeljiv s 2014.

Prvo rješenje.

Koristimo faktorizaciju $m^3 + n^3 = (m + n)(m^2 - mn + n^2)$. 1 bod

Iz nje zaključujemo da, ako su m i n cijeli brojevi, onda $m + n \mid m^3 + n^3$. 2 boda

Također, $m^3 + n^3 \mid m^9 + n^9$, pa vrijedi i $m + n \mid m^9 + n^9$. 1 bod

Dakle, $2012 + 2016 \mid 2012^9 + 2016^9$. 1 bod

Budući da je $2012 + 2016 = 2 \cdot 2014$, slijedi da $2014 \mid 2012^9 + 2016^9$. 1 bod

Drugo rješenje.

Poznato je da vrijedi

$$m^9 + n^9 = (m + n)(m^8 - m^7n + m^6n^2 - m^5n^3 + m^4n^4 - m^3n^5 + m^2n^6 - mn^7 + n^8).$$ 2 boda

Odavde zaključujemo da, ako su m i n cijeli brojevi, onda $m + n \mid m^9 + n^9$. 2 boda

Dakle, $2012 + 2016 \mid 2012^9 + 2016^9$. 1 bod

Budući da je $2012 + 2016 = 2 \cdot 2014$, slijedi da $2014 \mid 2012^9 + 2016^9$. 1 bod

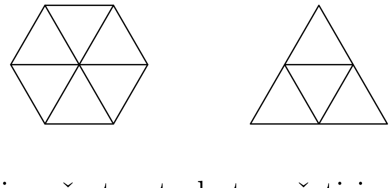
Napomena: Ako učenik provede početnu faktorizaciju samo na zadanim brojevima i točno provede zaključke o djeljivosti, također treba dobiti sve bodove.

Zadatak A-1.2.

Pravilni šesterokut i jednakostranični trokut imaju isti opseg.
Koliki je omjer njihovih površina?

Prvo rješenje.

Budući da su opsezi jednaki, omjer duljina stranica šesterokuta i trokuta je $1 : 2$. 1 bod



Šesterokut možemo podijeliti na šest, a trokut na četiri međusobno sukladna jednakostranična trokuta (čija je duljina stranice jednaka duljini stranice šesterokuta). 4 boda

Zato je omjer njihovih površina $6 : 4$, tj. $3 : 2$. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je a duljinu stranice pravilnog šesterokuta, a b duljina stranice jednakostraničnog trokuta. Budući da su opsezi jednaki, slijedi da je $6a = 3b$, tj. $2a = b$. 1 bod

Šesterokut se sastoji od 6 sukladnih jednakostraničnih trokuta sa stranicom duljine a, pa mu je površina jednaka 1 bod

$$P_6 = 6 \cdot \frac{1}{4} a^2\sqrt{3} = \frac{3}{2} a^2\sqrt{3}.$$ 1 bod

Površina trokuta stranice b iznosi $P_3 = \dfrac{1}{4} b^2\sqrt{3}$, pa je $P_6 : P_3 = 6a^2 : b^2$. 2 boda

Zbog $2a = b$, traženi omjer je jednak $P_6 : P_3 = 3 : 2$. 1 bod

Napomena: Umjesto korištenja formule za površinu jednakostraničnog trokuta moguće je koristiti tvrdnju da je omjer površina jednakostraničnih trokuta sa stranicama a i b jednak $a^2 : b^2$.

Zadatak A-1.3.

U kutiji se nalazi po k loptica s oznakom $\textcircled{k}$ za sve $k = 1, 2, \ldots, 50$ (dakle jedna loptica s oznakom $\textcircled{1}$, dvije loptice s oznakom $\textcircled{2}$, $\ldots$, 50 loptica s oznakom $\textcircled{50}$).

Iz kutije se izvlače loptice bez gledanja. Koliko je najmanje loptica potrebno izvući da bismo bili sigurni da je izvučeno barem 10 loptica s istom oznakom?

Rješenje.

Odgovor na pitanje u zadatku je za 1 veći od odgovora na sljedeće pitanje:
Koliko najviše loptica možemo izvući (gledajući ih, tj. birajući koje loptice izvlačimo), a da među njima ne bude više od 9 loptica s istom oznakom?

To ćemo postići tako da uzmemo po devet loptica s pojedinom oznakom (ili manje, ako ih nema dovoljno). 2 boda

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & \ldots & 49 & 50 \\
 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & \ldots & 49 & 50 \\
 & & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & \ldots & 49 & 50 \\
 & & & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & \ldots & 49 & 50 \\
 & & & & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & \ldots & 49 & 50 \\
 & & & & & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & \ldots & 49 & 50 \\
 & & & & & & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & \ldots & 49 & 50 \\
 & & & & & & & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & \ldots & 49 & 50 \\
 & & & & & & & & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & \ldots & 49 & 50 \\
\hline
 & & & & & & & & & 10 & 11 & 12 & 13 & \ldots & 49 & 50 \\
 & & & & & & & & & & 11 & 12 & 13 & \ldots & 49 & 50 \\
 & & & & & & & & & & & & & \vdots & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & 49 & 50 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 50
\end{array}$$

Ukupan broj takvih je loptica

$$\begin{aligned} 1+2+3+4+5+6+7+8+9+9+9+\cdots+9 &= (1+2+\cdots+8)+42\cdot 9 \\ &= 36+378 = 414. \end{aligned}$$ 2 boda

Dakle, moguće je izvući 414 loptica tako da među njima nema deset loptica s istom oznakom. 1 bod

S druge strane, ako izvučemo 415 loptica, onda možemo biti sigurni da smo izvukli deset loptica s nekom od oznaka 10, 11, 12, ..., 50. 1 bod

Potrebno je izvući najmanje 415 loptica da bismo bili sigurni da među izvučenim lopticama barem deset loptica ima istu oznaku.

Napomena: Na slici su iznad crte oznake loptica koje možemo izvući tako da među njima nema 10 s istom oznakom. Prebrojavajući po redcima također možemo vidjeti da je njihov broj $50+49+\cdots+42=414$.

Zadatak A-1.4.

Neka su a i b različiti realni brojevi i neka je $s=a-b$ i $t=a^3-b^3$.
Izrazi $(a+b)^2$ pomoću s i t.

Prvo rješenje.

Možemo faktorizirati $t=a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, tj. $t=s(a^2+ab+b^2)$. 1 bod

Nakon dijeljenja sa s ($s\neq 0$) dobivamo

$$a^2+ab+b^2=\frac{t}{s}.$$ 1 bod

Kubiranjem $s=a-b$ dobivamo $s^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)=t-3abs$.
Dakle $s^3=t-3abs$, iz čega lako izražavamo

$$ab=\frac{t-s^3}{3s}.$$ 2 boda

Konačno dobivamo

$$(a+b)^2=(a^2+ab+b^2)+ab=\frac{t}{s}+\frac{t-s^3}{3s}=\frac{4t-s^3}{3s}.$$ 2 boda

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, izrazimo $a^2+ab+b^2=\frac{t}{s}$. 2 boda

Kvadriranjem $s=a-b$ dobivamo $s^2=a^2-2ab+b^2$.

Vrijedi $(a^2+ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)=3ab$, tj.

$$ab=\frac{1}{3}\left(\frac{t}{s}-s^2\right)=\frac{t}{3s}-\frac{s^2}{3}.$$ 2 boda

Konačno je

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 = (a^2+ab+b^2)+ab \\ &= \frac{t}{s} + \left(\frac{t}{3s} - \frac{s^2}{3}\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{t}{s} - \frac{1}{3}s^2.\end{aligned}$$ 2 boda

Zadatak A-1.5.

Koliko ima četveroznamenkastih brojeva koji su sastavljeni od međusobno različitih znamenaka iz skupa $\{0,1,2,3,4,5\}$ i djeljivi su sa 5?

Prvo rješenje.

Budući da promatramo brojeve djeljive sa 5, zadnja znamenka im je 0 ili 5. 1 bod

Prebrojimo prvo brojeve koji završavaju sa 0, tj. one oblika $\overline{abc0}$. Znamenke a, b i c moraju biti različite od 0, pa su $a,b,c \in \{1,2,3,4,5\}$.

Znamenku a možemo odabrati na 5 načina, znamenku b na 4 načina tako da bude različita od a, a znamenku c na 3 načina tako da bude različita od a i b. Slijedi da postoji $5\cdot 4\cdot 3 = 60$ promatranih četveroznamenkastih brojeva koji završavaju sa 0. 2 boda

Prebrojimo sad brojeve koji završavaju sa 5, tj. one oblika $\overline{abc5}$. Znamenke a, b, c biramo iz skupa $\{0,1,2,3,4\}$, ali pritom a ne smije biti 0 (u suprotnom, broj ne bi bio četveroznamenkast). Broj a možemo izabrati na 4 načina. 1 bod

Nakon toga, budući da b i c smiju biti 0, znamenku b također možemo odabrati na 4 načina, a c na 3 načina. Slijedi da ima $4\cdot 4\cdot 3 = 48$ promatranih četveroznamenkastih brojeva koji završavaju sa 5. 1 bod

Sveukupno ima $60+48 = 108$ takvih brojeva. 1 bod

Drugo rješenje.

Budući da promatramo brojeve djeljive sa 5, zadnja znamenka im je 0 ili 5. 1 bod

Kao i u prvom rješenju zaključujemo da brojeva oblika $\overline{abc0}$ ima $5\cdot 4\cdot 3 = 60$. 2 boda

Kod brojeva oblika $\overline{abc5}$ razlikujemo dva slučaja, ovisno o pojavljivanju znamenke 0.

- Ako se 0 ne pojavljuje, onda biramo tri različite znamenke iz skupa $\{1,2,3,4\}$ što možemo napraviti na $4\cdot 3\cdot 2 = 24$ načina. 1 bod
- Ako se 0 pojavljuje, onda su to brojevi oblika $\overline{a0c5}$ ili $\overline{ab05}$. Preostale dvije znamenke biramo iz skupa $\{1,2,3,4\}$ i to možemo napraviti na $4\cdot 3 = 12$ načina, pa ovakvih brojeva ima $2\cdot 12 = 24$. 1 bod

Ukupno ima $60+24+24 = 108$ takvih brojeva. 1 bod

Treće rješenje.

Najprije odaberimo četiri različite znamenke a, b, c, d od kojih u nekom poretku napravimo četveroznamenkasti broj. Razlikujemo četiri slučaja:

1) Ako su odabrane znamenke 1, 2, 3, 4, ne možemo dobiti broj djeljiv sa 5.
2) Ako smo odabrali 0, a nismo odabrali 5, onda nula mora biti zadnja znamenka. Ostale tri znamenke daju 6 kombinacija ($\overline{abc0}$, $\overline{acb0}$, $\overline{bac0}$, $\overline{bca0}$, $\overline{cab0}$, $\overline{cba0}$). 1 bod
3) Ako smo odabrali 5, a nismo odabrali 0, tada zadnja znamenka mora biti 5, a ostale tri znamenke daju 6 kombinacija ($\overline{abc5}$, $\overline{acb5}$, $\overline{bac5}$, $\overline{bca5}$, $\overline{cab5}$, $\overline{cba5}$). 1 bod
4) Ako smo odabrali i 0 i 5, onda su moguće kombinacije: $\overline{ab50}$, $\overline{a5b0}$, $\overline{ba50}$, $\overline{b5a0}$, $\overline{5ab0}$, $\overline{5ba0}$, $\overline{ab05}$, $\overline{a0b5}$, $\overline{ba05}$, $\overline{b0a5}$ i ima ih 10. 1 bod

Odredimo sada koliko se puta javlja pojedini slučaj.

U slučajevima 2) i 3) biramo tri znamenke (a, b, c) iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$, a to možemo napraviti na 4 načina. 1 bod

U slučaju 4) biramo dvije znamenke (a, b) iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$, a to možemo napraviti na 6 načina. 1 bod

Znači da je traženi broj $6 \cdot 4 + 6 \cdot 4 + 10 \cdot 6 = 108$. 1 bod

Napomena: Za ispisivanje svih 108 točnih brojeva dobije se 6 bodova. Za ispisivanje samo nekih brojeva bez ikakve metode dobije se 0 bodova, a parcijalni bodovi se dodjeljuju za sustavno ispisivanje nekih posebnih slučajeva (npr. $\overline{ab05}$) prema drugom ili trećem rješenju.

Zadatak A-1.6.

Odredi sve prirodne brojeve n takve da je

$$3^{2n+1} - 4^{n+1} + 6^n$$

prost broj.

Rješenje.

Primijetimo da dani izraz možemo zapisati koristeći potencije brojeva 2 i 3:

$$3^{2n+1} - 4^{n+1} + 6^n = 3^{2n+1} - 4 \cdot 2^{2n} + 2^n \cdot 3^n,$$ 1 bod

a zatim faktorizirati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} 3^{2n+1} - 4^{n+1} + 6^n &= 3 \cdot 3^{2n} - 3 \cdot 2^{2n} - 2^{2n} + 2^n \cdot 3^n \\ &= 3(3^{2n} - 2^{2n}) + 2^n(3^n - 2^n) && \text{1 bod} \\ &= 3(3^n - 2^n)(3^n + 2^n) + 2^n(3^n - 2^n) \\ &= (3^n - 2^n)(3^{n+1} + 2^{n+2}). && \text{3 boda} \end{aligned}$$

Da bi dobiveni umnožak bio prost broj, jedan od faktora mora biti jednak 1. 1 bod

Očito je $3^{n+1} + 2^{n+2} > 1$, pa mora biti $3^n - 2^n = 1$. 1 bod

Ako je $n \geqslant 2$, onda je $3^n - 2^n > 1$. 1 bod

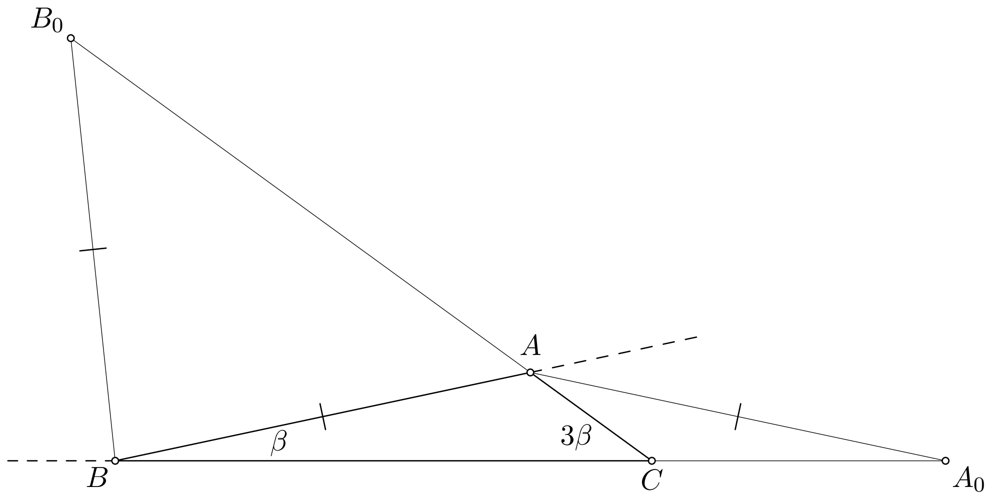
Za $n = 1$ vrijedi $3^n - 2^n = 1$, a promatrani broj je jednak 17 (prost broj). 1 bod

Zato je jedino rješenje $n = 1$. 1 bod

Zadatak A-1.7.

Neka je ABC trokut u kojem je najdulja stranica $\overline{BC}$, a kut $\sphericalangle BCA$ tri puta veći od kuta $\sphericalangle ABC$. Simetrala vanjskog kuta kod vrha A siječe pravac BC u točki A_0, a simetrala vanjskog kuta kod vrha B siječe pravac AC u točki B_0. Ako je $|AA_0| = |BB_0|$, odredi kutove danog trokuta.

Rješenje.



Označimo $\sphericalangle ABC = \beta$. Tada je $\sphericalangle BCA = 3\beta$.

Kut $\sphericalangle BAB_0$ je vanjski kut uz vrh A, pa je $\sphericalangle BAB_0 = 4\beta$. Zato je $\sphericalangle A_0AC = 2\beta$ (pravac AA_0 je simetrala kuta $\sphericalangle BAB_0$). 2 boda

Kut $\sphericalangle BCA$ je vanjski kut trokuta ACA_0, pa vrijedi

$$\sphericalangle AA_0C = \sphericalangle BCA - \sphericalangle A_0AC = 3\beta - 2\beta = \beta.$$ 1 bod

Primjećujemo da je trokut ABA_0 jednakokračan jer je $\sphericalangle AA_0B = \sphericalangle ABA_0 = \beta$. 1 bod

Zato vrijedi $|AB| = |AA_0|$.
Prema zadatku je $|AA_0| = |BB_0|$, pa slijedi $|AB| = |BB_0|$. 1 bod

Zato je trokut ABB_0 jednakokračan i vrijedi $\sphericalangle BAB_0 = \sphericalangle BB_0A$. 1 bod

Kako je $\sphericalangle BAB_0 = 4\beta$, treći kut tog trokuta je $\sphericalangle ABB_0 = 180° - 2\sphericalangle BAB_0 = 180° - 8\beta$.
No ujedno je $\sphericalangle ABB_0$ polovica vanjskog kuta uz vrh B, pa je $\sphericalangle ABB_0 = 90° - \frac{\beta}{2}$.

Dakle vrijedi

$$180° - 8\beta = 90° - \frac{\beta}{2},$$ 2 boda

odakle dobivamo $\beta = 12°$. 1 bod

Kutovi danog trokuta su $\sphericalangle ABC = 12°$, $\sphericalangle BCA = 36°$ i $\sphericalangle CAB = 132°$. 1 bod

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

27. siječnja 2014.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Učenici su odlučili igrati igru s ukupno 960 žetona. Najprije su podijelili sve žetone tako da svatko od njih ima isti broj žetona. Čim su to napravili, stigao je njihov nastavnik te je poželio priključiti se igri. Svaki učenik mu je dao po 4 žetona, pa su svi imali jednak broj žetona i bili su spremni za početak igre. Koliko učenika sudjeluje u igri?

Prvo rješenje.

Neka je n broj učenika.

Prema tvrdnji zadatka nastavnik je dobio $4n$ žetona, 1 bod

a isto toliko je ostalo i svakom učeniku. 1 bod

To znači da je početku svaki učenik imao $4n + 4$ žetona, 1 bod

a ukupan broj žetona je $n(4n + 4) = 960$, pa je $n(n + 1) = 240$. 1 bod

Rješenja dobivene kvadratne jednadžbe su $n_1 = -16$, $n_2 = 15$. 1 bod

Budući da n mora biti prirodni broj, jedina mogućnost je $n = 15$. 1 bod

U igri sudjeluje 15 učenika.

Drugo rješenje.

Neka je n broj učenika, a k broj žetona koje je svaki od njih na početku imao.

Prema tvrdnji zadatka vrijedi

$$nk = 960 \qquad \text{i} \qquad (n + 1)(k - 4) = 960.$$ 2 boda

Možemo raspisati $nk = nk + k - 4n - 4$, tj. $k = 4n + 4$. 1 bod

Zato vrijedi $960 = nk = n(4n + 4)$, tj. $240 = n(n + 1)$. 1 bod

Pozitivne djelitelje broja 240 možemo zapisati redom:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 12,\ 15,\ 16,\ 20,\ \ldots,\ 240.$$

Tražimo dva uzastopna prirodna broja čiji je umnožak 240. Može postojati najviše jedan takav par brojeva, a kako je $15 \cdot 16 = 240$, zaključujemo da je $n = 15$ jedino rješenje. U igri sudjeluje 15 učenika. 2 boda

Treće rješenje.

Neka je n broj učenika, a k broj žetona koje je svaki od njih na početku imao.
Vrijedi $nk = 960$. 1 bod

Nastavnik je dobio $4n$ žetona, pa vrijedi $4n = k - 4$. 1 bod

Vrijedi

$$(k-4) \cdot k = 4n \cdot k = 4 \cdot nk = 4 \cdot 960 = 3840.$$ 2 boda

Rješavanjem kvadratne jednadžbe vidimo da je jedino pozitivno rješenje $k = 64$, 1 bod

pa je $4n = 60$, $n = 15$. 1 bod

U igri sudjeluje 15 učenika.

Napomena: Ako učenik pogodi rješenje $n = 15$ jednadžbe $n^2 + n = 240$ (ili rješenje $k = 64$ jednadžbe $k^2 - 4k = 3840$), ali ne pokaže da je to jedino njeno rješenje u skupu prirodnih brojeva, može dobiti najviše 5 bodova.

Zadatak A-2.2.

Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$\left|z^2 - i\right| = 1 \quad \text{i} \quad |z| = \sqrt{2}.$$

Prvo rješenje.

Uvrstimo li $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$, uvjeti glase $|x^2 + 2xyi - y^2 - i| = 1$ i $|x + yi| = \sqrt{2}$, što je ekvivalentno s

$$(x^2 - y^2)^2 + (2xy - 1)^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 2.$$ 1 bod

Budući da vrijedi

$$(x^2 - y^2)^2 + (2xy - 1)^2 = (x^2 + y^2)^2 - 4xy + 1,$$ 1 bod

iz danih uvjeta slijedi da je $1 = 2^2 - 4xy + 1$, tj. $xy = 1$. 1 bod

Preostaje riješiti sustav

$$\begin{aligned} xy &= 1 \\ x^2 + y^2 &= 2. \end{aligned}$$

Primijetimo da vrijedi

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 2 - 2 \cdot 1 = 0.$$

Zato je $x = y$ i uvrštavanjem u prvu jednadžbu sustava dobivamo $x^2 = 1$. 2 boda

Imamo dva rješenja sustava: $x = y = 1$ i $x = y = -1$,
tj. traženi brojevi su $z = 1 + i$ i $z = -1 - i$. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju dolazimo do sustava $xy = 1$, $x^2 + y^2 = 2$. 3 boda

Kvadriranjem prve jednadžbe i uvrštavanjem $y^2 = 2 - x^2$ iz druge u prvu jednadžbu dobivamo

$$1 = x^2y^2 = x^2(2 - x^2),$$

tj. bikvadratnu jednadžbu $(x^2 - 1)^2 = 0$ iz koje slijedi $x^2 = 1$. 2 boda

Njena rješenja su $x = 1$ i $x = -1$. Iz $xy = 1$ lako izračunamo odgovarajuće vrijednosti y i dobivamo kompleksne brojeve $z = 1 + i$ i $z = -1 - i$. 1 bod

Treće rješenje.

Kao u prvom rješenju dolazimo do sustava $xy = 1$, $x^2 + y^2 = 2$. 3 boda

Uvrštavanjem $y = \dfrac{1}{x}$ u drugu jednadžbu dobivamo $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 2$.

Budući da prema A–G nejednakosti za svaki realan broj x vrijedi

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2,$$

a jednakost vrijedi ako i samo ako $x^2 = \frac{1}{x^2}$, zaključujemo da je $x^4 = 1$. 2 boda

Dalje nastavljamo kao u prethodnim rješenjima i dobivamo rješenja

$$z = 1 + i \quad \text{i} \quad z = -1 - i.$$ 1 bod

Napomena: Ako učenik dođe do sustava $xy = 1$, $x^2 + y^2 = 2$ i pogodi rješenja, ali ne obrazloži zašto su to jedina moguća rješenja, treba ukupno dobiti 4 boda.

Zadatak A-2.3.

Neka su a, b i c cijeli brojevi i $a \neq 0$. Može li diskriminanta kvadratne funkcije

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

biti jednaka 51?

Rješenje.

Diskriminanta promatrane kvadratne funkcije je $D = b^2 - 4ac$.

Pretpostavimo da je $D = b^2 - 4ac = 51$.

Tada je jasno da je broj b neparan. 1 bod

Kvadrat neparnog broja pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 1 (jer $(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$). 1 bod

Zato i $D = b^2 - 4ac$ daje pri dijeljenju sa 4 ostatak 1. 2 boda

No, broj 51 pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 3, pa nije moguće da je $D = 51$. 2 boda

Zadatak A-2.4.

Vrhovi peterokuta $ABCDE$ leže na istoj kružnici. Ako je $\sphericalangle CAD = 50^\circ$, odredi

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle AED.$$

Prvo rješenje.

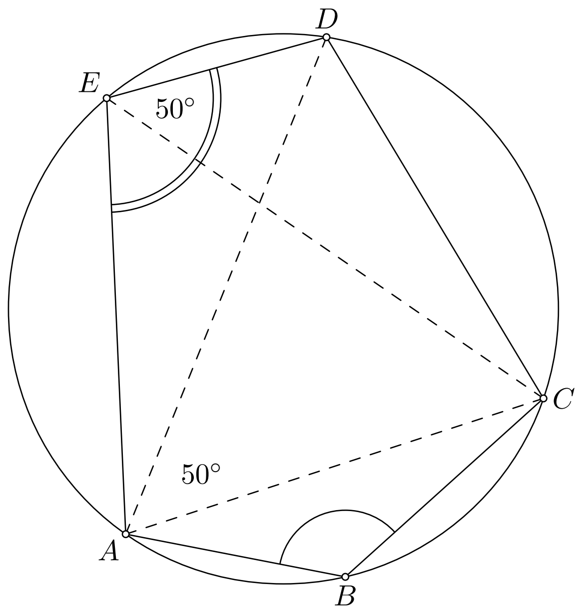
Kutovi $\sphericalangle CAD$ i $\sphericalangle CED$ su obodni kutovi nad istim lukom, pa vrijedi $\sphericalangle CED = \sphericalangle CAD = 50^\circ$. 1 bod

Četverokut $ABCE$ je tetivan, pa je $\sphericalangle ABC + \sphericalangle AEC = 180^\circ$. 1 bod

Zato vrijedi

$$\begin{aligned} \sphericalangle ABC + \sphericalangle AED &= \sphericalangle ABC + (\sphericalangle AEC + \sphericalangle CED) \\ &= (\sphericalangle ABC + \sphericalangle AEC) + \sphericalangle CED \\ &= 180^\circ + 50^\circ = 230^\circ. \end{aligned}$$

4 boda



Drugo rješenje.

Budući da je $ABCD$ tetivan četverokut vrijedi $\sphericalangle ABC = 180^\circ - \sphericalangle ADC$, 1 bod
a budući da je $ACDE$ tetivan četverokut vrijedi $\sphericalangle AED = 180^\circ - \sphericalangle ACD$. 1 bod

Vrijedi

$$\begin{aligned} \sphericalangle ABC + \sphericalangle AED &= (180^\circ - \sphericalangle ADC) + (180^\circ - \sphericalangle ACD) \\ &= 180^\circ + (180^\circ - \sphericalangle ADC - \sphericalangle ACD) \\ &= 180^\circ + \sphericalangle CAD, \end{aligned}$$

pri čemu smo iskoristili činjenicu da je zbroj kutova u trokutu ACD jednak 180°.

Dakle, $\sphericalangle ABC + \sphericalangle AED = 180^\circ + 50^\circ = 230^\circ$. 4 boda

Zadatak A-2.5.

Neka je A broj šesteroznamenkastih brojeva čiji je umnožak znamenki 105, a B broj šesteroznamenkastih brojeva čiji je umnožak znamenki 147. Odredi omjer $A : B$.

Prvo rješenje.

Rastavimo dane umnnoške na proste faktore: $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ i $147 = 3 \cdot 7 \cdot 7$.

Umnošci bilo kojih dvaju od brojeva 3, 5, 7 su dvoznamenkasti, pa svaki šesteroznamenkasti broj čiji je umnožak znamenki jednak 105 ima znamenke $1, 1, 1, 3, 5, 7$ u nekom poretku. 1 bod

Analogno, svaki šesteroznamenkasti broj čiji je umnožak znamenki jednak 147 ima znamenke $1, 1, 1, 3, 7, 7$ u nekom poretku. 1 bod

Ako u broju kojem je umnožak znamenki 147 odaberemo jednu od dvije znamenke 7 i zamijenimo je znamenkom 5, dobit ćemo broj kojem je umnožak znamenki 105. Zato je broj A dvostruko veći od broja B, tj. $A : B = 2 : 1$. 4 boda

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju, znamenke moraju biti $1, 1, 1, 3, 5, 7$, odnosno $1, 1, 1, 3, 7, 7$. 2 boda

Odredimo broj A. Znamenku 3 možemo staviti na bilo koje od 6 mjesta, znamenku 5 na bilo koje od preostalih 5 mjesta i znamenku 7 na bilo koje od preostalih 4 mjesta. Nakon toga su pozicije za znamenke 1 određene. Zato je $A = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. 1 bod

Odredimo broj B. Znamenku 3 možemo staviti na bilo koje od 6 mjesta, a dvije znamenke 7 možemo staviti na $\frac{5 \cdot 4}{2}$ načina. Naime, prvu znamenku 7 možemo staviti na jedno od 5 preostalih mjesta, a drugu na jedno od 4 preostala mjesta, no pritom ćemo isti broj brojati dvaput, jer je svejedno koja je znamenka 7 prva postavljena, a koja druga. Nakon toga na preostala tri mjesta dolaze znamenke 1. Zato je $B = 6 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 60$. 2 boda

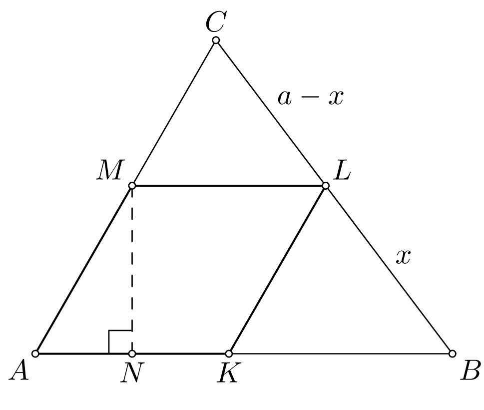
Konačno, $A : B = 120 : 60 = 2 : 1$. 1 bod

Zadatak A-2.6.

U trokut ABC upisan je romb $AKLM$ tako da točka K leži na $\overline{AB}$, točka L na $\overline{BC}$, a točka M na $\overline{CA}$. Ako je duljina stranice tog romba $2\sqrt{2}$, površina trokuta LMC iznosi 3, a površina trokuta KLB iznosi 4, dokaži da je $\sphericalangle BAC = 60°$.

Prvo rješenje.

Budući da je ML paralelno s AB slijedi da su kutovi u trokutima ABC i MLC isti, pa su ta dva trokuta slična. Analogno, trokuti KBL i ABC su slični. 1 bod



Neka je $|BC| = a$ i $|BL| = x$. Tada je $P(ABC) : P(KLB) = a^2 : x^2$. 1 bod

Također vrijedi

$$\frac{3}{4} = \frac{P(MLC)}{P(KBL)} = \frac{(a-x)^2}{x^2} = \left(\frac{a}{x} - 1\right)^2.$$ 2 boda

Zato je $\frac{a}{x} = 1 + \sqrt{\frac{3}{4}} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$ i vrijedi

$$P(ABC) = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot P(KLB) = \frac{4+4\sqrt{3}+3}{4} \cdot 4 = 7 + 4\sqrt{3}.$$ 2 boda

Iz ovoga slijedi $P(AKLM) = P(ABC) - P(KBL) - P(MLC) = 4\sqrt{3}$. 1 bod

Neka je N nožište visine romba iz vrha M na stranicu $\overline{AK}$. Tada je

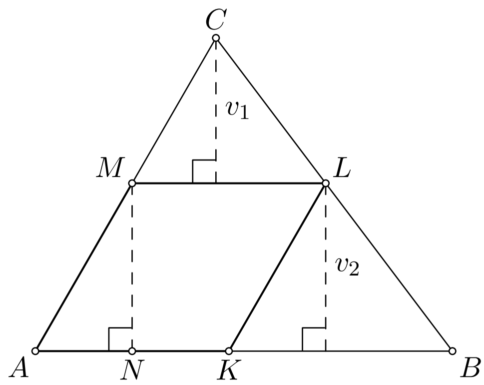
$$4\sqrt{3} = P(AKLM) = |MN| \cdot |AK| = |MN| \cdot 2\sqrt{2},$$

odnosno $|MN| = \sqrt{6}$. 1 bod

Nadalje, $|MN| : |AM| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pa je trokut AMN polovica jednakostraničnog trokuta i stoga vrijedi $\sphericalangle BAC = \sphericalangle MAN = 60°$. 2 boda

Drugo rješenje.

Neka je $|KB| = y$. S v_1 označimo duljinu visine trokuta MLC iz vrha C, a s v_2 duljinu visine trokuta KLB iz vrha L. Duljina visine trokuta ABC iznosi $v_1 + v_2$.



Koristeći zadane površine trokuta LMC i KLB dobivamo $P(LMC) = \frac{1}{2}|ML|v_1 = 3$, odnosno $v_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, te $P(KLB) = \frac{1}{2}yv_2 = 4$. 2 boda

Vrijedi $P(ABC) = P(AKLM) + P(KLB) + P(LMC)$. $(*)$ 1 bod

Kako je $P(AKLM) = |AK| \cdot v_2 = 2\sqrt{2}\,v_2$ i

$$P(ABC) = \frac{1}{2}|AB|(v_1 + v_2) = \frac{1}{2}(|AK| + |KB|)(v_1 + v_2) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2} + y\right)(v_1 + v_2),$$

iz $(*)$ dobivamo

$$\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2} + y\right)(v_1 + v_2) = 2\sqrt{2}\,v_2 + 4 + 3.$$ 2 boda

Budući da iz $\frac{1}{2}yv_2 = 4$ slijedi $y = \frac{8}{v_2}$, dobivamo jednadžbu s jednom nepoznanicom

$$\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2} + \frac{8}{v_2}\right)\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + v_2\right) = 2\sqrt{2}v_2 + 7,$$ 2 boda

čije je jedino pozitivno rješenje $v_2 = \sqrt{6}$. 1 bod

Neka je N nožište visine romba iz vrha M na stranicu $\overline{AK}$. Kako je $|MN| = v_2 = \sqrt{6}$, slijedi $|MN| : |AM| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Zato je AMN polovica jednakostraničnog trokuta, tj. $\sphericalangle BAC = \sphericalangle MAN = 60°$. 2 boda

Zadatak A-2.7.

Neka je a prirodni broj te b i c cijeli brojevi, takvi da jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ ima dva različita rješenja u intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}]$. Dokaži da je $a \geqslant 6$.

Prvo rješenje.

Jednadžba ima dva različita realna rješenja, pa je $D = b^2 - 4ac > 0$. 1 bod

Rješenja su $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.

Da bi oba rješenja bila u intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}]$ mora biti $0 < x_1 < x_2 \leqslant \frac{1}{2}$ odnosno

$$0 < \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad \text{i} \quad \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \leqslant \frac{1}{2}.$$ 2 boda

Prvi uvjet se, zbog $a > 0$ svodi na $-b > \sqrt{D}$. To povlači da je $b < 0$. 1 bod

Kvadriranjem dobivamo $b^2 > D = b^2 - 4ac$, odnosno $-4ac < 0$.

Kako je $a > 0$ mora biti i $c > 0$. 1 bod

Drugi uvjet, opet zbog $a > 0$, daje $-b + \sqrt{D} \leqslant a$.

Dakle $a + b \geqslant \sqrt{D} > 0$, tj. $a > -b > 0$. 1 bod

Sada iz $D > 0$ dobivamo $4c < \frac{b^2}{a} < \frac{b^2}{-b} = -b$. 2 boda

Zbog $c \geqslant 1$ vrijedi $-b > 4c \geqslant 4$, pa budući da je b cijeli broj vrijedi $-b \geqslant 5$. 1 bod

No, iz $a > -b$ sada dobivamo $a > 5$. Budući da je a cijeli broj vrijedi $a \geqslant 6$. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka su x_1 i x_2 rješenja dane jednadžbe. Prema Viѐteovim formulama vrijedi

$$0 < \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 \leqslant \frac{1}{4}.$$

Zaključujemo da je $c > 0$, a budući da je c pozitivan cijeli broj vrijedi $c \geqslant 1$. 1 bod

Također, zbog $a > 0$, zaključujemo da je $4c \leqslant a$. 1 bod

Zbog uvjeta zadatka je $0 < x_1 + x_2 \leqslant 1$, pa zbog druge Vièteove formule i zbog $a > 0$ vrijedi

$$0 < -\frac{b}{a} = x_1 + x_2 \leqslant 1, \text{ tj. } 0 < -b \leqslant a.$$ 1 bod

Kvadriranjem slijedi $b^2 \leqslant a^2$. 1 bod

Rješenja x_1 i x_2 su realna i različita, pa je diskriminanta $D = b^2 - 4ac$ pozitivna. 1 bod

Zato je $b^2 > 4ac \geqslant 16c^2 \geqslant 16$. 1 bod

Budući da je b cijeli broj slijedi $b^2 \geqslant 25$. 1 bod

Zato je $a^2 \geqslant b^2 \geqslant 25$, tj. $a \geqslant 5$. 1 bod

Ako pretpostavimo $a = 5$, onda je $25 = a^2 \geqslant b^2 > 4ac \geqslant 20$, pa je $b = -5$ i $c = 1$. 1 bod

Budući da jednadžba $5x^2 - 5x + 1 = 0$ ima rješenje $\frac{5+\sqrt{5}}{10} > \frac{1}{2}$, zaključujemo da a ne može biti 5. Dakle, $a \geqslant 6$. 1 bod

Treće rješenje.

Neka su x_1 i x_2 rješenja dane jednadžbe. Prema Vièteovim formulama vrijedi

$$\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 > 0,$$

pa je $c > 0$. 1 bod

Zbog druge Vièteove formule i zbog $a > 0$ vrijedi

$$0 < -\frac{b}{a} = x_1 + x_2 \leqslant 1, \text{ tj. } 0 < -b \leqslant a.$$ 1 bod

Kvadriranjem slijedi $b^2 \leqslant a^2$. 1 bod

Rješenja x_1 i x_2 su realna i različita, pa je diskriminanta $D = b^2 - 4ac$ pozitivna. 1 bod

Budući da su a i c pozitivni cijeli brojevi, zaključujemo da je $b^2 > 4ac \geqslant 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4$, pa budući da je b cijeli broj slijedi $b^2 \geqslant 9$. 1 bod

Zato je $a^2 \geqslant b^2 \geqslant 9$, tj. $a \geqslant 3$. 1 bod

Sada možemo zaključiti $b^2 > 4ac \geqslant 12$, pa je $b^2 \geqslant 16$. Zato je $a^2 \geqslant b^2 \geqslant 16$, tj. $a \geqslant 4$. 1 bod

Ponavljajući još jednom ovaj niz zaključivanja, dobivamo $b^2 > 4ac \geqslant 16$, pa vrijedi $a^2 \geqslant b^2 \geqslant 25$, tj. $a \geqslant 5$. 1 bod

Ako pretpostavimo da je $a = 5$, onda je $25 = a^2 \geqslant b^2 > 4ac \geqslant 20$, pa je $b = -5$ i $c = 1$. 1 bod

Budući da jednadžba $5x^2 - 5x + 1 = 0$ ima rješenje $\frac{5+\sqrt{5}}{10} > \frac{1}{2}$, zaključujemo da a ne može biti 5. Dakle, $a \geqslant 6$. 1 bod

Napomena: Jednadžba $6x^2 - 5x + 1 = 0$ ima rješenja $x_1 = \frac{1}{3}$ i $x_2 = \frac{1}{2}$, što pokazuje da je moguće da je $a = 6$.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

27. siječnja 2014.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Kolika je najmanja, a kolika najveća vrijednost koju postiže funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x) = \cos^2 x + \sin x$?

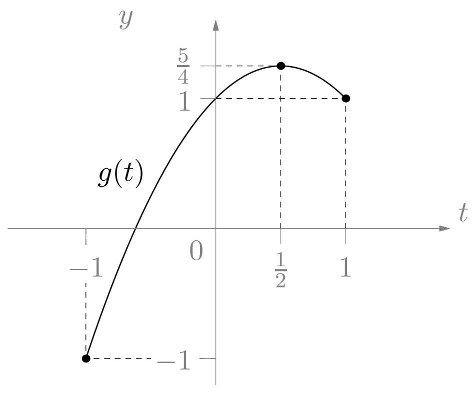
Prvo rješenje.

Uvrštavanjem $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ imamo $f(x) = -\sin^2 x + \sin x + 1$. 1 bod

Uz supstituciju $t = \sin x$ dobivamo funkciju $g(t) = -t^2 + t + 1$ za $t \in [-1, 1]$ koja ima istu najmanju i najveću vrijednost kao i funkcija f. 1 bod

Graf ove funkcije je kvadratna parabola s tjemenom u točki $t = \frac{1}{2}$. Prema tome, funkcija raste do točke $t = \frac{1}{2}$, a zatim pada. 1 bod

Najveća vrijednost se poprima u tjemenu i iznosi $\dfrac{5}{4}$. 1 bod



Najmanja vrijednost se poprima u lijevom ili desnom rubu domene. 1 bod

U lijevom rubu domene je vrijednost $g(-1) = -1$, a u desnom $g(1) = 1$, pa najmanja vrijednost funkcije iznosi -1. 1 bod

Drugo rješenje.

Uvrštavanjem $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ imamo $f(x) = -\sin^2 x + \sin x + 1$. 1 bod

Nadopunjavanjem do potpunog kvadrata dobivamo $f(x) = \dfrac{5}{4} - \left(\sin x - \dfrac{1}{2}\right)^2$. 2 boda

Zaključujemo da se najveća vrijednost postiže ako je $\sin x = \frac{1}{2}$ i iznosi $\frac{5}{4}$. 1 bod

Najmanja vrijednost se postiže kad je vrijednost $\left|\sin x - \frac{1}{2}\right|$ najveća. Budući da je $\sin x \in [-1, 1]$, to je za $\sin x = -1$ i najmanja vrijednost funkcije f je -1. 2 boda

Zadatak A-3.2.

Dokaži da je

$$\log_2\left(1+\frac{1}{1}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\log_2\left(1+\frac{1}{k}\right)+\cdots+\log_2\left(1+\frac{1}{2014}\right)<11.$$

Prvo rješenje.

Vrijedi

$$\log_2\left(1+\frac{1}{k}\right)=\log_2\left(\frac{k+1}{k}\right)=\log_2(k+1)-\log_2(k)\,.$$ 2 boda

Zbrajanjem takvih izraza za sve $k \in \{1,2,\ldots,2014\}$ imamo

$$\begin{aligned}&\log_2\left(1+\frac{1}{1}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_2\left(1+\frac{1}{2014}\right)\\&=(\log_2 2-\log_2 1)+(\log_2 3-\log_2 2)+(\log_2 4-\log_2 3)+\cdots+(\log_2 2015-\log_2 2014)\\&=\log_2 2015-\log_2 1=\log_2 2015.\end{aligned}$$ 2 boda

Budući da je $2015 < 2048 = 2^{11}$ slijedi $\log_2(2015) < 11$, pa vrijedi i tvrdnja zadatka. 2 boda

Drugo rješenje.

Zbog svojstava logaritama je

$$\begin{aligned}&\log_2\left(1+\frac{1}{1}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_2\left(1+\frac{1}{2014}\right)\\&=\log_2\left(\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2014}\right)\right)\end{aligned}$$ 2 boda

$$=\log_2\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{2015}{2014}\right)=\log_2(2015).$$ 2 boda

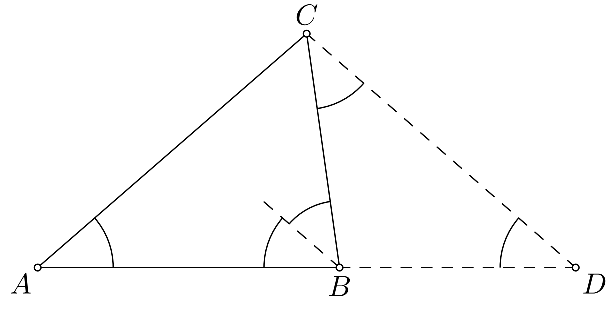
Budući da je $2015 < 2048 = 2^{11}$ slijedi $\log_2(2015) < 11$, pa vrijedi i tvrdnja zadatka. 2 boda

Zadatak A-3.3.

U trokutu ABC vrijedi $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle BAC$. Dokaži da je $|AC| < 2|BC|$.

Prvo rješenje.

Neka je $\sphericalangle BAC = \alpha$ i $\sphericalangle ABC = 2\alpha$.



Neka je D točka na polupravcu AB takva da je $|DB| = |BC|$.

Tada je trokut BCD jednakokračan, i $\sphericalangle CDB = \sphericalangle BCD$. Kako je zbroj tih kutova jednak vanjskom kutu $\sphericalangle ABC = 2\alpha$, slijedi $\sphericalangle CDB = \sphericalangle BAC = \alpha$. 2 boda

Sada vidimo da je trokut ACD jednakokračan, pa je $|CD| = |AC|$. 1 bod

Konačno, primijenimo nejednakost trokuta na trokut BCD:

$$|CD| < |BC| + |BD|, \qquad \text{odnosno} \qquad |AC| < 2|BC|,$$ 3 boda

što je i trebalo dokazati.

Drugo rješenje.

Označimo $|BC| = a$, $|AC| = b$, te $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$.

Iz sinusovog poučka slijedi $b = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\, a$. 2 boda

Prema tvrdnji zadatka je $\beta = 2\alpha$ pa vrijedi $\sin\beta = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. 1 bod

Uvrštavanjem u prethodnu jednakost dobivamo $b = a \cdot 2\cos\alpha$. 1 bod

Budući da je $\cos\alpha \leqslant 1$, slijedi $b \leqslant 2a$. 1 bod

Nije moguće da bude $b = 2a$, jer bi u tom slučaju vrijedilo $\alpha = 90^\circ$ i $\beta = 180^\circ$. 1 bod

Zadatak A-3.4.

Ako su p i $p^2 + 8$ prosti brojevi, dokaži da je i broj $p^3 + 4$ prost.

Prvo rješenje.

Ako je $p \neq 3$, tada imamo dva slučaja:

1) $p = 3k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Tada je $p^2 + 8 = 9k^2 + 6k + 9$ što je djeljivo sa 3.
2) $p = 3k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$. Tada je $p^2 + 8 = 9k^2 + 6k + 12$ što je također djeljivo sa 3.

U oba slučaja, $p^2 + 8$ ne može biti prost broj. 4 boda

Prema tome, jedina mogućnost da su p i $p^2 + 8$ prosti brojevi je $p = 3$ (tj. $p^2 + 8 = 17$) i u tom slučaju $p^3 + 4 = 31$ je također prost. 2 boda

Drugo rješenje.

Ako broj nije djeljiv sa 3, tada njegov kvadrat daje ostatak 1 pri dijeljenju sa 3. 2 boda

Zato je, za p koji nije djeljiv sa 3, broj $p^2 + 8$ djeljiv sa 3, pa p nije prost. 2 boda

Zaključujemo da je jedina mogućnost $p = 3$ i tada je $p^3 + 4 = 31$ zaista prost broj. 2 boda

Napomena: Ako učenik utvrdi da je $p = 3$ rješenje bez obrazloženja da ostali slučajevi nisu mogući, treba dobiti 2 boda.

Zadatak A-3.5.

Šahovska ploča je ploča s 8 redaka i 8 stupaca čija su polja obojana naizmjence crno-bijelo tako da je polje u prvom retku i prvom stupcu obojano crno. U svako polje šahovske ploče upisan je po jedan cijeli broj. Poznato je da je zbroj svih brojeva na bijelim poljima jednak 26, a zbroj svih brojeva u neparnim stupcima jednak 43.

Ako promijenimo predznake svih brojeva na bijelim poljima, koliki će biti zbroj svih brojeva u neparnim redcima nakon te promjene?

Rješenje.

Neka je C_s i B_s zbroj brojeva na crnim odnosno bijelim poljima u neparnim stupcima, te C_r i B_r zbroj brojeva na crnim odnosno bijelim poljima u neparnim redcima.

Uočimo da neparni redci i neparni stupci sadrže ista crna polja, pa je $C_r = C_s$. 2 boda

Uočimo da neparni redci i neparni stupci nemaju nijedno zajedničko bijelo polje, a zajedno pokrivaju sva bijela polja. Zato je $B_r + B_s = 26$. 2 boda

Iz zadatka znamo da vrijedi $C_s + B_s = 43$.

Nakon promjene predznaka na bijelim poljima, zbroj u neparnim redcima je

$$C_r - B_r = C_s - (26 - B_s) = C_s + B_s - 26 = 43 - 26 = 17.$$ 2 boda

Napomena: Dovoljno je da učenik riječima obrazloži rješenje. No, ako učenik napiše samo da je rješenje razlika zbroja brojeva u neparnim stupcima i zbroja brojeva na bijelim poljima, bez obrazloženja, treba dobiti 2 boda.

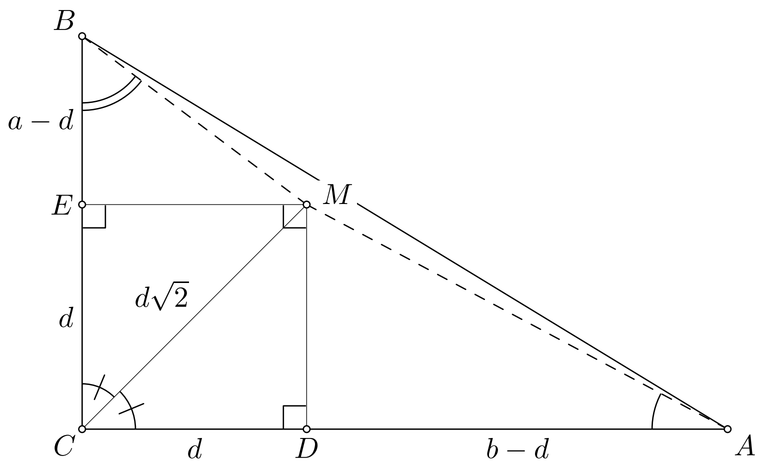
Zadatak A-3.6.

Dan je pravokutni trokut ABC. Na simetrali pravog kuta $\sphericalangle ACB$ odabrana je točka M. Ako vrijedi $\sin\sphericalangle MAC = \frac{8}{17}$ i $\cos\sphericalangle MBC = \frac{3}{5}$, odredi omjer $|AB| : |CM|$.

Prvo rješenje.

Neka su D i E nožišta okomica iz točke M na pravce AC i BC redom.

Tada je $CDME$ pravokutnik čija je dijagonala CM simetrala kuta $\sphericalangle ECD$. Dakle, $CDME$ je kvadrat. 2 boda



Označimo $\alpha = \sphericalangle MAC$, $\beta = \sphericalangle MBC$ te $a = |BC|$, $b = |AC|$ i $d = |CD|$.

Budući da je $CDME$ kvadrat, vrijedi $|CM| = d\sqrt{2}$. 1 bod

Budući da je $|AD| = b - d$, iz pravokutnog trokuta AMD vidimo da vrijedi

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b-d}{d}.$$ 1 bod

Analogno, $|BE| = a - d$, pa iz pravokutnog trokuta AMD vidimo da vrijedi

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{a-d}{d}.$$ 1 bod

Iz $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ slijedi $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{15}{8}$, pa iz $\frac{b-d}{d} = \frac{15}{8}$ slijedi $b = \frac{23}{8}d$. 1 bod

Iz $\cos\beta = \frac{3}{5}$ slijedi $\operatorname{ctg}\beta = \frac{3}{4}$, pa iz $\frac{a-d}{d} = \frac{3}{4}$ slijedi $a = \frac{7}{4}d$. 1 bod

Prema Pitagorinom poučku vrijedi

$$|AB|^2 = a^2 + b^2 = \left(\frac{7}{4}d\right)^2 + \left(\frac{23}{8}d\right)^2 = \left(\frac{7^2}{4^2} + \frac{23^2}{8^2}\right)d^2 = \frac{49\cdot 4 + 529}{8^2}d^2 = \frac{725}{64}d^2.$$ 2 boda

Konačno, zbog $|CM| = d\sqrt{2}$, traženi omjer je

$$\frac{|AB|}{|CM|} = \sqrt{\frac{725}{2\cdot 64}} = \frac{5\sqrt{29}}{8\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{58}}{16}.$$ 1 bod

Drugo rješenje.

Označimo $\sphericalangle MAC = \alpha$ i $\sphericalangle MBC = \beta$.

Promatrajući kutove trokuta AMC dobivamo $\sphericalangle AMC = 180^\circ - 45^\circ - \alpha = 135^\circ - \alpha$, a u trokutu BMC vrijedi $\sphericalangle BMC = 135^\circ - \beta$. 1 bod

Primjenom sinusovog poučka na trokut AMC dobivamo $\frac{|AC|}{|CM|} = \frac{\sin(135^\circ - \alpha)}{\sin\alpha}$, 2 boda

pa primjenom formule za sinus razlike slijedi

$$\frac{|AC|}{|CM|} = \frac{\sin 135^\circ \cos\alpha - \cos 135^\circ \sin\alpha}{\sin\alpha} = \sin 135^\circ \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \cos 135^\circ.$$ 1 bod

Kako je $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, slijedi da je $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ i $\frac{|AC|}{|CM|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{15}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{23\sqrt{2}}{16}$. 1 bod

Analogno, zaključujemo da je $\frac{|BC|}{|CM|} = \sin 135^\circ \frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \cos 135^\circ$. 1 bod

Zbog $\cos\beta = \frac{3}{5}$ slijedi $\sin\beta = \frac{4}{5}$ i $\frac{|BC|}{|CM|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{8}$. 1 bod

Primjenom Pitagorinog teorema slijedi

$$\frac{|AB|^2}{|CM|^2} = \frac{|AC|^2 + |BC|^2}{|CM|^2} = \frac{23^2\cdot 2}{16^2} + \frac{7^2\cdot 2}{8^2} = \frac{725}{128}, \quad \text{pa je} \quad \frac{|AB|}{|CM|} = \frac{5\sqrt{29}}{8\sqrt{2}}.$$ 3 boda

Zadatak A-3.7.

Dokaži da među bilo kojih sedam kvadrata prirodnih brojeva postoje dva čija je razlika djeljiva sa 20.

Prvo rješenje.

Dokazat ćemo da postoje dva kvadrata koji daju isti ostatak pri dijeljenju sa 20. 1 bod

Svaki prirodan broj može se zapisati u obliku $n = 20m + k$, $k = 0, \ldots, 19$ pa je $n^2 = 400m + 40mk + k^2$ i n^2 daje isti ostatak pri dijeljenju sa 20 kao i k^2. Zato je dovoljno provjeriti koje sve ostatke pri dijeljenju sa 20 daju kvadrati brojeva $0, \ldots, 19$. 3 boda

Direktnom provjerom vidimo da su jedini mogući ostaci $0, 1, 4, 5, 9$ i 16. 3 boda

Budući da imamo 7 kvadrata, a 6 mogućih ostataka, prema Dirichletovom principu postoje dva kvadrata koji daju isti ostatak pri dijeljenju sa 20. 3 boda

Drugo rješenje.

Dokazat ćemo da postoje dva kvadrata koji daju isti ostatak pri dijeljenju sa 4 i isti ostatak pri dijeljenju sa 5, iz čega slijedi da je njihova razlika djeljiva s oba broja pa onda i sa 20. 1 bod

Da bismo odredili moguće ostatke pri dijeljenju kvadrata prirodnih brojeva sa 5 dovoljno je promotriti kvadrate brojeva $0, 1, 2, 3, 4$. Jedini mogući ostaci su $0, 1$ i 4. 3 boda

Budući da imamo 7 kvadrata, a 3 moguća ostatka, prema Dirichletovom principu postoje tri kvadrata koja daju isti ostatak pri dijeljenju sa 5. 2 boda

Jedini mogući ostaci pri dijeljenju kvadrata sa 4 su 0 i 1. 2 boda

Opet prema Dirichletovom principu, od tri kvadrata koja daju isti ostatak pri dijeljenju sa 5 postoje dva koja daju isti ostatak pri dijeljenju sa 4. 2 boda

Treće rješenje.

Zapišimo razliku kvadrata kao $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Ako su a i b iste parnosti, tada su $a - b$ i $a + b$ parni, pa je $a^2 - b^2$ djeljivo sa 4. 3 boda

Prema Dirichletovom principu, od 7 brojeva postoje 4 iste parnosti. 2 boda

Dokazat ćemo da među ta 4 broja postoje a i b takvi da je jedan od faktora $a - b$ i $a + b$ djeljiv sa 5.

Ako dva od ta 4 broja daju isti ostatak pri dijeljenju sa 5, tada je njihova razlika djeljiva sa 5, pa je i razlika kvadrata djeljiva sa 5. 2 boda

Ako nikoja dva broja ne daju isti ostatak, tada daju 4 različita ostatka iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Tada ili postoje ostaci 1 i 4, ili postoje ostaci 2 i 3. U oba slučaja, njihov zbroj je djeljiv s 5, pa je razlika kvadrata djeljiva sa 5. 3 boda

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

27. siječnja 2014.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Nikola je zamislio pet brojeva. Prvi broj koji je zamislio je -2, a peti je 6. Prva četiri broja su uzastopni članovi aritmetičkog niza, a zadnja tri su uzastopni članovi geometrijskog niza. Koje je brojeve Nikola zamislio?

Prvo rješenje.

Neka je razlika aritmetičkog niza d.

Tada su prva četiri broja $-2,\ -2+d,\ -2+2d,\ -2+3d$. 1 bod

Kako su $-2+2d$, $-2+3d$ i 6 uzastopni članovi geometrijskog niza, vrijedi

$$\frac{6}{-2+3d}=\frac{-2+3d}{-2+2d}.$$ 2 boda

Sređivanjem dobivamo

$$(-2+3d)^2=6\cdot(-2+2d),$$
$$9d^2-24d+16=0,$$

odakle je $d=\dfrac{4}{3}$. 2 boda

Nikola je zamislio brojeve $-2,\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ 2,\ 6$. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je kvocijent geometrijskog niza $\dfrac{1}{q}$.

Zadnja tri broja čine geometrijski niz, pa je četvrti zamišljeni broj je $6q$, a treći $6q^2$. 1 bod

No, to su ujedno zadnja dva člana aritmetičkog niza, što znači da je razlika aritmetičkog niza jednaka $d=6q-6q^2$. 1 bod

No, razlika trećeg i prvog broja jednaka je $2d$. Zato imamo

$$-2+2\left(6q-6q^2\right)=6q^2.$$ 1 bod

Rješavanjem dobivamo $q=\frac{1}{3}$. 2 boda

Nikola je zamislio brojeve $-2,\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ 2,\ 6$. 1 bod

Treće rješenje.

Neka su brojevi koje je Nikola zamislio redom -2, x, y, z, 6.

Budući da zadnja tri broja čine geometrijski niz, vrijedi $z^2 = 6y$. 1 bod

Prva četiri broja čine aritmetički niz, pa je $y - (-2) = 2(z - y)$ odnosno $3y = 2z - 2$. 2 boda

Zato je

$$z^2 = 6y = 4z - 4 \qquad \text{iz čega slijedi} \qquad (z-2)^2 = 0, \quad \text{tj.} \quad z = 2.$$ 2 boda

Zbog $3y = 2z - 2$ i $z + x = 2y$ je $x = -\frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}$. 1 bod

Nikola je zamislio brojeve $-2, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, 2, 6$.

Zadatak A-4.2.

Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$\sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \sqrt{(n-2) + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} < \sqrt{n} + 1.$$

Rješenje.

Zbog jednostavnosti zapisa uvedimo oznaku

$$A_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \sqrt{(n-2) + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}.$$

Nejednakost ćemo dokazati matematičkom indukcijom.

Baza : Za $n = 1$ vrijedi $A_1 = \sqrt{1} < \sqrt{1} + 1$.

Korak : Pretpostavimo da za neki prirodan broj n vrijedi $A_n < \sqrt{n} + 1$.

Vrijedi $A_{n+1} = \sqrt{(n+1) + A_n}$. 1 bod

Zbog pretpostavke indukcije zaključujemo $A_{n+1} < \sqrt{n + 1 + \sqrt{n} + 1}$. 2 boda

Slijedi da je

$$\begin{aligned} A_{n+1} < \sqrt{n+1+\sqrt{n}+1} &< \sqrt{n+1+2\sqrt{n+1}+1} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{n+1}+1\right)^2} = \sqrt{n+1}+1. \end{aligned}$$ 2 boda

Budući da je $A_1 < \sqrt{1} + 1$ i da iz $A_n < \sqrt{n} + 1$ slijedi $A_{n+1} < \sqrt{n+1} + 1$, po principu matematičke indukcije zaključujemo da je za svaki prirodni broj $A_n < \sqrt{n} + 1$. 1 bod

Napomena: Ako učenik ne provjeri bazu indukcije, gubi 2 boda.

Zadatak A-4.3.

Za realni broj a, neka je $\mathcal{P}_a$ parabola s jednadžbom $y = x^2 + ax + (2014 - a)$.
Dokaži da sve parabole $\mathcal{P}_a$ prolaze istom točkom.

Prvo rješenje.

Uvrstimo li $x = 1$ u jednakost $y = x^2 + ax + (2014 - a)$, dobit ćemo $y = 2015$ za bilo koji realni broj a. Zato sve parabole prolaze točkom $(1, 2015)$. 6 bodova

Drugo rješenje.

Neka su a i b različiti realni brojevi. Parabole $\mathcal{P}_a$ i $\mathcal{P}_b$ sijeku se u točki (x, y) koja zadovoljava sustav

$$\begin{aligned} y &= x^2 + ax + (2014 - a) \\ y &= x^2 + bx + (2014 - b). \end{aligned}$$

2 boda

Oduzimanjem tih jednadžbi dobivamo $0 = (a-b)x-(a-b)$, odnosno $(a-b)(x-1) = 0$. Zato je presjek te dvije parabole točka $(x, y) = (1, 2015)$. 2 boda

Budući da su a i b proizvoljni realni brojevi, zaključujemo da sve parabole prolaze točkom $(1, 2015)$. 2 boda

Treće rješenje.

Promotrimo parabole $\mathcal{P}_a$ za dva konkretna broja a, recimo $a = 2014$ i $a = 0$. 1 bod

Njihovo sjecište je točka (x, y) koja zadovoljava sustav

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2014x \\ y &= x^2 + 2014. \end{aligned}$$

1 bod

Oduzimanjem tih jednadžbi dobivamo $2014(x - 1) = 0$, tj. $x = 1$ i $y = 2015$. 2 boda

Uvrštavanjem dobivene točke $(1, 2015)$ u jednadžbu $y = x^2 + ax + (2014 - a)$ dobivamo $2015 = 1 + a + (2014 - a)$ što zaista vrijedi za sve $a \in \mathbb{R}$. 2 boda

Dakle, točka $(1, 2015)$ leži na svim promatranim parabolama (neovisno o broju a).

Zadatak A-4.4.

Tamara je na ploču napisala paran prirodan broj. Nakon toga je, jednog za drugim, napisala još dvanaest brojeva tako da je svaki broj za 5 veći od kvadrata prethodno napisanog broja. Odredi kojom znamenkom može završiti posljednji napisani broj.

Prvo rješenje.

Ako na početku napisani broj završava s 0, onda će u sljedećem koraku završavati sa 5 ($0^2 + 5 = 5$), pa onda opet sa 0 ($5^2 + 5 = 30$) i to će se periodično ponavljati. Nakon 12 koraka broj će završavati sa 0. 1 bod

Ako na početku napisani broj završava sa 4 ili 6, onda će u sljedećem koraku završavati sa 1 ($4^2 + 5 = 21$, $6^2 + 5 = 41$), pa onda opet sa 6 ($1^2 + 5 = 6$) i to će se također periodično ponavljati. Nakon 12 koraka ostat će broj koji završava sa 6. 2 boda

Ako na početku napisani broj završava sa 2 ili 8, onda će u sljedećem koraku završavati sa 9 ($2^2 + 5 = 9$, $8^2 + 5 = 69$), pa onda sa 6 ($9^2 + 5 = 86$), pa opet sa 1, 6 itd. Nakon 12 koraka opet nam ostane broj koji završava sa 6. 2 boda

Dakle, na kraju se na ploči može nalaziti broj koji završava znamenkom 0 ili 6. 1 bod

Drugo rješenje.

Kvadrat parnog prirodnog broja završava znamenkom 0, 4 ili 6.

Kada takvom broju dodamo 5, zadnja znamenka je 5, 9 ili 1. 1 bod

Zato drugi napisani broj na ploči završava jednom od znamenaka 1, 5, 9.

Kvadrat takvog broja završava znamenkom 1 ili 5, a kada dodamo 5 zadnja znamenka je 6 ili 0. 1 bod

Ako kvadrat završava sa 6 ili 0, nakon dodavanja broja 5 dobivamo 1 ili 5. 1 bod

Kvadrat takvog broja završava opet sa 1 ili 5, a nakon uvećanja za 5 sa 6 ili 0.

Ovaj način razmišljanja možemo nastaviti i vidimo da su nakon drugog, četvrtog, šestog, osmog i desetog koraka moguće zadnje znamenke 0 ili 6, a nakon trećeg, petog, sedmog, devetog i jedanaestog koraka moguće su zadnje znamenke 1 ili 5. 2 boda

Nakon 12 koraka, dobit će se broj koji završava znamenkom 0 ili 6. 1 bod

Zadatak A-4.5.

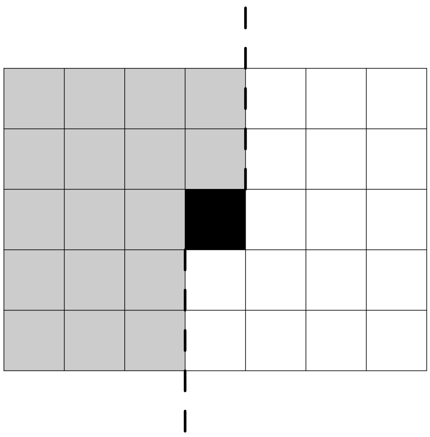
Na ploči dimenzija 5×7 kojoj su sva polja bijela, potrebno je obojati točno 17 polja crnom bojom tako da nastali raspored crnih i bijelih polja na ploči bude centralnosimetričan, tj. da se ne mijenja rotacijom za $180°$ oko središta ploče. Na koliko je načina to moguće napraviti?

Rješenje.

Ako je neko polje crno, onda i njemu centralnosimetrično polje (u odnosu na središte ploče) mora također biti crno, i analogno za bijela polja. Dakle, sva polja osim središnjeg mogu se podijeliti na parove centralnosimetričnih polja koja su iste boje. 2 boda

Kako je ukupan broj crnih polja (17) neparan broj, središnje polje mora biti obojano u crno. 1 bod

Ostalih 16 crnih polja dolazi u osam parova centralnosimetričnih polja.



Podijelimo li ploču bez središnjeg polja na dva dijela koja su međusobno centralnosimetrična (npr. kao na slici) onda u svakom od tih dijelova točno 8 od 17 polja mora biti obojano crnom bojom. 1 bod

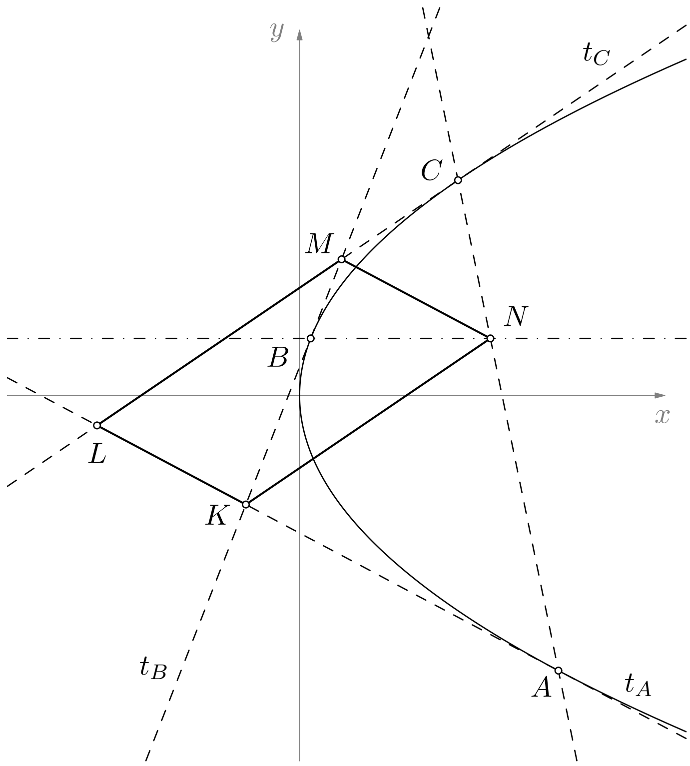
Bilo kojim odabirom crnih polja u jednom dijelu jednoznačno su određena crna polja u drugom dijelu. Rješenje je broj načina da odaberemo 8 od 17 polja, a to je $\binom{17}{8}$. 2 boda

Napomena: $\binom{17}{8}$ iznosi 24 310, no to nije potrebno računati.

Zadatak A-4.6.

Točkama A, B i C parabole povučene su tangente na tu parabolu. One se u parovima sijeku u točkama K, L i M tako da je KL tangenta u točki A, KM tangenta u točki B, a LM tangenta u točki C. Presjek pravca AC i paralele s osi parabole kroz točku B je točka N. Dokaži da je četverokut $KLMN$ paralelogram.

Prvo rješenje.



Postavimo koordinatni sustav tako da je pravac $y = 0$ os parabole. Tada je jednadžba parabole $y^2 = 2px$. Tangente na parabolu kroz točke $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ i $C(x_C, y_C)$ imaju jednadžbe

$$\begin{aligned} t_A \ldots \quad & y_A y = px + px_A, \\ t_B \ldots \quad & y_B y = px + px_B, \\ t_C \ldots \quad & y_C y = px + px_C. \end{aligned}$$ 1 bod

Točka K je sjecište tangenti t_A i t_B, pa rješavanjem sustava koji se sastoji od prve dvije jednadžbe dobivamo

$$y_K = \frac{p(x_A - x_B)}{y_A - y_B}, \qquad x_K = \frac{y_A(x_A - x_B)}{y_A - y_B} - x_A.$$ 1 bod

Paralela s osi parabole koja prolazi kroz točku B ima jednadžbu $y = y_B$, a pravac AC ima jednadžbu

$$AC \ldots \quad (x_C - x_A)(y - y_A) = (y_C - y_A)(x - x_A).$$ 1 bod

Koordinate točke N su $y_N = y_B$ i

$$x_N = \frac{(y_B - y_A)(x_C - x_A)}{y_C - y_A} + x_A.$$

Dakle, imamo točku $N\left(\frac{(y_B-y_A)(x_C-x_A)}{y_C-y_A} + x_A, y_B\right)$. 1 bod

Kako točke A, B i C leže na paraboli, vrijedi $x_A = \frac{y_A^2}{2p}$, $x_B = \frac{y_B^2}{2p}$ i $x_C = \frac{y_C^2}{2p}$. 1 bod

Uvrštavanjem u koordinate točke K, dobivamo

$$K\left(\frac{y_A \cdot \frac{1}{2p}(y_A^2 - y_B^2)}{y_A - y_B} - \frac{y_A^2}{2p}, \frac{p \cdot \frac{1}{2p}(y_A^2 - y_B^2)}{y_A - y_B}\right),$$

odnosno $K\left(\frac{y_A y_B}{2p}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$. Analogno dobivamo $L\left(\frac{y_C y_A}{2p}, \frac{y_C + y_A}{2}\right)$ i $M\left(\frac{y_B y_C}{2p}, \frac{y_B + y_C}{2}\right)$. 1 bod

Uvrštavanjem u koordinate točke N dobivamo

$$N\left(\frac{(y_B - y_A) \cdot \frac{1}{2p}(y_C^2 - y_A^2)}{y_C - y_A} + \frac{y_A^2}{2p}, y_B\right),$$

odnosno $N\left(\frac{y_A y_B + y_B y_C - y_A y_C}{2p}, y_B\right)$. 1 bod

Na kraju,

$$\begin{aligned}
|MN|^2 &= (x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 \\
&= \frac{1}{4p^2}(y_A y_B - y_A y_C)^2 + \frac{1}{4}(y_B - y_C)^2 \\
&= (x_L - x_K)^2 + (y_L - y_K)^2 \\
&= |KL|^2.
\end{aligned}$$ 2 boda

Time smo dobili da je $|MN| = |KL|$, a analogno se dobije da je $|KN| = |LM|$, čime smo dokazali da je četverokut $KLMN$ paralelogram. 1 bod

Napomena: U zadnjem koraku smo zapravo izračunali vektore

$$\overrightarrow{KL} = \left(\frac{y_A y_C - y_A y_B}{2p}, \frac{y_C - y_B}{2}\right) = \overrightarrow{NM},$$

što je dovoljno da bismo zaključili da je $KLMN$ paralelogram.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju dolazimo do koordinata točaka $K\left(\frac{y_A y_B}{2p}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$, $L\left(\frac{y_A y_C}{2p}, \frac{y_A+y_C}{2}\right)$, $M\left(\frac{y_B y_C}{2p}, \frac{y_B+y_C}{2}\right)$ i $N\left(\frac{y_B y_A+y_B y_C-y_A y_C}{2p}, y_B\right)$. 7 bodova

Da bismo dokazali da je četverokut $KLMN$ paralelogram, dovoljno je dokazati da se njegove dijagonale raspolavljaju, tj. da se polovišta dužina $\overline{LN}$ i $\overline{KM}$ podudaraju. 1 bod

Direktnim računom možemo utvrditi da vrijedi

$$\left(\frac{x_L+x_N}{2}, \frac{y_L+y_N}{2}\right) = \left(\frac{y_B y_A + y_B y_C}{2p}, \frac{y_A+2y_B+y_C}{2}\right) = \left(\frac{x_K+x_M}{2}, \frac{y_K+y_M}{2}\right),$$

čime je tvrdnja dokazana. 2 boda

Treće rješenje.

Kao u prvom rješenju dolazimo do koordinata točaka $K\left(\frac{y_A y_B}{2p}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$, $L\left(\frac{y_A y_C}{2p}, \frac{y_A+y_C}{2}\right)$, $M\left(\frac{y_B y_C}{2p}, \frac{y_B+y_C}{2}\right)$ i $N\left(\frac{y_B y_A+y_B y_C-y_A y_C}{2p}, y_B\right)$. 7 bodova

Da bismo dokazali da je četverokut $KLMN$ paralelogram, dovoljno je provjeriti da su mu stranice paralelne, tj. da je $KN \parallel LM$ i $KL \parallel MN$. 1 bod

Pravac KL je tangenta u točki A. Ako je $y_A = 0$, onda je t_A okomito na x-os. Tada su x-koordinate točaka M i N jednake $\frac{y_B y_C}{2p}$, pa je MN okomit na x-os i $KL \parallel MN$. 1 bod

Ako je $y_A \neq 0$, onda KL ima koeficijent smjera jednak $\frac{p}{y_A}$, a pravac MN ima koeficijent smjera jednak

$$\frac{y_B - \frac{y_B+y_C}{2}}{\frac{y_B y_A+y_B y_C-y_A y_C}{2p} - \frac{y_B y_C}{2p}} = \frac{p(y_B-y_C)}{y_A(y_B-y_C)} = \frac{p}{y_A}.$$

Usporedbom njihovih koeficijenata smjera zaključujemo da je $KL \parallel MN$. Analogno dokazujemo $LM \parallel KN$. 1 bod

Napomena: Tvrdnja zadatka ne ovisi o međusobnom odnosu točaka A, B i C, što se vidi iz rješenja.

Zadatak A-4.7.

Višnja je odlučila napisati na ploču sve prirodne brojeve od 1 do 2014 u nekom poretku. Višnjin brat Marijan će između svaka dva susjedna broja napisati apsolutnu vrijednost njihove razlike, a zatim sve početne brojeve obrisati. Ovaj postupak Marijan će ponavljati sve dok na ploči ne ostane samo jedan broj.

Odredi najveći mogući broj koji na kraju može ostati na ploči.

Rješenje.

Uočimo da se najveći broj na ploči ni u jednom koraku ne može povećati, jer za nenegativne brojeve x i y vrijedi

$$|x-y| \leqslant \max\{x, y\}.$$ 2 boda

Budući da su na početku na ploči zapisani brojevi 1, 2, ..., 2014, nakon prvog koraka najveći mogući broj na ploči je 2013, a najmanji mogući je 1. 1 bod

To znači da je nakon drugog koraka najveći mogući broj na ploči 2012, pa broj koji ostane na kraju ne može biti veći od 2012. 1 bod

Tvrdimo da je najveći broj koji može ostati na ploči broj 2012. 2 boda

Treba još pokazati se to zaista može dogoditi.

Ako Višnja na početku zapiše brojeve u ovakvom poretku:

$$2014,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad 2012,\quad 2013,$$

tada su nakon prvog koraka na ploči brojevi:

$$2013,\quad 1,\quad 1,\quad \ldots,\quad 1,\quad 1,$$

a nakon drugog koraka:

$$2012,\quad 0,\quad 0,\quad \ldots,\quad 0.$$

U svakom sljedećem koraku je jedna nula manje, dok na kraju na ploči ne ostane samo broj 2012. 4 boda