Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

27. siječnja 2014.

1. (6) Rastavite sljedeći izraz na faktore koji se više ne mogu faktorizirati

$$x(x^2-2)+4-\frac{1}{2}(x+2)^2.$$

2. (6) Ako je $\left[\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):\left((a+b)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\right)-\frac{a}{b}\right]:\left(\frac{a}{b}+1\right)=\frac{1}{2014}$, koliko je $\frac{a}{b}$?

3. (6) Majstor Zvonko razrezao je šipku duljine 30 cm na tri dijela kako bi od tih dijelova napravio pravokutni trokut. Zvonko je prvo razrezao šipku na dva dijela od kojih je jedan kraći za 6cm i njega uzeo za jednu katetu. Odredite duljine sva tri dijela na koje je Zvonko razrezao šipku.

4. (6) U šiljastokutnom trokutu ABC visina iz vrha C dijeli nasuprotnu stranicu na dva dijela $\overline{AD}$ i $\overline{DB}$ kojima su duljine $|\overline{AD}|=4\text{cm}$ i $|\overline{DB}|=1\text{cm}$. Mjera kuta pri vrhu A iznosi 60°. Odredite duljine stranica trokuta ABC i duljinu visine iz vrha A tog trokuta.

5. (6) U škrinjici je bilo 111 zlatnika. Nakon toga je svake noći Crnobradi iz škrinjice uzeo 10 zlatnika, a Modrobradi je u nju stavio 15 zlatnika. Može li nakon nekog broja noći u škrinjici biti točno 2014 zlatnika? Obrazložite!

6. (10) Zbroj duljina dijagonala romba je 84 cm. Produžimo li jednu dijagonalu za 4 cm, a drugu dijagonalu skratimo za 4 cm, površina romba će se povećati za 16 cm^2. Izračunajte duljinu stranice i duljine dijagonala tog romba.

7. (10) U gradu budućnosti za prijevoz stanovnika koriste se super vlakovi. Oni se sastoje od vagona s različitim brojem odjeljaka, a svaki od njih ima određeni broj dvostrukih sjedišta. Prvi vagon ima samo jedan odjeljak s jednim dvostrukim sjedištem. Na njega se priključuje vagon koji ima jedan odjeljak više u kojemu su dva dvostruka sjedišta više nego u prvom odjeljku i tako dalje. Svaki je sljedeći vagon povećan za jedan odjeljak sa dva dvostruka sjedišta više nego u prethodnom odjeljku. Koliko putnika stane u n-ti vagon? Koliko putnika stane u 10. vagon?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

27. siječnja 2014.

1. (6) Odredite sva rješenja jednadžbe $(x+1)^2(x-4)^2+4(x^2-3x-4)=0$.

2. (6) Dvije se kružnice dodiruju izvana. Njihove vanjske zajedničke tangente zatvaraju pravi kut. Ako je polumjer manje kružnice 5 cm, izračunajte polumjer veće kružnice.

3. (6) Jedno rješenje jednadžbe $x^2-2x+k=0$ kvadrat je drugog rješenja. Odredite sve vrijednosti broja k za koje to vrijedi.

4. (6) Neka je $f(x)$ kvadratna funkcija takva da je

$$x^2-2x+2 \leq f(x) \leq 2x^2-4x+3,$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Ako je $f(11)=181$, koliko je $f(16)$?

5. (6) Površina kvadrata $ABCD$ iznosi 256cm^2. Na stranici $\overline{AD}$ odaberemo točku E, a stranicu $\overline{DC}$ produžimo preko vrha C do točke F tako da je kut $\measuredangle FBE$ pravi kut. Izračunajte duljinu produžetka $\overline{CF}$, ako površina trokuta EBF iznosi 200cm^2.

6. (10) Dvojica biciklista krenula su istovremeno iz dva mjesta A i B jedan drugome u susret. Kada su se nakon jednog sata susreli, prvi je prešao 10 km puta više nego drugi. Prvi je biciklist došao 50 minuta ranije u mjesto B, nego drugi biciklist u mjesto A. Kolika je udaljenost između mjesta A i B?

7. (10) Izračunajte površinu onog dijela kompleksne ravnine u kojem se nalaze svi kompleksni brojevi z za koje vrijedi $\operatorname{Im}(z^2) \leq \operatorname{Re}(z)$ i $|z| \leq 1$.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

27. siječnja 2014.

1. Izračunajte
(6)
$$\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}.$$

2. Odredite najmanju i najveću vrijednost funkcije
(6)
$$f(x)=2\sin x-\cos(2x).$$

3. Broj n je najmanji pozitivan višekratnik broja 15 kojemu su sve znamenke 0 ili 8.
(6) Odredite najveći prosti broj s kojim je broj n djeljiv.

4. Odredite sve vrijednosti pozitivnog realnog broja k za koje jednadžba
(6)
$$\frac{\log(kx)}{\log(x+1)}=2$$
ima točno jedno rješenje.

5. Kocka je određena svojim vrhovima $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Odredite omjer obujma
(6) tetraedra ACB_1D_1 i obujma dane kocke. U kojem su omjeru njihova oplošja?

6. Riješite jednadžbu
(10)
$$\left(\frac{\sin 1+\sin 3+\sin 5+\sin 7}{\cos 1+\cos 3+\cos 5+\cos 7}\right)^{\frac{1}{19x}-107}=\frac{1}{\operatorname{tg} 4}.$$

7. Dokažite da za sve realne brojeve a vrijedi nejednakost
(10)
$$3(1+a^2+a^4)-(1+a+a^2)^2\geq 0.$$
Za koje realne brojeve a vrijedi jednakost?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

27. siječnja 2014.

1. (6) Dokažite da je zbroj $\binom{n+k}{2} + \binom{n+k+1}{2}$ potpuni kvadrat.

2. (6) Koliko je članova u razvoju binoma $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right)^{100}$, $x > 0$, u kojima x ima pozitivan eksponent, a koliko onih u kojima je eksponent od x paran i pozitivan cijeli broj?

3. (6) Riješite jednadžbu $\log_5(\cos x) + \log_{0.2}(-\sin x) = 0$ na intervalu $[0, 2\pi]$.

4. (6) Tjemena elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, na osi apscisa, su ujedno i fokusi hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, a tjemena te hiperbole su ujedno i fokusi dane elipse. Odredite tangens kuta koji zatvaraju asimptote hiperbole.

5. (6) Dokažite da sljedeća jednakost vrijedi za sve prirodne brojeve n.

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}$$

6. (10) Duljine stranica trokuta su uzastopni prirodni brojevi (u centimetrima). Najveći kut trokuta je dvostruko veći od najmanjeg. Odredite obujam tijela koje nastaje rotacijom trokuta oko najdulje stranice.

7. (10) Odredite sve prirodne brojeve n takve da vrijednost sljedećeg izraza

$$\left(\frac{1 + i \operatorname{tg} \frac{\pi}{38n}}{1 - i \operatorname{tg} \frac{\pi}{38n}}\right)^{2014}$$

bude realan broj.