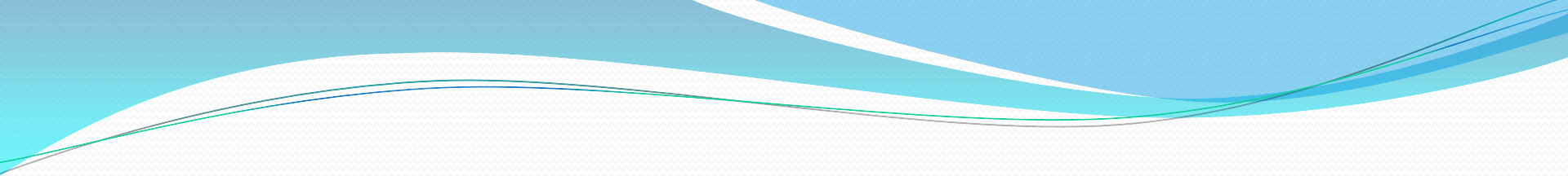


MATEMATIČKE KONSTANTE

Tihana Strmečki
Tehničko veleučilište u Zagrebu
matematika.tvz@gmail.com



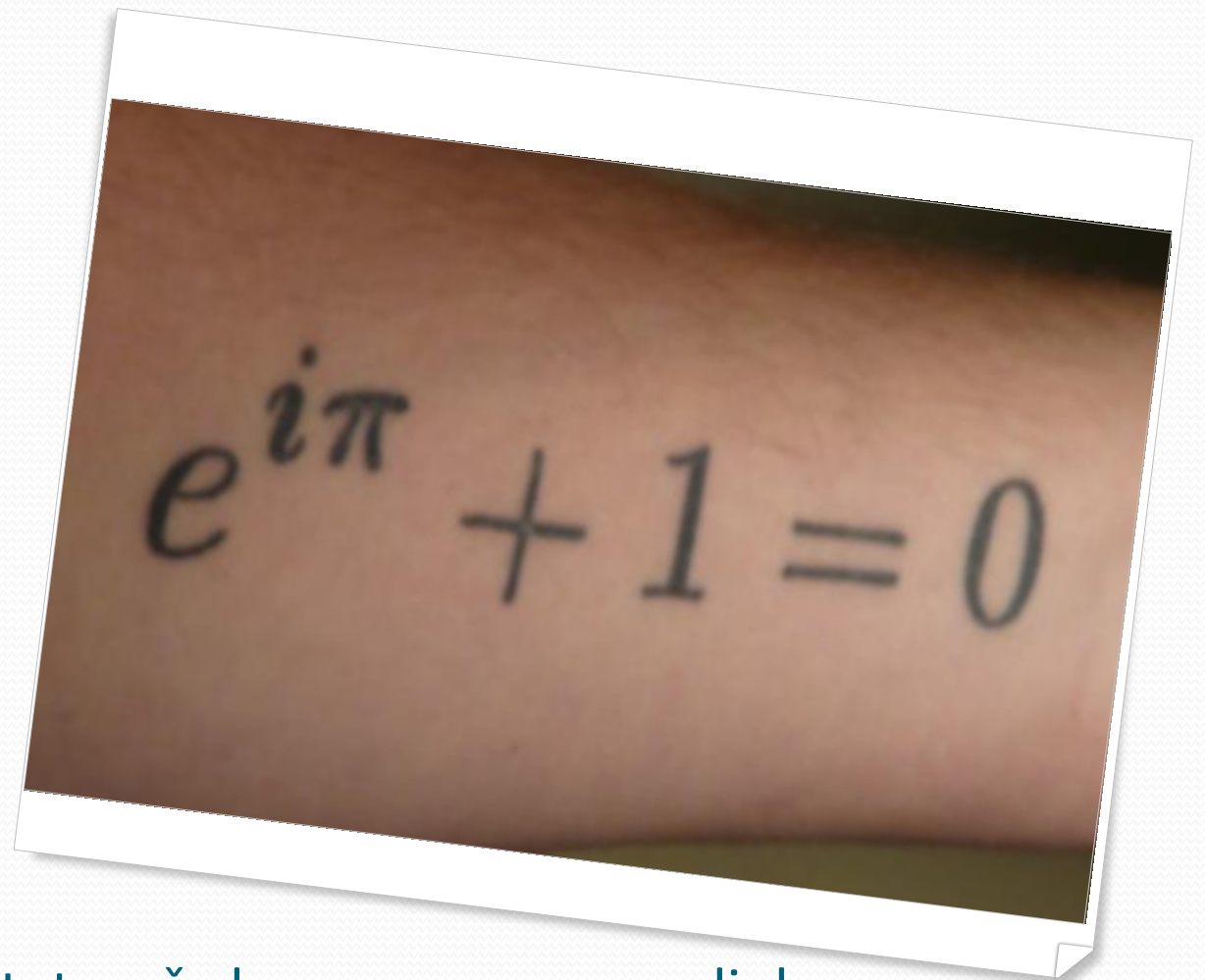
Prezentacija je izrađena u svrhu držanja predavanja pod naslovom “Matematičke konstante” na stručno-metodičkim večerima u organizaciji Hrvatskog matematičkog društva u Zagrebu 05.02.2014.

- Koje vrijednosti zovemo matematičkim konstantama?
- Česti primjeri u praksi: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π , e , 0, 1, zlatni rez

- Inspiracija: *Eulerov identitet*
- Uvrštavanjem vrijednosti $x = \pi$ u Eulerovu formulu $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$, dobivamo:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

- Konstanta 1 - neutralni element za množenje
- Konstanta 0 - neutralni element za zbrajanje
- π - Arhimedova ili Ludolfova konstanta
- e - Eulerov broj/Napierova konstanta
- i - imaginarna jedinica
- 3 aritmetičke operacije (+, *, exp)



Zgodna tetovaža kao uspomena na diplomu

Vjenčani prsten



π (PI)

- $\pi=3,14159265358979\dots$
- najčešća konstanta u matematici i prirodnim znanostima

Definicija

omjer opsega kruga i njegovog promjera
(u Euklidskoj geometriji jest konstantan)

Definicija

dvostruka vrijednost broja x za koji vrijedi $\cos(x) = 0$

Ime

grčko slovo PI (“periphery”)

William Jones 1706.g., Leonhard Euler 1736.g., 1748.g.

Svojstva

- Iracionalan broj
1761.g. Johann Heinrich Lambert
- π^2 iracionalan
1794.g. Adrien-Marie Legendre
- Transcendentan broj
1882.g. Ferdinand von Lindemann

Povijest

- **Ahmes** (1650.g. p.n.e. Egipat)
 - prvi pokušaj rješavanja problema kvadrature kruga
- **Arhimed** (280.g. p.n.e. Grčka)
 - aproksimacija poligonima ($\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$)
- **Liu Hui** (400.g. Kina)
 - $\pi = 3,1416$
- **François Viète** (1579.g. Francuska)
 - beskonačan umnožak
- **Ludolph van Ceulen** (16.st. Njemačka)
 - izračunao 35 decimala

- **John Wallis, James Gregory i G. W. Leibniz (17.st.)**

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 * 2 * 4 * 4 * 6 * 6 * 8 * 8 * \dots}{1 * 3 * 3 * 5 * 5 * 7 * 7 * 9 * \dots}$$

$$\arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

/x = 1 dobije se vrijednost $\frac{\pi}{4}$, 500.000 članova za 5 znamenki/

- **Euler (1735.g.)**
 - 20 znamenki u 1h
- **William Shanks (1873.g.)**
 - 707 znamenki u 15 godina (greška na 528. mjestu)

Doba računalna

- 1949.g. 2037 znamenki
- 1973.g. 1 milijun znamenki
- 1989.g. 1 bilijun znamenki
- 2009.g. 2,7 trilijuna znamenki
- 2011.g. 10 trilijuna znamenki

Korištenje i pojavljivanje

- Geometrija

- opseg i površina kruga $O = 2r\pi, P = r^2\pi$

- volumen kugle $V = \frac{4}{3}r^3\pi$

- Integralni račun

$$\frac{\pi}{2} = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

- Trigonometrija

- period $\sin(x), \cos(x) \rightarrow 2\pi$

- Kompleksni brojevi
 - Eulerova formula, trigonometrijski oblik kompleksnog broja
- Fraktali
 - Mandelbrotov skup (broj iteracija limesa)
- Vjerojatnost i statistika
 - normalna distribucija (funkcija gustoće vjerojatnosti), površina ispod Gaussove krivulje
- Fizika
 - period njihala, kozmologija (Einsteineova jednačba polja), elektromagnetizam (Coulombov zakon), mehanika, termodinamika...

Zanimljivosti

- Svi mogući nizovi znamenki bilo koje duljine javljaju se jednako često
- PI dan: 3/14 (14. ožujak)
- TAU dan ($\tau = 2\pi$): 6/28 (28. lipanj)
- PI soba u Pariškom muzeju znanosti
- Feynmanova točka: niz 999999 na 762. decimali
- 358. – 360. decimala su 360
- 123456 se javlja nakon prvih milijun znamenki
- 39 znamenki dovoljne za kozmološke procjene na nivou atoma
- Visina slona do ramena: $2 * \pi * \text{promjer noge}$



PI soba u Muzeju znanosti u Parizu

PIPHIOLOGY

- “How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics.” - James Jeans
- “Nek i sad i vazda slavljeno na Zemlji jeste ime onoga Arhimeda, helenskog mudraca!” - Ruđer Bošković
- Rekord 67.890 znamenki
Lu Chao, 2005.g. Kina - 24h i 4min



Vaš rođendan u nizu decimala od π !

www.facade.com/legacy/amiinpi

e

- $e = 2,718281828459 \dots$
- nakon π najvažnija konstanta u matematici

Definicija

baza prirodnog logaritma

Definicija

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, e \text{ td } \int_1^e \frac{1}{t} dt = 1$$

Definicija

jedinstveni realni broj td nagib tangente na f-ju
 $f(x) = e^x$ iznosi 1 u točki 0

Ime

Eulerov broj ili Napierova konstanta

Svojstva

- Iracionalan broj
1736.g. Euler našao beskonačni verižni razlomak
- Transcendentan broj
1844.g. Joseph Liouville
1873.g. Charles Hermite

Povijest

- **John Napier** (1618.g.) – radio logaritamske tablice
- **Jacob Bernoulli** (1682.g.) – proučavao kamatni račun i limese
- **Leonhard Euler** (1731.g.) – dao oznaku u u dopisivanju s Christianom Goldbachom (73 znamenke)
- **William Shanks** (1853.g.) – izračunao 137 znamenki
- **Nemirnof i Bonnell** (1994.g.) – izračunali 1 milijun znamenki
- **Kondo i Yee** (2010.g.) – izračunali 10^{12} znamenki

Korištenje i pojavljivanje

- Kamatni račun
 - neprekidno ukamaćivanje sa sve manjim intervalima
- Teorija vjerojatnosti
 - Bernoullijevi pokusi/Binomna distribucija
 - dearanžmani (problem šešira)
 - funkcija gustoće vjerojatnosti normalne distribucije
- Derivacije
- Kompleksni brojevi (Eulerova formula)
- Diferencijalne jednađbe
 - $y(x) = Ce^x$ jest rješenje od $y' = y$

e-PHILOLOGY i zanimljivosti

- “By omnibus I traveled to Brooklyn.”
- “To disrupt a playroom is commonly a practice of children.”
- Google billboard reklama
{first 10-digit prime found in consecutive digits of e }.com
7427466391 na 99. zamenki
- Google javna prodaja dionica za \$2.718.281.828

Konstanta 1

- Dualno značenje – broj i znamenka

Definicija

cijeli broj između 0 i 2, predstavlja mjeru u brojanju i mjerenju

Definicija

prvi nenul prirodni broj koji je neparan

Oznaka

potječe iz Indije

Svojstva i korištenje

- Racionalan broj
- Ni prost ni složen
- Algebarski
- Binarni sustav
- Fibonaccijev broj F_1
- Identiteta za množenje za realne i kompleksne brojeve
- Vjerojatnost sigurnog događaja
- Egipat - prikaz razlomaka (brojnik 1)

Konstanta 0

- Dualno značenje – broj i znamenka

Definicija

cijeli broj koji prethodi 1, paran

Ime

arapski “safra” (prazno je) i “sifr” (prazno)

talijanski “zefiro”

Povijest

Egipat (1740.g. p.n.e.) baza 10 i oznaka za 0

Indija (9.st.) uveli današnju oznaku

Fibonacci (1202.g.) donio u Europu

Svojstva i korištenje

- Racionalan broj
- Ni prost ni složen
- Algebarski
- Binarni sustav
- Kardinalni broj praznog skupa
- Identiteta za zbrajanje za realne brojeve
- Vjerojatnost nemogućeg događaja

Zlatni rez

Definicija

zbroj dva dijela u odnosu na veći je isti kao omjer većeg u odnosu na manji

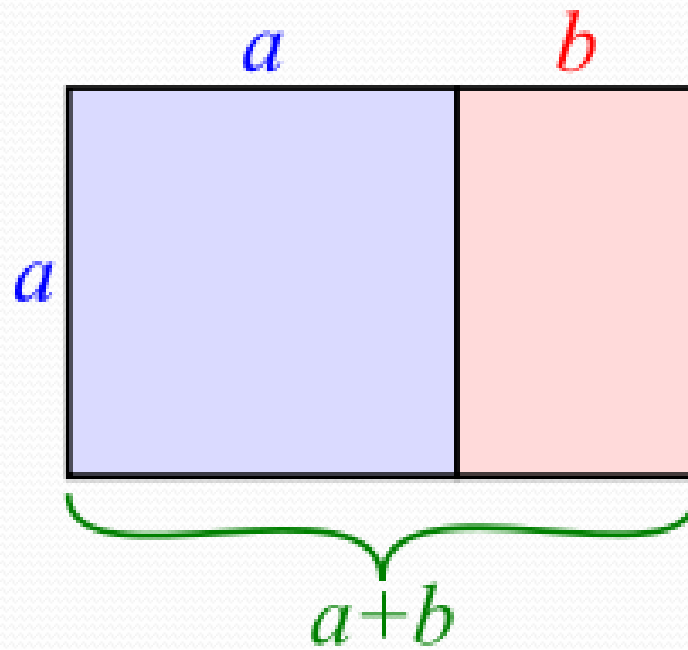
$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \rightarrow \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887 \dots$$

Ime

Mark Barr (1909.g.) predložio φ u čast Phidiasa

Zlatni pravokutnik



Svojstva i povijest

- Iracionalan
- Algebarski
- Grčka
 - Pitagora – dijeli liniju u zlatnom omjeru (520.g. p.n.e.)
 - Euklid – prva definicija u “Elementima” (350.g. p.n.e.)
 - Phidias – kipovi u Parthenonu (450.g. p.n.e.)
- Fibonacci (13.st.) – niz konvergira ka φ
- Luca Pacioli (15.st.) – definira božanski omjer
- Johannes Kepler (17.st.)
 - omjer neposrednih susjeda Fibonaccijevih brojeva konvergira ka φ

Korištenje i pojavljivanje

- *Arhitektura*

- Parthenon (Atena)
- Velika džamija Kairouan (Tunis)
- Villa Stein (Le Corbusier, Francuska)

- *Slikarstvo*

- Leonardo da Vinci
- Salvador Dalí
- Piet Mondrian

- *Muzika*

- Béla Bartók
- Erik Satie
- Archille-Claude Debussy

- *Tiskarstvo*

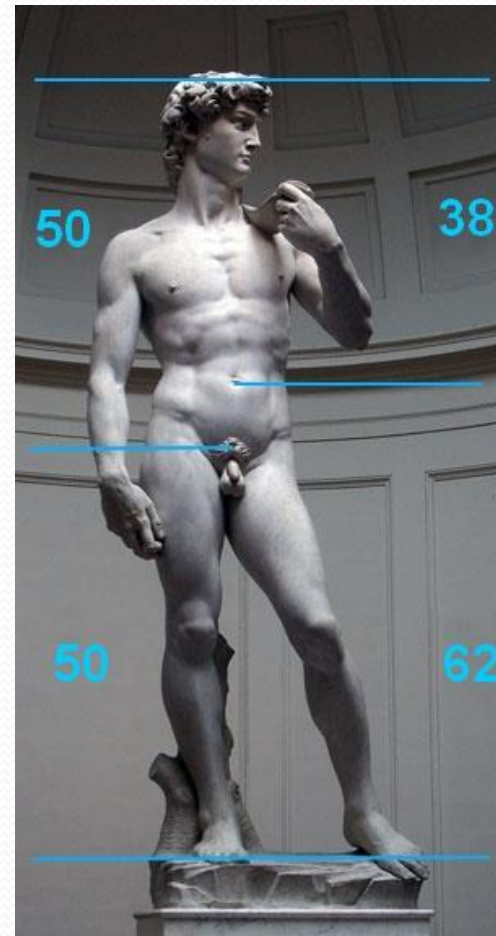
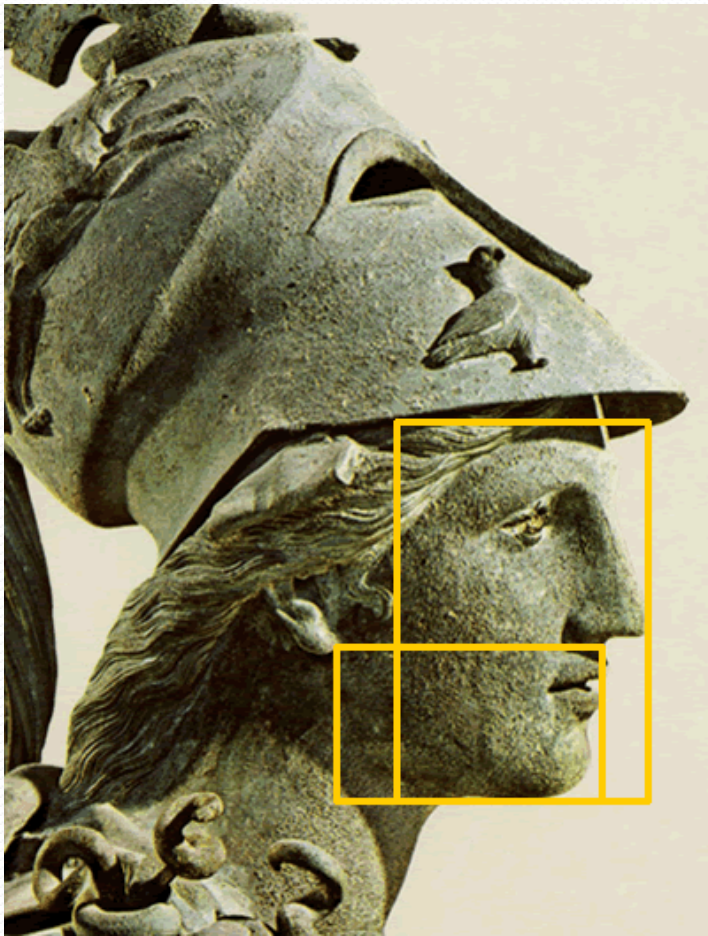
- *Priroda*

- položaj grana na stabiljkama biljaka
- kosturi životinja
- grananje živaca sisavaca
- kemijski sastav kristala
- ljudski DNK

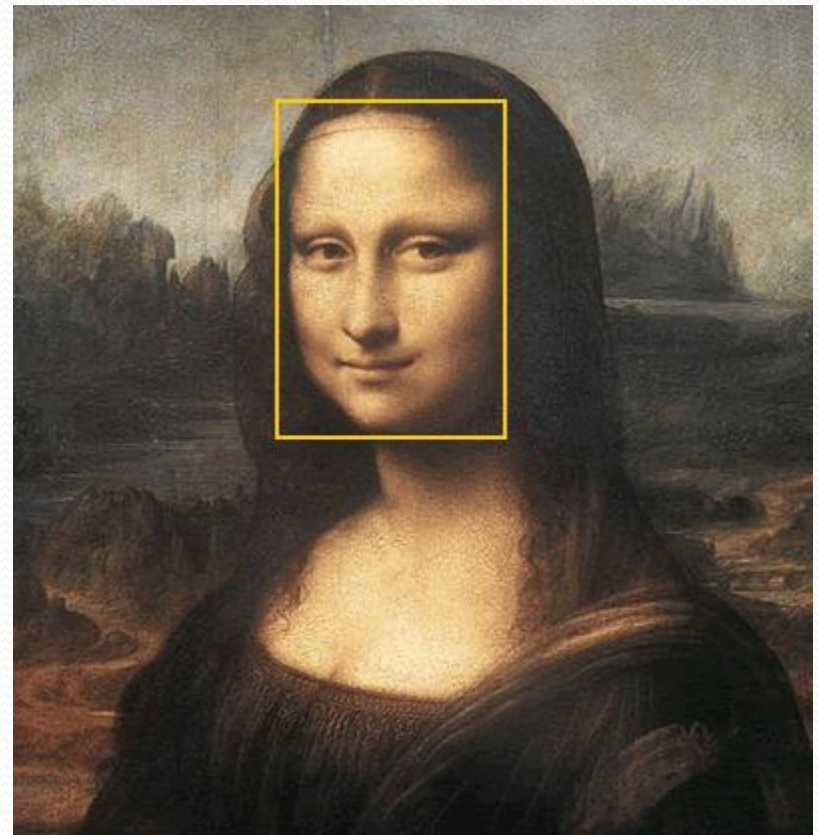
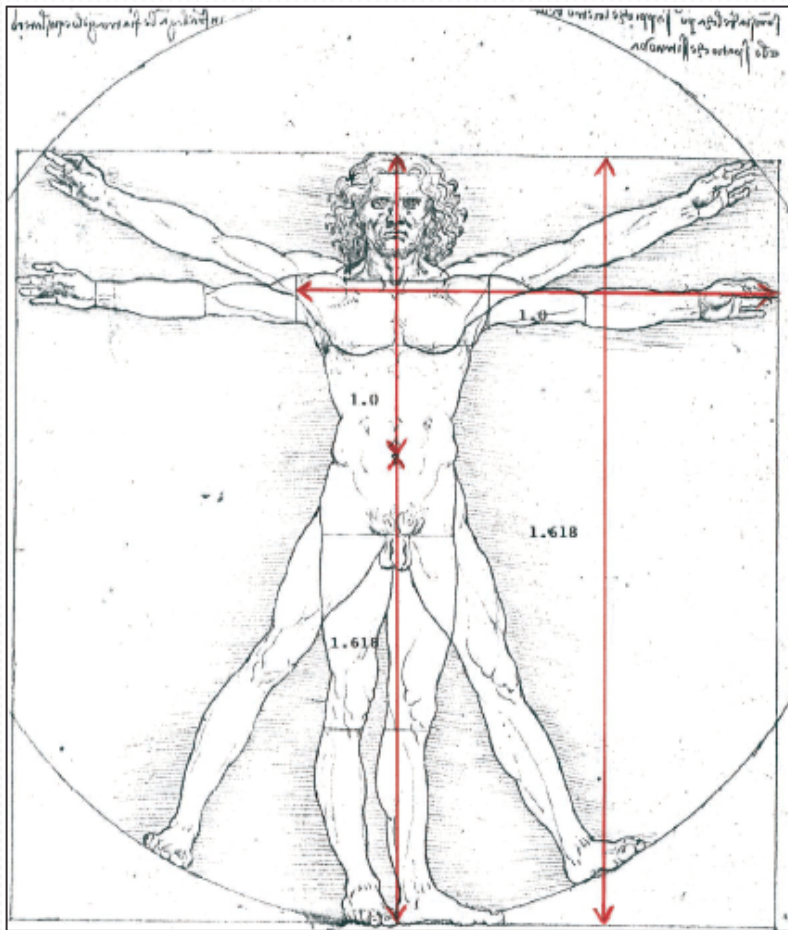
- *Matematika*

- zlatni trokut
- zlatna spirala
- pentagon/pentagram
- zlatni romb
- zlatna piramida
- limes omjera susjednih Fibonaccijevih brojeva

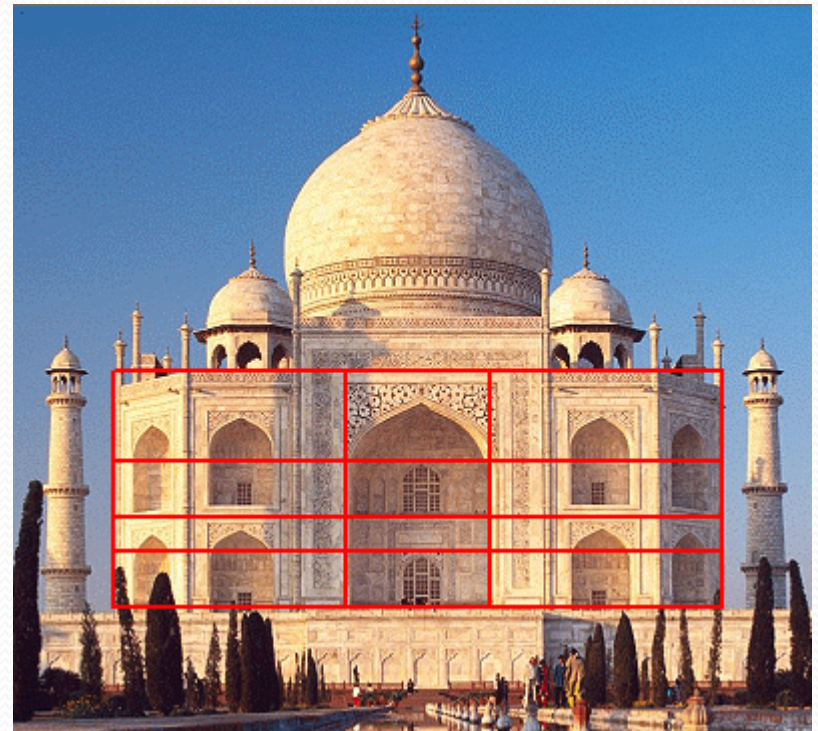
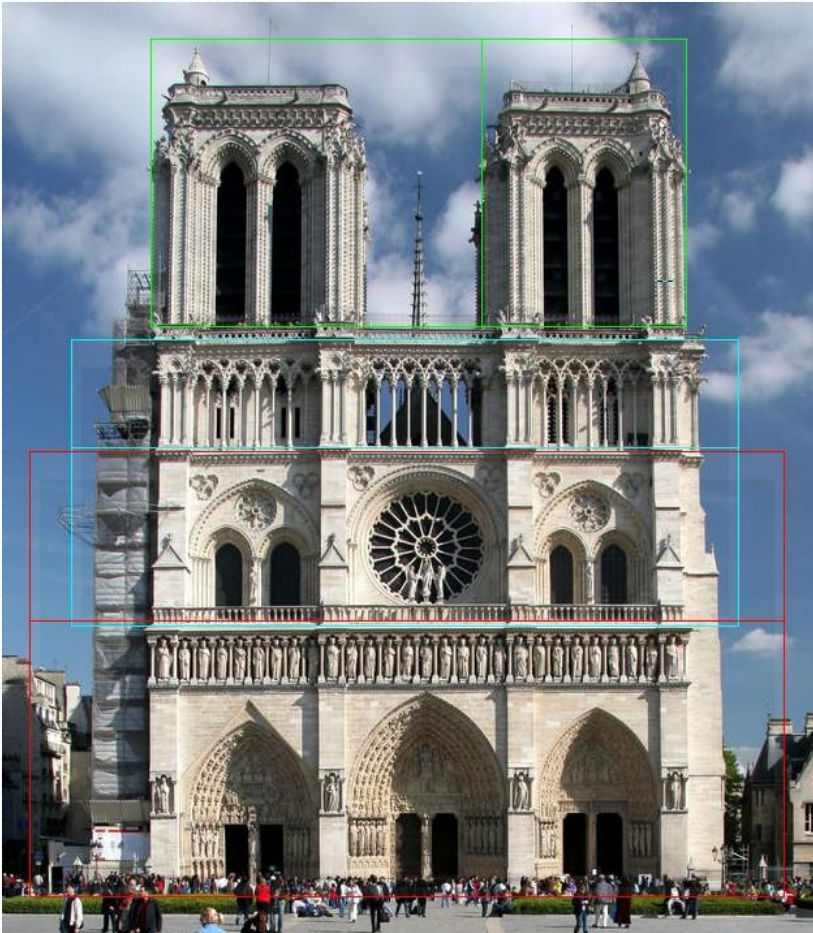
Athena i David



Vitruvian Man i Mona Lisa



Notre dame de Paris i Taj Mahal



Preporuke

- Steven R. Finch: “Mathematical Constants”
- Charles Siefe: “Zero: The Biography of a Dangerous Idea”
- David Blatner: “The Joy of π ”
- BBC dokumentarac “The Story of One”