ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

27. siječnja 2014.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1. Rastavite sljedeći izraz na faktore koji se više ne mogu faktorizirati

$$x(x^2-2)+4-\frac{1}{2}(x+2)^2.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
x(x^2-2)+4-\frac{1}{2}(x+2)^2 &= x^3-2x+4-\frac{1}{2}x^2-2x-2 \\
&= x^3-4x-\frac{1}{2}x^2+2 && \text{(1 bod)} \\
&= x(x^2-4)-\frac{1}{2}(x^2-4) && \text{(1 bod)} \\
&= (x^2-4)(x-\frac{1}{2}) && \text{(2 boda)} \\
&= (x-2)(x+2)(x-\frac{1}{2}) && \text{(2 boda)}
\end{aligned}$$

ili

$$\frac{1}{2}(x-2)(x+2)(2x-1).$$

Zadatak B-1.2. Ako je $\left[\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):\left((a+b)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\right)-\frac{a}{b}\right]:\left(\frac{a}{b}+1\right)=\frac{1}{2014}$, koliko je $\frac{a}{b}$?

Rješenje.

Prvo računamo umnožak

$$(a+b)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=\frac{a}{b}-\frac{b}{a}.$$

Tada dana jednakost prelazi u

$$\left[\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)-\frac{a}{b}\right]:\left(\frac{a}{b}+1\right)=\frac{1}{2014} \qquad \text{(1 bod)}$$

odnosno

$$\frac{1-\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+1}=\frac{1}{2014} \quad \left(\text{ili oblik } \frac{b-a}{a+b}=\frac{1}{2014}\right). \qquad \text{(2 boda)}$$

Slijedi

$$\begin{aligned} \frac{a}{b}+1 &= 2014-2014\cdot\frac{a}{b} \\ 2015\cdot\frac{a}{b} &= 2013 && \text{(2 boda)} \\ \frac{a}{b} &= \frac{2013}{2015}. && \text{(1 bod)} \end{aligned}$$

Zadatak B-1.3. Majstor Zvonko razrezao je šipku duljine 30 cm na tri dijela kako bi od tih dijelova napravio pravokutni trokut. Zvonko je prvo razrezao šipku na dva dijela od kojih je jedan kraći za 6cm i njega uzeo za jednu katetu. Odredite duljine sva tri dijela na koje je Zvonko razrezao šipku.

Rješenje.

Označimo dijelove šipke s a, b, c. Neka je a kateta koju je Zvonko dobio nakon prvog rezanja. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} a+b+c &= 30 \\ b+c &= a+6 && \text{(1 bod)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a+6 &= 30, \\ a &= 12 && \text{(1 bod)} \end{aligned}$$

$$b+c=18 \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= c^2 \\ 12^2+(18-c)^2 &= c^2 \\ c &= 13 && \text{(2 boda)} \end{aligned}$$

$$b=5 \qquad \text{(1 bod)}$$

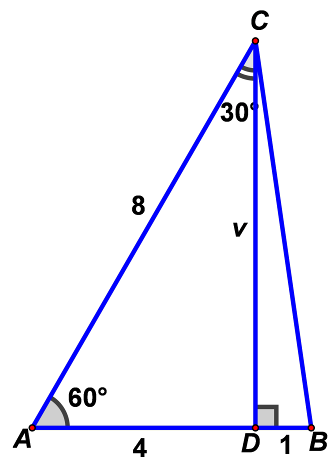
Dijelovi šipke su 5 cm, 12 cm, 13 cm.

Zadatak B-1.4. U šiljastokutnom trokutu ABC visina iz vrha C dijeli nasuprotnu stranicu na dva dijela $\overline{AD}$ i $\overline{DB}$ kojima su duljine $|\overline{AD}|=4\text{cm}$ i $|\overline{DB}|=1\text{cm}$. Mjera kuta pri vrhu A iznosi 60°. Odredite duljine stranica trokuta ABC i duljinu visine iz vrha A tog trokuta.

Rješenje.

Očito duljina stranice $\overline{AB}$ iznosi 5 cm.

U pravokutnom trokutu ADC preostali su kutovi 60° i 30° pa je taj trokut polovica jednakostraničnog trokuta kojemu je duljina stranice jednaka $|\overline{AC}| = 2 \cdot |\overline{AD}| = 8\text{cm}$.



(2 boda)

Visina trokuta ABC je ujedno i visina jednakostraničnog trokuta pa je $v = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\text{cm}$. (1 bod)

Tada je $|\overline{BC}| = \sqrt{v^2 + 1} = 7\text{cm}$. (1 bod)

Površina danog trokuta je $\frac{5 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\text{cm}^2$. Za površinu također vrijedi i

$$P = \frac{|\overline{BC}| \cdot v_a}{2}.$$

Uvrštavanjem u formulu računamo visinu iz vrha A

$$10\sqrt{3} = \frac{7 \cdot v_a}{2}$$
$$v_a = \frac{20\sqrt{3}}{7}\text{cm}.$$ (2 boda)

Zadatak B-1.5. U škrinjici je bilo 111 zlatnika. Nakon toga je svake noći Crnobradi iz škrinjice uzeo 10 zlatnika, a Modrobradi je u nju stavio 15 zlatnika. Može li nakon nekog broja noći u škrinjici biti točno 2014 zlatnika? Obrazložite!

Rješenje.

Nakon svake noći broj zlatnika u škrinjici naraste za 5. (2 boda)

Dakle nakon n noći u škrinjici će biti $111 + 5n$ zlatnika, $n \in \mathbb{N}$. (1 bod)

Taj broj pri dijeljenju s 5 daje ostatak 1 za svaki n, a broj 2014 pri dijeljenju s 5 daje ostatak 4. Prema tome u škrinjici ne može biti 2014 zlatnika. (Ili se može zaključiti da jednadžba $111 + 5n = 2014$ nema rješenje u skupu prirodnih brojeva.) (3 boda)

Zadatak B-1.6. Zbroj duljina dijagonala romba je 84 cm. Produžimo li jednu dijagonalu za 4 cm, a drugu dijagonalu skratimo za 4 cm, površina romba će se povećati za 16 cm^2. Izračunajte duljinu stranice i duljine dijagonala tog romba.

Rješenje.

Ako su dijagonale romba e i f, površina romba je

$$P = \frac{e \cdot f}{2}.$$

Nakon što jednu dijagonalu produžimo, a drugu skratimo za 4 cm, vrijedi

$$\frac{(e+4)(f-4)}{2} = \frac{e \cdot f}{2} + 16. \qquad \text{(2 boda)}$$

Tada je

$$\begin{aligned} &(e+4)(f-4) = e \cdot f + 32, \\ &ef - 4e + 4f - 16 = ef + 32 \\ &-e + f = 12 \end{aligned} \qquad \text{(3 boda)}$$

što zajedno s $e + f = 84$ daje sustav jednadžbi iz kojih dobivamo $f = 48\text{cm}$, $e = 36\text{cm}$.
(3 boda)

Iz $a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2$ slijedi $a^2 = 18^2 + 24^2 = 900$, pa je $a = 30\text{cm}$. (2 boda)

Zadatak B-1.7. U gradu budućnosti za prijevoz stanovnika koriste se super vlakovi. Oni se sastoje od vagona s različitim brojem odjeljaka, a svaki od njih ima određeni broj dvostrukih sjedišta. Prvi vagon ima samo jedan odjeljak s jednim dvostrukim sjedištem. Na njega se priključuje vagon koji ima jedan odjeljak više u kojemu su dva dvostruka sjedišta više nego u prvom odjeljku i tako dalje. Svaki je sljedeći vagon povećan za jedan odjeljak sa dva dvostruka sjedišta više nego u prethodnom odjeljku. Koliko putnika stane u n-ti vagon? Koliko putnika stane u 10. vagon?

Rješenje.

Vlak izgleda ovako:

- prvi vagon ima jedan odjeljak s $1 \cdot 2$ sjedišta;
- drugi vagon ima:
  prvi odjeljak s $1 \cdot 2$ sjedišta, drugi odjeljak s $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2$ sjedišta; (1 bod)
- treći vagon ima:
  prvi odjeljak s $1 \cdot 2$ sjedišta, drugi odjeljak s $3 \cdot 2$ sjedišta, treći odjeljak s $5 \cdot 2$ sjedišta itd. (1 bod)

- n-ti vagon ima:
  n odjeljaka s $S_n = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + \ldots + (2n-1) \cdot 2$ sjedišta

$$S_n = 2 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1)) \qquad \text{(2 boda)}$$

Zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva možemo izračunati grupiranjem članova

$$\begin{aligned}
&1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-5) + (2n-3) + (2n-1) = \\
=&(1 + 2n - 1) + (3 + 2n - 3) + (5 + 2n - 5) + \ldots + (2n - 3 + 3) + (2n - 1 + 1) = \\
=&2n + 2n + 2n + \ldots + 2n + 2n = 2n \cdot \frac{n}{2} = n^2 \qquad \text{(3 boda)}
\end{aligned}$$

Broj putnika u n-tom vagonu biti će $S_n = 2n^2$. (1 bod)

Deseti vagon ima 10 odjeljaka, a broj putnika u tom vagonu je

$$S_{10} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + \ldots + (2 \cdot 10 - 1) \cdot 2 = 2 \cdot 102 = 200. \qquad \text{(2 boda)}$$

Napomena:

Priznati računanje zbroja prvih n neparnih brojeva po formuli $\frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, ali ne i zaključak nepotpunom indukcijom da je taj zbroj jednak n^2.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

27. siječnja 2014.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1. Odredite sva rješenja jednadžbe $(x+1)^2(x-4)^2+4(x^2-3x-4)=0$.

Rješenje.

Danu jednadžbu možemo pisati u obliku

$$(x^2-3x-4)^2+4(x^2-3x-4)=0. \qquad \text{(1 bod)}$$

Izlučimo li zajednički faktor na lijevoj strani jednadžbe dobivamo

$$(x^2-3x-4)(x^2-3x-4+4)=0, \qquad \text{(1 bod)}$$

odnosno

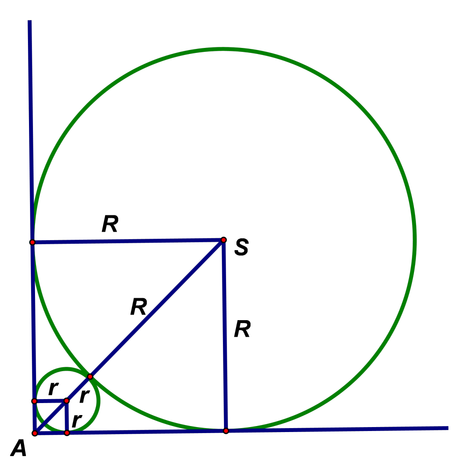
$$(x^2-3x-4)(x^2-3x)=0 \qquad \text{(1 bod)}$$

$$(x+1)(x-4)x(x-3)=0. \qquad \text{(2 boda)}$$

Rješenja dane jednadžbe su -1, 0, 3, 4. (1 bod)

Zadatak B-2.2. Dvije se kružnice dodiruju izvana. Njihove vanjske zajedničke tangente zatvaraju pravi kut. Ako je polumjer manje kružnice 5 cm, izračunajte polumjer veće kružnice.

Rješenje.



Skica s nacrtanim okomitim polumjerima. (2 boda)

Neka su r i R redom polumjeri manje i veće kružnice, A je sjecište tangenti, a S središte veće kružnice. Budući da tangente zatvaraju pravi kut, promotrimo kvadrate kojima je jedan vrh točka A, a nasuprotni vrh središte jedne od danih kružnica. Uočimo dužinu $\overline{AS}$. S jedne strane, njezina je duljina

$$|\overline{AS}| = r\sqrt{2} + r + R. \qquad \text{(1 bod)}$$

S druge strane, $\overline{AS}$ je dijagonala većeg kvadrata sa slike pa je $|\overline{AS}| = R\sqrt{2}$. (1 bod)

Slijedi da je $r\sqrt{2} + r + R = R\sqrt{2}$, odnosno

$$R = r\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 5\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = 15 + 10\sqrt{2}\text{cm}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak B-2.3. Jedno rješenje jednadžbe $x^2 - 2x + k = 0$ kvadrat je drugog rješenja. Odredite sve vrijednosti broja k za koje to vrijedi.

Prvo rješenje.

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4k}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-k} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2^2 \\ 1 + \sqrt{1-k} &= \left(1 - \sqrt{1-k}\right)^2 && \text{(1 bod)} \\ 1 + \sqrt{1-k} &= 1 - 2\sqrt{1-k} + 1 - k \\ 3\sqrt{1-k} &= 1 - k && \text{(2 boda)} \\ 9 - 9k &= k^2 - 2k + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k^2 + 7k - 8 &= 0, && \text{(1 bod)} \\ k_1 = -8, k_2 &= 1. && \text{(1 bod)} \end{aligned}$$

Drugo rješenje.

Koristimo Viete-ove formule i jednakost $x_1 = x_2^2$.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 = 2,\ x_1 \cdot x_2 = k && \text{(2 boda)} \\ x_2^2 + x_2 = 2,\ x_2^3 = k. && \text{(1 bod)} \end{aligned}$$

Slijedi

$$x_2^2 + x_2 - 2 = 0, \qquad \text{(1 bod)}$$

pa je

$$x_2 = -2 \text{ ili } x_2 = 1, \qquad \text{(1 bod)}$$

odnosno

$$k = x_2^3 = -8 \text{ ili } k = 1. \qquad \text{(1 bod)}$$

Zadatak B-2.4. Neka je $f(x)$ kvadratna funkcija takva da je

$$x^2 - 2x + 2 \leq f(x) \leq 2x^2 - 4x + 3,$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Ako je $f(11) = 181$, koliko je $f(16)$?

Rješenje.

Zapišimo danu nejednakost u sljedećem obliku

$$(x-1)^2 + 1 \leq f(x) \leq 2(x-1)^2 + 1 \qquad \text{(2 boda)}$$

Da bi dana nejednakost vrijedila za sve realne brojeve x, funkcija $f(x)$ mora biti oblika

$$f(x) = a(x-1)^2 + 1, \quad a \in [1, 2]. \qquad \text{(1 bod)}$$

Iz $f(11) = 181$ slijedi

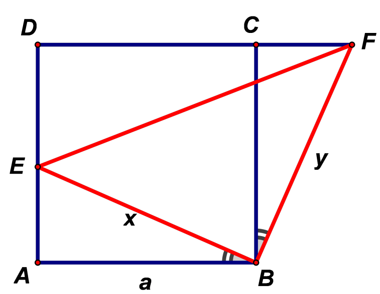
$$\begin{aligned} &a(11-1)^2 + 1 = 181, \\ &a = \frac{9}{5}. \end{aligned} \qquad \text{(2 boda)}$$

Tada je

$$f(16) = \frac{9}{5}(16-1)^2 + 1 = 406. \qquad \text{(1 bod)}$$

Zadatak B-2.5. Površina kvadrata $ABCD$ iznosi 256cm^2. Na stranici $\overline{AD}$ odaberemo točku E, a stranicu $\overline{DC}$ produžimo preko vrha C do točke F tako da je kut $\measuredangle FBE$ pravi kut. Izračunajte duljinu produžetka $\overline{CF}$, ako površina trokuta EBF iznosi 200cm^2.

Rješenje.



Označimo stranicu kvadrata s a, $|\overline{BE}| = x$, $|\overline{BF}| = y$.

Uočimo da je kut $\measuredangle EBA = 90° - \measuredangle CBE = \measuredangle FBC$. (1 bod)

Tada su, prema poučku KSK, trokuti ABE i CBF sukladni. Zato je $x = y$. (2 boda)

Kako je površina kvadrata $a^2 = 256\text{cm}^2$, duljina stranice a je $a = 16\text{cm}$.

Analogno, iz površine trokuta EBF proizlazi

$$\frac{1}{2}xy = 200,$$
$$x \cdot x = 400,\ x = 20\text{cm}. \quad \text{(1 bod)}$$

Sada je po Pitagorinom poučku

$$|\overline{CF}|^2 = x^2 - a^2 = 144,$$
$$|\overline{CF}| = 12\text{cm}. \quad \text{(2 boda)}$$

Zadatak B-2.6. Dvojica biciklista krenula su istovremeno iz dva mjesta A i B jedan drugome u susret. Kada su se nakon jednog sata susreli, prvi je prešao 10 km puta više nego drugi. Prvi je biciklist došao 50 minuta ranije u mjesto B, nego drugi biciklist u mjesto A. Kolika je udaljenost između mjesta A i B?

Rješenje.

Ako je udaljenost $|AB| = 2x$, (1 bod)
a biciklisti se susretnu u mjestu C, onda je

$$|AC| = x + 5$$
$$|BC| = x - 5. \quad \text{(1 bod)}$$

Brzina (u km/h) prvog biciklista je $\frac{x+5}{1}$, a drugog $\frac{x-5}{1}$. (2 boda)

Prvi će biciklist prijeći put $|AB|$ u vremenu $\frac{2x}{x+5}$, a drugi $\frac{2x}{x-5}$. (2 boda)

Imamo, dakle, jednadžbu $\frac{2x}{x+5} = \frac{2x}{x-5} - \frac{5}{6}$, odnosno

$$x^2 - 24x - 25 = 0, \quad \text{(2 boda)}$$

čija su rješenja $x_1 = 25\text{km}$ i $x_2 < 0$. (1 bod)

Udaljenost mjesta je $|AB| = 50\text{km}$. (1 bod)

Zadatak B-2.7. Izračunajte površinu onog dijela kompleksne ravnine u kojem se nalaze svi kompleksni brojevi z za koje vrijedi $\text{Im}(z^2) \leq \text{Re}(z)$ i $|z| \leq 1$.

Rješenje.

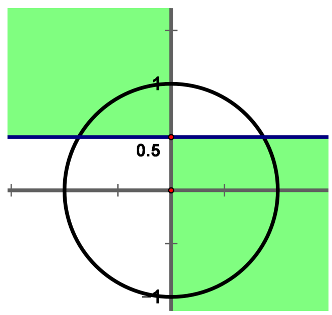
Neka je $z = x + yi$, gdje su $x, y \in \mathbb{R}$. Tada je

$$z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi. \qquad \text{(1 bod)}$$

Nejednakost $\operatorname{Im}(z^2) \leq \operatorname{Re}(z)$ ekvivalentna je nejednakosti

$$\begin{aligned} & 2xy \leq x \\ \Leftrightarrow\ & x(2y-1) \leq 0 & \text{(1 bod)} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} x \leq 0,\ y \geq \frac{1}{2} \\ x \geq 0,\ y \leq \frac{1}{2} \end{cases} & \text{(2 boda)} \end{aligned}$$

Osjenčani skup prikazuje dobiveni sustav nejednakosti.



(2 boda)

Nejednakost $|z| \leq 1$ ispunjena je za sve kompleksne brojeve koji se nalaze u krugu polumjera 1, sa središtem u ishodištu. (2 boda)
Dio osjenčanog skupa koji je unutar jediničnog kruga je traženi dio ravnine. Zbog simetrije jediničnog kruga u odnosu na os ordinata, površina tog skupa točaka jednaka je površini polovine kruga, odnosno

$$P = \frac{r^2\pi}{2} = \frac{\pi}{2}. \qquad \text{(2 boda)}$$

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

27. siječnja 2014.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1. Izračunajte

$$\sin^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8}.$$

Rješenje.

$$\sin^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} = \sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}\right) = 2\sin^4 \frac{\pi}{8} = \qquad \text{(2 boda)}$$

$$= 2\left(\sin^2 \frac{\pi}{8}\right)^2 = 2\left(\frac{1-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)}{2}\right)^2 = \qquad \text{(2 boda)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak B-3.2. Odredite najmanju i najveću vrijednost funkcije

$$f(x) = 2\sin x - \cos(2x).$$

Rješenje.

Zapišimo funkciju f u drugačijem obliku,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sin x - \cos(2x) \\ &= 2\sin x - \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = && \text{(1 bod)} \\ &= 2\sin x - \left(1 - 2\sin^2 x\right) = \\ &= 2\sin^2 x + 2\sin x - 1 = \\ &= 2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}. && \text{(2 boda)} \end{aligned}$$

Najmanja vrijednost funkcije f je $-\frac{3}{2}$, a postiže se za $\sin x = -\frac{1}{2}$. Najveća vrijednost funkcije f je za $\sin x = 1$ i iznosi $2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = 3$. (3 boda)

Zadatak B-3.3. Broj n je najmanji pozitivan višekratnik broja 15 kojemu su sve znamenke 0 ili 8. Odredite najveći prosti broj s kojim je broj n djeljiv.

Rješenje.

Broj n mora biti djeljiv s 5, pa mu je zadnja znamenka 0. (1 bod)

Broj n mora biti djeljiv s 3, pa mu zbroj znamenaka mora biti djeljiv s 3.

Kako su mu jedine znamenke 0 ili 8, zbroj znamenaka je višekratnik broja 8, a najmanji koji je djeljiv s tri je broj 24. (2 boda)

Zaključujemo da traženi broj mora imati tri znamenke 8 i zadnju znamenku 0, odnosno 8880 je traženi broj. (1 bod)

Njegov rastav na proste faktore je $8880 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 37$. Dakle najveći prosti djelitelj broja 8880 je 37. (2 boda)

Zadatak B-3.4. Odredite sve vrijednosti pozitivnog realnog broja k za koje jednadžba

$$\frac{\log(kx)}{\log(x+1)} = 2$$

ima točno jedno rješenje.

Rješenje.

Napišimo prvo uvjete za koje dana jednadžba ima smisla.

1. $x + 1 > 0$, $x > -1$;
2. $kx > 0$, pa zbog $k > 0$ slijedi $x > 0$;
3. $\log(x+1) \neq 0$, $x \neq 0$.

Iz uvjeta (1), (2) i (3) slijedi $x > 0$. (1 bod)

Danu jednadžbu možemo pisati u obliku

$$\begin{aligned}\log(kx) &= 2\log(x+1)\\ &= \log(x+1)^2\end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

Tada je

$$\begin{aligned}&kx = (x+1)^2\\ &x^2 - x(k-2) + 1 = 0.\end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

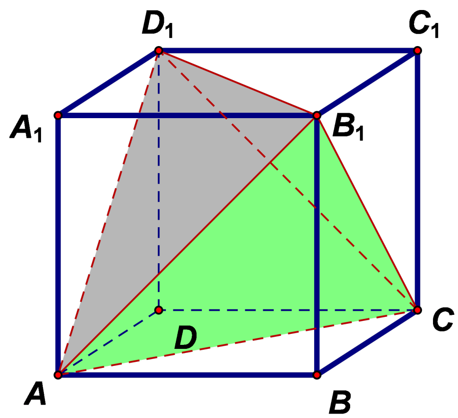
Ova jednadžba ima točno jedno rješenje ako njezina diskriminanta ima vrijednost nula, tj.

$$(k-2)^2 - 4 = 0. \qquad \text{(1 bod)}$$

Kako je $k \neq 0$, jedino je rješenje $k = 4$. (2 boda)

Zadatak B-3.5. Kocka je određena svojim vrhovima $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Odredite omjer obujma tetraedra ACB_1D_1 i obujma dane kocke. U kojem su omjeru njihova oplošja?

Rješenje.



(1 bod)

Obujam danog tetraedra računamo tako da od obujma kocke oduzmemo 4 obujma trostrane piramide kojoj je baza trokut površine $\frac{a^2}{2}$, a visina a, gdje je a duljina osnovnog brida kocke.

$$V_{\text{tetraedra}} = V_{\text{kocke}} - 4V_{\text{piramide}} = \quad \text{(1 bod)}$$

$$= a^3 - 4\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \quad \text{(1 bod)}$$

$$= \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}V_{\text{kocke}}.$$

Tada je

$$V_{\text{tetraedra}} : V_{\text{kocke}} = 1 : 3 \quad \text{(1 bod)}$$

Omjer oplošja tetraedra i oplošja kocke je

$$O_{\text{tetraedra}} : O_{\text{kocke}} = \frac{4 \cdot \frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}}{6a^2} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{6a^2} = \sqrt{3} : 3. \quad \text{(2 boda)}$$

Zadatak B-3.6. Riješite jednadžbu

$$\left(\frac{\sin 1 + \sin 3 + \sin 5 + \sin 7}{\cos 1 + \cos 3 + \cos 5 + \cos 7}\right)^{\frac{1}{19x} - 107} = \frac{1}{\operatorname{tg} 4}.$$

Rješenje.

Pogodnim grupiranjem i primjenom formula pretvorbi pojednostavnimo bazu na lijevoj strani jednadžbe.

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin 1+\sin 3+\sin 5+\sin 7}{\cos 1+\cos 3+\cos 5+\cos 7}= \\
=&\frac{(\sin 1+\sin 7)+(\sin 3+\sin 5)}{(\cos 1+\cos 7)+(\cos 3+\cos 5)}= \\
=&\frac{2\sin\frac{1+7}{2}\cos\frac{1-7}{2}+2\sin\frac{3+5}{2}\cos\frac{3-5}{2}}{2\cos\frac{1+7}{2}\cos\frac{1-7}{2}+2\cos\frac{3+5}{2}\cos\frac{3-5}{2}}= && \text{(2 boda)} \\
=&\frac{2\sin 4\cos 3+2\sin 4\cos 1}{2\cos 4\cos 3+2\cos 4\cos 1}= && \text{(1 bod)} \\
=&\frac{2\sin 4(\cos 3+\cos 1)}{2\cos 4(\cos 3+\cos 1)}=\operatorname{tg} 4. && \text{(2 boda)}
\end{aligned}$$

Dana jednadžba prelazi u

$$(\operatorname{tg} 4)^{\frac{1}{19x}-107}=\frac{1}{\operatorname{tg} 4}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{19x}-107=-1, && \text{(2 boda)} \\
&\frac{1}{19x}=106, \\
&2014x=1, \\
&x=\frac{1}{2014}. && \text{(2 boda)}
\end{aligned}$$

Zadatak B-3.7. Dokažite da za sve realne brojeve a vrijedi nejednakost

$$3(1+a^2+a^4)-(1+a+a^2)^2\geq 0.$$

Za koje realne brojeve a vrijedi jednakost?

Rješenje.

Podsjetimo se rastava na faktore

$$1+a^2+a^4=1+2a^2+a^4-a^2=(1+a^2)^2-a^2=(1+a+a^2)(1-a+a^2).$$

Tada je dana nejednakost ekvivalentna sljedećem nizu nejednakosti:

$$\begin{aligned}
&3(1+a^2+a^4)-(1+a+a^2)^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow 3(1+a+a^2)(1-a+a^2)-(1+a+a^2)^2 \geq 0 && \text{(3 boda)} \\
&\Leftrightarrow (1+a+a^2)[3(1-a+a^2)-(1+a+a^2)] \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (1+a+a^2)[3-3a+3a^2-1-a-a^2] \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (1+a+a^2)[2a^2-4a+2] \geq 0 && \text{(2 boda)} \\
&\Leftrightarrow (1+a+a^2)2(a-1)^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (1+a+a^2)(a-1)^2 \geq 0. && \text{(1 bod)}
\end{aligned}$$

Posljednja je nejednakost uvijek točna jer je

$$1+a+a^2>0, \text{ za sve } a \in \mathbb{R} \quad \left(\text{jer } D<0 \text{ ili } 1+a+a^2=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0\right)$$

i $(a-1)^2 \geq 0$ za sve $a \in \mathbb{R}$. (2 boda)

Jednakost vrijedi samo ako je $a-1=0$, odnosno za $a=1$. (2 boda)

Napomena:
Do ekvivalentne nejednakosti $(1+a+a^2)(a-1)^2 \geq 0$ moglo se doći od početne i ovako:

$$\begin{aligned}
&3(1+a^2+a^4)-(1+a+a^2)^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow 3+3a^2+3a^4-1-a^2-a^4-2a-2a^2-2a^3 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow 2a^4-2a^3-2a+2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow a^4-a^3-a+1 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow a^3(a-1)-(a-1) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (a-1)(a^3-1) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (a-1)^2(a^2+a+1) \geq 0
\end{aligned}$$

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

27. siječnja 2014.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1. Dokažite da je zbroj $\binom{n+k}{2}+\binom{n+k+1}{2}$ potpuni kvadrat.

Rješenje.

$$\binom{n+k}{2}+\binom{n+k+1}{2}=\frac{(n+k)(n+k-1)}{1\cdot 2}+\frac{(n+k+1)(n+k+1-1)}{1\cdot 2}=$$

(3 boda)

$$=\frac{(n+k)(n+k-1)+(n+k+1)(n+k)}{2}=$$

$$=\frac{(n+k)(n+k-1+n+k+1)}{2}=$$

$$=\frac{(n+k)(2n+2k)}{2}=(n+k)^2.$$

(3boda)

Zadatak B-4.2. Koliko je članova u razvoju binoma $\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{x^2}\right)^{100}$, $x>0$, u kojima x ima pozitivan eksponent, a koliko onih u kojima je eksponent od x paran i pozitivan cijeli broj?

Rješenje.

Opći član danog binoma je

$$\binom{100}{k}(2\sqrt{x})^{100-k}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^k=\binom{100}{k}\cdot 2^{100-k}\cdot(-1)^k\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{100-k}\cdot x^{-2k}.$$

(1 bod)

Potenciju broja x dobijemo iz

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{100-k}\cdot x^{-2k}=x^{\frac{100-k}{2}}\cdot x^{-2k}=x^{\frac{100-5k}{2}}.$$

(1 bod)

Eksponent od x je pozitivan ako je $\frac{100-5k}{2}>0$, odnosno

$$100-5k>0,$$
$$k<20.$$

(1 bod)

Takvih brojeva k ima 20 jer $k\in\{0,1,2,3,\ldots,19\}$. (1 bod)

Eksponent od x je paran i pozitivan ako je

$$\frac{100-5k}{2}=50-\frac{5}{2}k$$

pozitivan paran broj. To je moguće samo ako je broj $\frac{5}{2}k$ paran, odnosno ako je broj k djeljiv s 4 i manji od 20. Slijedi $k \in \{0,4,8,12,16\}$. (2 boda)

Zadatak B-4.3. Riješite jednadžbu $\log_5(\cos x)+\log_{0.2}(-\sin x)=0$ na intervalu $[0,2\pi]$.
Rješenje.

Uz uvjet $\cos x>0$ i $\sin x<0$ vrijedi (1 bod)

$$\log_5(\cos x)+\log_{0.2}(-\sin x)=\log_5\cos x-\log_5(-\sin x)= \quad (1 \text{ bod})$$

$$=\log_5\frac{\cos x}{-\sin x}=0 \quad (1 \text{ bod})$$

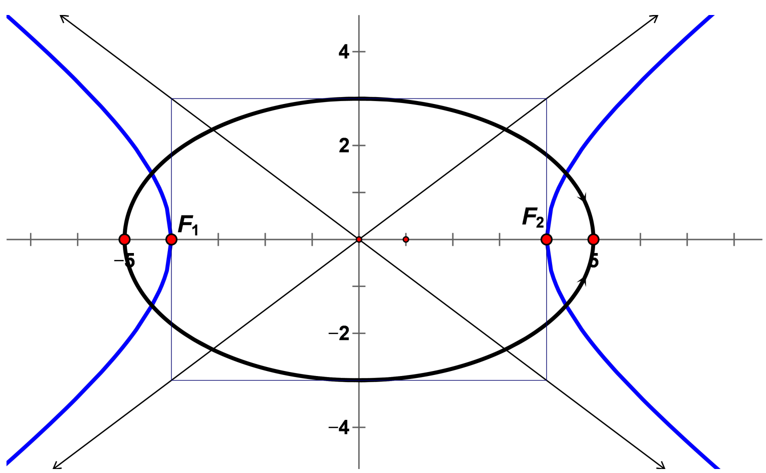
Slijedi

$$-\mathrm{ctg} x=5^0=1. \quad (1 \text{ bod})$$

Tada je $\mathrm{tg}\, x=-1$, pa je zbog uvjeta zadatka $x=\frac{7\pi}{4}$. (2 boda)

Zadatak B-4.4. Tjemena elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, na osi apscisa, su ujedno i fokusi hiperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, a tjemena te hiperbole su ujedno i fokusi dane elipse. Odredite tangens kuta koji zatvaraju asimptote hiperbole.

Rješenje.



Kako je kod elipse $e^2=a^2-b^2=25-9=16$, fokusi elipse su $(-4,0)$ i $(4,0)$. (1 bod)

Tada je realna poluos hiperbole $a_h=4$. (1 bod)

Tjemena elipse na osi apscisa su točke $(-5,0)$ i $(5,0)$. To su ujedno i fokusi hiperbole pa je linearni ekscentricitet hiperbole $e_h = 5$. (1 bod)

Tada je $b_h = \sqrt{25-16} = 3$. (1 bod)

Asimptote hiperbole su pravci $y = \pm\frac{3}{4}x$, a tada je tangens kuta između njih

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}}\right| = \frac{24}{7}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak B-4.5. Dokažite da sljedeća jednakost vrijedi za sve prirodne brojeve n.

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$$

Rješenje.

Zadanu jednakost dokažimo matematičkom indukcijom.

Provjerimo tvrdnju za $n = 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2} &= \frac{(1+1)!-1}{(1+1)!}\\ \frac{1}{2} &= \frac{2-1}{2}.\end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za $n = 1$. (1 bod)

Pretpostavimo da zadana jednakost vrijedi za neki proizvoljan prirodni broj n, te dokažimo da tada vrijedi i za njegovog sljedbenika $n+1$. (1 bod)

Treba dokazati da je

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{(n+2)!-1}{(n+2)!}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Koristeći pretpostavku indukcije, lijevu stranu posljednje jednakosti možemo pisati u obliku

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!} =\\ &= \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)(n+1)!} =\\ &= \frac{(n+2)(n+1)!-(n+2)+n+1}{(n+2)!} =\\ &= \frac{(n+2)(n+1)!-1}{(n+2)!} =\\ &= \frac{(n+2)!-1}{(n+2)!}.\end{aligned} \qquad \text{(2 boda)}$$

Kako iz pretpostavke da tvrdnja vrijedi za n, ona vrijedi i za $n+1$, dana tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n. (1 bod)

Zadatak B-4.6. Duljine stranica trokuta su uzastopni prirodni brojevi (u centimetrima). Najveći kut trokuta je dvostruko veći od najmanjeg. Odredite obujam tijela koje nastaje rotacijom trokuta oko najdulje stranice.

Rješenje.

Neka su stranice trokuta $a = n$, $b = n+1$, $c = n+2$.

Nasuprot stranice a je najmanji kut α, a nasuprot stranice c je najveći kut γ. (1 bod)

Vrijedi $\gamma = 2\alpha$.

Iz poučka o sinusu slijedi

$$\frac{n}{\sin\alpha} = \frac{n+2}{\sin\gamma} = \frac{n+2}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

pa je

$$\cos\alpha = \frac{n+2}{2n}. \quad \text{(1 bod)}$$

Iz poučka o kosinusu slijedi

$$\begin{aligned} n^2 &= (n+1)^2 + (n+2)^2 - 2(n+1)(n+2)\cos\alpha = \\ &= (n+1)^2 + (n+2)^2 - 2(n+1)(n+2)\cdot\frac{n+2}{2n}, \end{aligned} \quad \text{(1 bod)}$$

a nakon množenja s n dobivamo

$$\begin{aligned} n^3 &= n(n+1)^2 + n(n+2)^2 - (n+1)(n+2)^2 = \\ &= n^3 + 2n^2 + n + n^3 + 4n^2 + 4n - (n+1)(n^2+4n+4) = \\ &= 2n^3 + 6n^2 + 5n - n^3 - 4n^2 - 4n - n^2 - 4n - 4. \end{aligned}$$

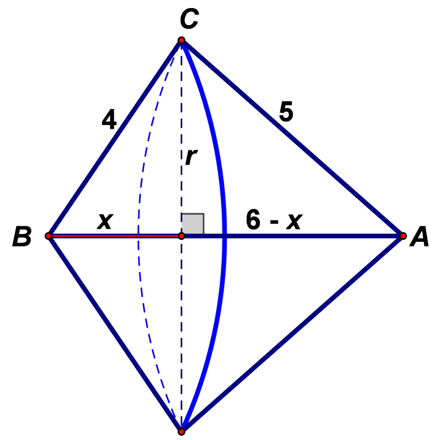
Rezultat sređivanja je kvadratna jednadžba

$$n^2 - 3n - 4 = 0.$$

Jedino moguće rješenje je $n = 4$. (2 boda)

Tada su stranice trokuta $a = 4\text{cm}$, $b = 5\text{cm}$, $c = 6\text{cm}$. (1 bod)

Rotacijom ovog trokuta oko stranice c nastaju dva stošca sa zajedničkom bazom.



Polumjer baze je visina danog tokuta. Izračunajmo prvo $\sin\alpha$,

$$\cos\alpha = \frac{n+2}{2n} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},$$
$$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Kako je $\sin\alpha = \frac{r}{5}$, slijedi $r = 5\frac{\sqrt{7}}{4}$ cm. (2 boda)

Obujam dobivenog tijela je

$$V = \frac{r^2\pi\cdot x}{3} + \frac{r^2\pi\cdot(6-x)}{3} = \frac{r^2\pi\cdot 6}{3} = 5^2\cdot\frac{7}{16}\cdot\pi\cdot 2 = \frac{175\pi}{8}\text{cm}^3$$ (2 boda)

Zadatak B-4.7. Odredite sve prirodne brojeve n takve da vrijednost sljedećeg izraza

$$\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\frac{\pi}{38n}}{1-i\operatorname{tg}\frac{\pi}{38n}}\right)^{2014}$$

bude realan broj.

Rješenje.

Zapišimo dani izraz u pogodnijem obliku,

$$\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\frac{\pi}{38n}}{1-i\operatorname{tg}\frac{\pi}{38n}}\right)^{2014} = \left(\frac{1+i\frac{\sin\frac{\pi}{38n}}{\cos\frac{\pi}{38n}}}{1-i\frac{\sin\frac{\pi}{38n}}{\cos\frac{\pi}{38n}}}\right)^{2014} = \left(\frac{\cos\frac{\pi}{38n}+i\sin\frac{\pi}{38n}}{\cos\frac{\pi}{38n}-i\sin\frac{\pi}{38n}}\right)^{2014} =$$ (2 boda)

$$= \left(\frac{\cos\frac{\pi}{38n}+i\sin\frac{\pi}{38n}}{\cos\left(-\frac{\pi}{38n}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{38n}\right)}\right)^{2014} = \left(\cos\frac{2\pi}{38n}+i\sin\frac{2\pi}{38n}\right)^{2014} =$$ (2 boda)

$$= \cos\frac{2014\pi}{19n}+i\sin\frac{2014\pi}{19n} = \cos\frac{106\pi}{n}+i\sin\frac{106\pi}{n}.$$ (2 boda)

Ovaj će broj biti realan ako

$$\sin \frac{106\pi}{n} = 0,$$

odnosno ako je razlomak $\frac{106}{n}$ cijeli broj. (2 boda)

To je moguće samo ako je n djelitelj broja 106. Prema tome rješenje je $n \in \{1, 2, 53, 106\}$. (2 boda)