

MODELIRANJE INTERAKCIJA U PROCJENI DOŽIVLJENJA

Anamarija Jazbec

jazbec@sumfak.hr

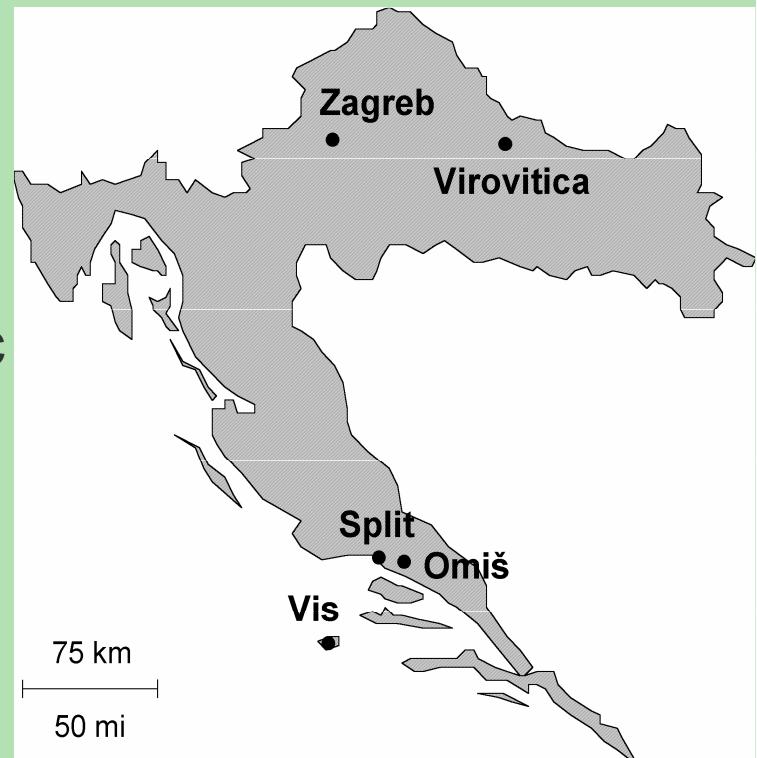
“Istraživanje učestalosti kroničnih bolesti pučanstvu Hrvatske, a napose kroničnog bronhitisa, 1969.-1982.”

Uzorak pregledan: 1969, 1972 i 1982

Uzorak je **stratificiran po dobi i spolu** iz
popisa birača iz 1967. i obuhvaćao je
regije

Primorsku: Split, Omiš, Vis i Komiža

*Panonsku: Virovitica i ruralna okolica, te
Zagreb – Centar i Črnomerec*



Ciljevi→

- procijeniti funkcije doživljenja po spolu i regiji
- procjeniti efekt regije na rizik smrti
- Analizirat će se moguće interakcije između parova varijabli. Usporedit će se rezultati analiza kada je interakcija zanemarena, odnosno uključena. Razradit će se metodologija analize i način uključivanja polučenih interakcija, te interpretacija rezultata takve analize, kao i identifikacija pojedinačnih prediktora i njihovih interakcija za procjenu doživljenja

■ Analiza doživljjenja (Survival analysis)

- cenzuriranje
- varijable promjenjive u vremenu (time-dependent covariates)

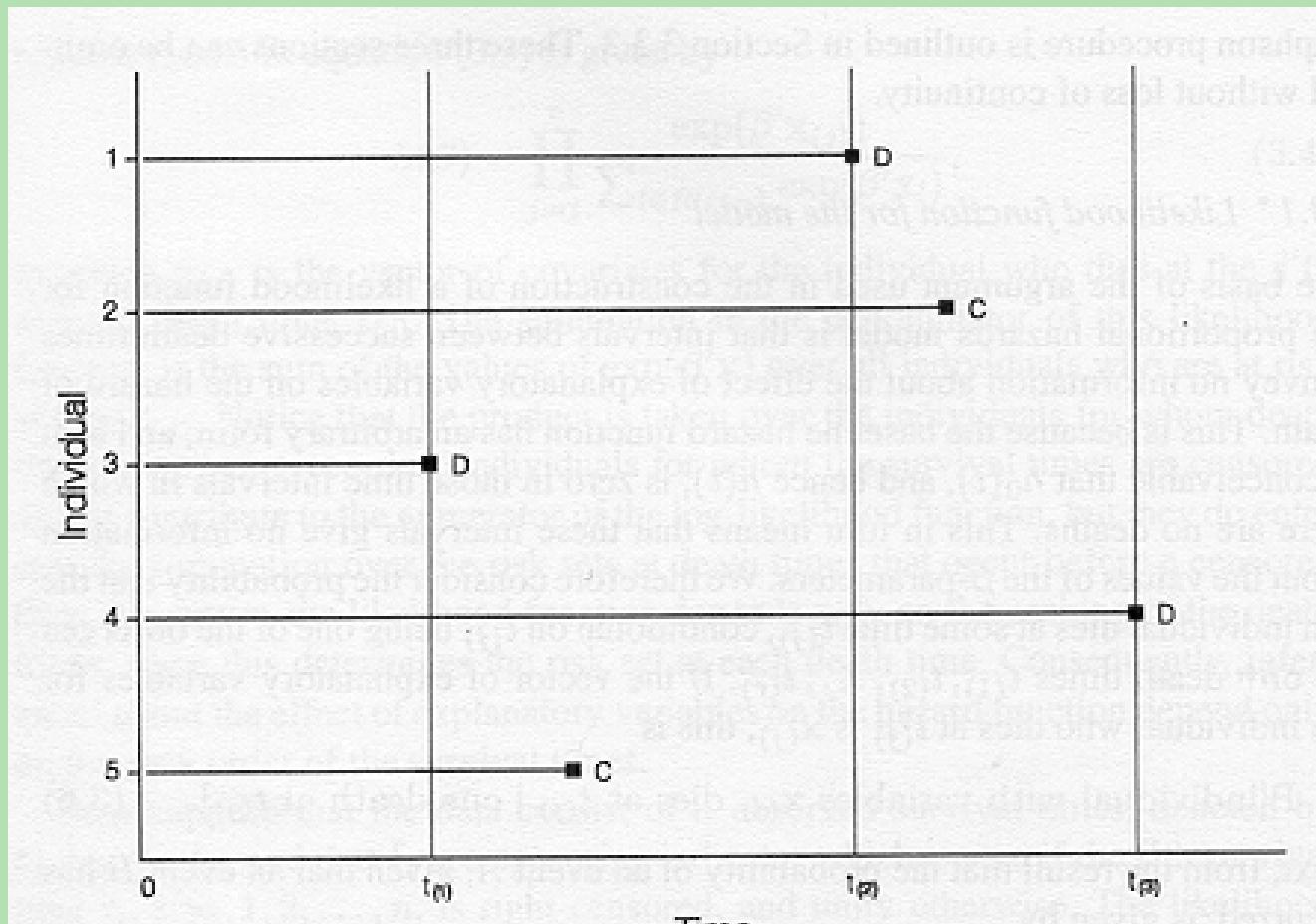


Figure 3.1 Survival times of five individuals.

T događaj koji promatramo

Kumulativna funkcija distribucije vremena do događaja

$$F(t) = P\{T < t\} = \int_0^t f(u)du$$

dio populacije koja je umrla do vremena t

Uz pretpostavku da slučajna varijabla T ima distribuciju vjerojatnosti koja leži ispod funkcije gustoće vjerojatnosti $f(t)$.

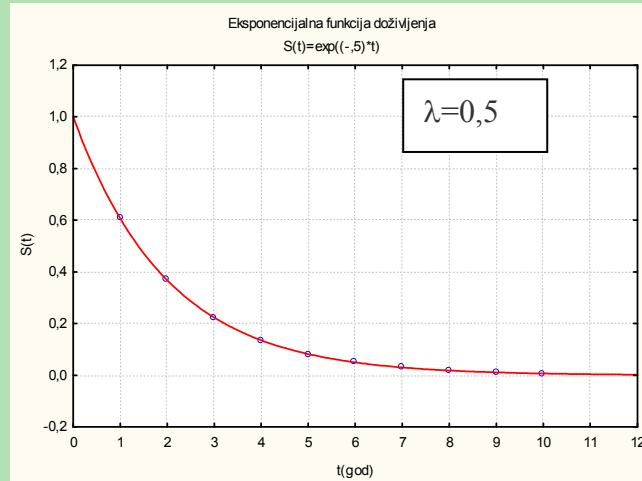
Funkcija doživljjenja

$$S(t) = P\{T \geq t\} = 1 - F(t)$$

dio populacije koja je još živa u vremenu t

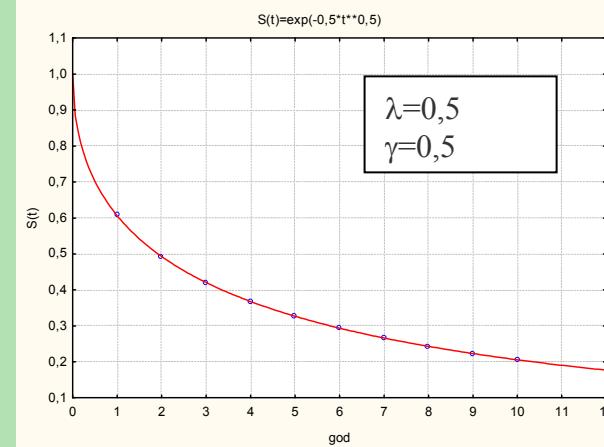
Neke parametrijske funkcije doživljaja

Eksponencijalna funkcija

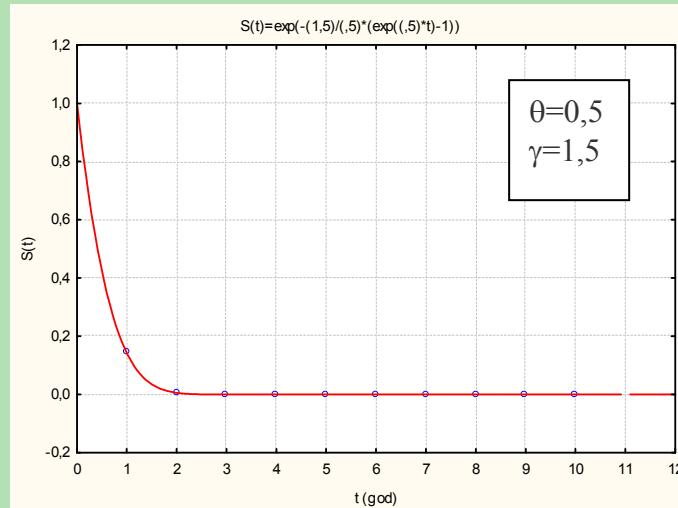


$$S(t) = e^{-\lambda t} \quad ; \lambda > 0, t \geq 0$$

Weibull funkcija



$$S(t) = e^{-\lambda t^\gamma} \quad ; \lambda > 0, t \geq 0, \gamma > 0$$



Gompertz model

$$S(t) = e^{-\frac{\gamma}{\theta}e^{(\theta)t}-1} \quad ; \gamma > 0; t \geq 0$$

Neparametrijska procjena funkcije doživljjenja

Što kad imamo diskretnu slučajnu varijablu?

$$\hat{S}(t) = \prod_{i:t_i \leq t} \left[\frac{n_i - d_i}{n_i} \right] = \prod_{i:t_i \leq t} \left[1 - \frac{d_i}{n_i} \right]; t_1 \leq t \leq t_7; i = 1, 2, \dots, 7$$

n_i- broj rizičnih
d_i- broj događaja

product limit estimator-

T1, T2, T3

Kaplan-Meier procjenitelj

P(T3)=P(T1,T2,T3)=P(T3|T1,T2)P(T2|T1)P(T1)

Uspoređivanje više funkcija doživljjenja

Želimo li usporediti više funkcija doživljjenja

$$H_0: S_1(t) = S_2(t) \quad \text{ili} \quad H_1: S_1(t) \neq S_2(t)$$

$$H_0: S_1(t) = S_2(t) = \dots = S_k(t) \quad H_1: \text{barem jedna se razlikuje}$$

koristimo jedan od testova:

Log-Rank

$$\text{Log-Rank} = \sum_{i=1}^j (d_{1i} - e_{1i})$$

Wicoxon

$$W = \sum_{i=1}^j n_i (d_{1i} - e_{1i})$$

Funkcija hazarda

$P(\text{doživljenja do } t + \delta t) = P(\text{doživljenja do } t) P(\text{doživljenja za } \delta t \mid \text{uz uvjet da smo do } t \text{ doživjeli})$

$$\frac{P\{t \leq T < t + \delta t\}}{P\{T \geq t\}}$$
$$\frac{F(t + \delta t) - F(t)}{S(t)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{t \leq T < t + \Delta t | T \geq t\}}{\Delta t}$$

$$h(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{F(t + \delta t) - F(t)}{\delta t} \right\} \frac{1}{S(t)} = \frac{f(t)}{S(t)}$$

$$h(t) = -\frac{d}{dt} \{\ln S(t)\}$$

$$\int_0^t h(u) du = - \int_0^t \frac{d}{du} \{\ln S(u)\}$$

$$H(t) = -\ln S(t)$$

Cox-ov regresijski model

- bazira se na prepostavci proporcionalnog hazarda
- Osnovna funkcija hazarda (baseline) procjenjuje se neparametrijski (za rangirano vrijeme)
- parametri se procjenjuju nezavisno od funkcije hazarda (kvazi vjerodostojnost)

$$h_0(t)$$

$$\frac{\psi h_0(t)}{h_0(t)} = \psi = e^\beta$$

$$h_i(t) = \psi(X_i)h_0(t)$$

$$h_i(t) = \exp\left(\sum_{j=1}^p \beta_j x_{ji}\right)h_0(t)$$

$$\ln\left[\frac{h_i(t)}{h_0(t)}\right] = \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ji}$$

$$h_i(t) = h_0(t) \exp\left(\sum_{j=1}^p \beta_j x_{ji}(t)\right)$$

$$\frac{h_i(t)}{h_0(t)} = e^{\sum_{j=1}^p \beta_j x_{ji}} = \exp\left(\sum_{j=1}^p \beta_j x_{ji}\right)$$

•

Modeliranje interakcija

$$\begin{aligned} h(t, x_1, x_2, x_1 \cdot x_2) &= h_0(t) \cdot e^{(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2)} = h_0(t) \cdot \exp(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2) \\ &= h_0(t) \cdot \exp(\beta_1 x_1 + x_2 (\beta_1 + \beta_3 x_1)) \\ \text{ili} \qquad \qquad \qquad &= h_0(t) \cdot \exp(x_1 (\beta_1 + \beta_3 x_2) + \beta_2 x_2) \end{aligned}$$

Ako postoji biološka interakcija ona bi se morala očitovati i kao statistička u dobro definiranom modelu, dok postojanje statističke interakcije (ne aditivnost) ne implicira direktno postojanje biološke interakcije.

Koeficijenat β_i procjenjuje se metodom najveće vjerodostojnosti (engl. *maximum likelihood*).

Numerički je jednostavnije naći maksimum logaritma funkcije vjerodostojnosti (engl. *log Likelihood*).

Statistika koja se koristi za procjenu uspješnosti podudaranja modela je $-2\log$ vjerodostojnost (engl. *-2log Likelihood*).

$$\frac{h_i(t_i)}{\sum_{l \in R(t_i)} h_l(l)}$$

Za svaku osobu imamo p varijabli

$$\frac{h_0(t_i) \exp(\beta' x_i)}{\sum_{l \in R(t_i)} h_0(t_i) \exp(\beta' x_l)} = \frac{\exp(\beta' x_i)}{\sum_{l \in R(t_i)} \exp(\beta' x_l)}$$

Cox je 1972. (Cox) pokazao da funkcija vjerodostojnosti za model proporcionalnog hazarda je dana jednadžbom:

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{\exp(\beta' x_i)}{\sum_{l \in R(t_i)} \exp(\beta' x_l)} \right]^{s_i}$$

Funkcija
vjerodostojnosti
umnožak je
vjerojatnosti umiranja u
vremenu t_i za sva
opažena vremena smrti.

Zbog lakšeg računanja funkcija vjerodostojnosti se logaritmira (engl. *log-Likelihood function*)

$$\log L(\beta) = \sum_{i=1}^n s_i \left\{ \beta' x_i - \log \sum_{l \in R(t_i)} \exp(\beta' x_l) \right\}$$

Da bi procijenili vrijednosti β koje maksimiziraju logaritam funkcije vjerodostojnosti koristi se numerička Newton-Raphson metoda.

Prvo trebamo naći vrijednosti β za koje derivacija $\log L(\beta)$ je jednaka 0.

$$U(\beta_j) = \frac{\partial \log L}{\partial \beta_j} = \sum_i s_i \left[x_{ji} - \frac{\sum_l x_{jl} \exp(\beta' x_l)}{\sum_l \exp(\beta' x_l)} \right] = 0 \quad 1 \leq j \leq p$$

Vektor $U(\beta)$, dimenzije $p \times 1$, zovemo vektor efikasnih brojeva (engl. *vector of efficient scores*).

Prema Newton-Raphsonovoj proceduri, procjena β parametara (vektora koji sadrži β parametre) u $(r+1)$ -om iterativnom krugu (iteraciji) je:

$$\hat{\beta}_{r+1} = \beta_r + I^{-1}(\hat{\beta}_r) U(\hat{\beta}_r) \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

Relativna važnost prognostičkih faktora

Ona se može izmjeriti ili standarizirajući koeficijente regresije ili uz pomoć proporcije objašnjene varijance (POV) zavisne varijable.

Jedna od važnijih prednosti POV-a je mogućnost direktne usporedbe prognostičkih faktora s ostalima, jer se svaki faktor ili grupa faktora karakterizira s jednim brojem, što kod regresijskih koeficijenata nije moguće.

R^2 u linearnim regresijskim modelima

POV za Coxov model (Schemper M.(1993) The Relative Importance of Prognostic Factors in Studies of Survival, Statistics in Medicine, 12:2377-2382)

Uzorak→

analiza je uključila sve ispitanike koji su bili pregledani 1972. i svi su bili pozvani 1982.
27.9% ih se nije odazvalo

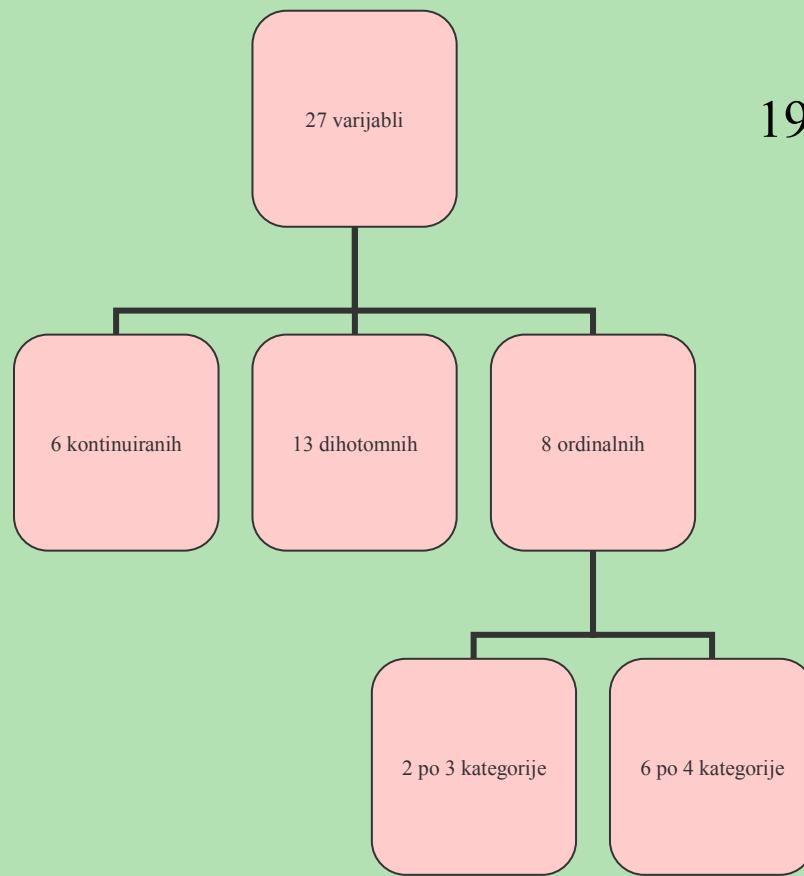
	ukupno	muškarci	žene
1972.	3354	1786	1568
1982.	2418	1325	1093

između analiziranih s obzirom na dob nema statističke razlike

po regijama ($p=0.46$)

po spolu ($p=0.38$)

Istraživanje je obuhvaćalo:



Osnovnih varijabli

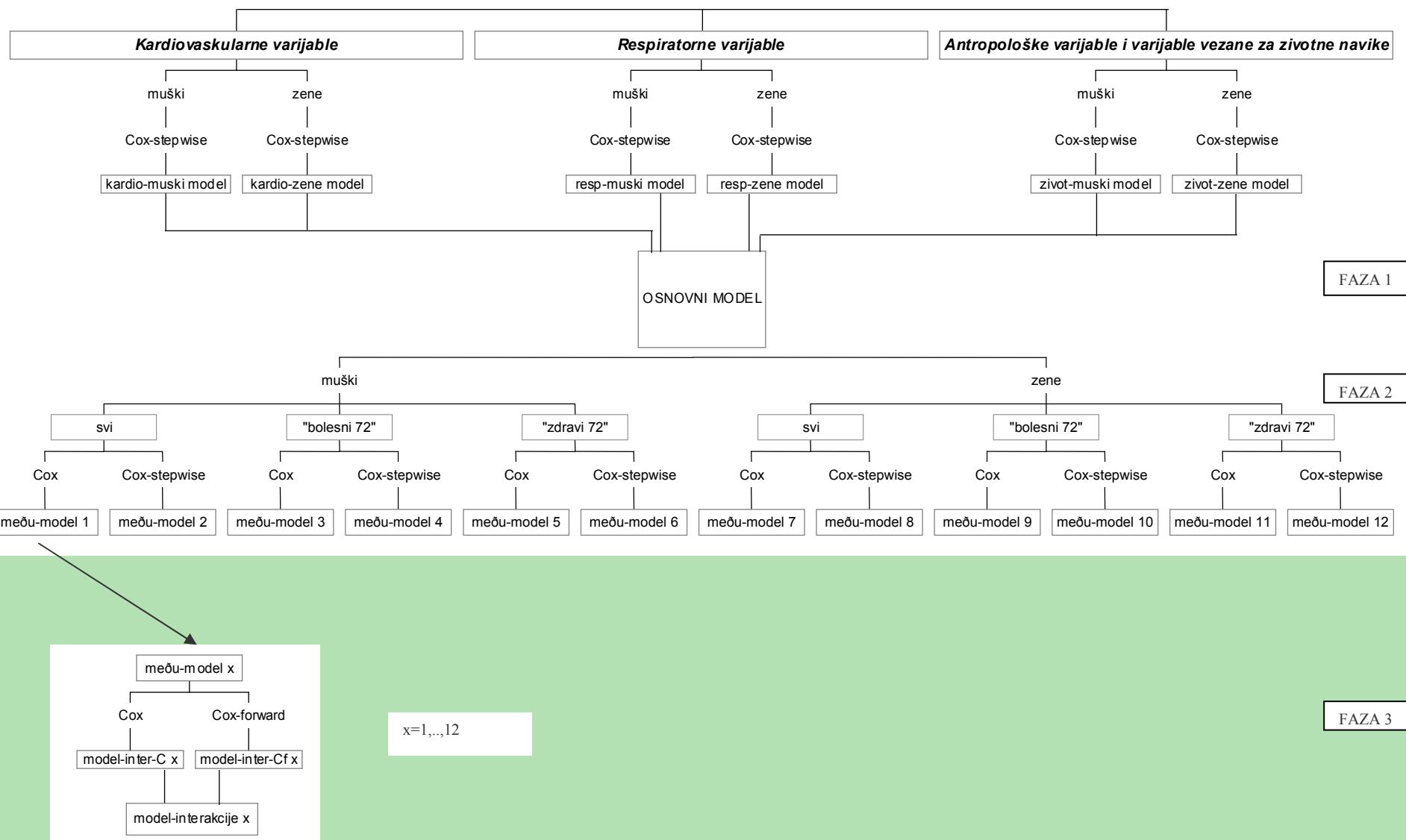
$$19 + 2 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 19 + 4 + 18 = 41$$

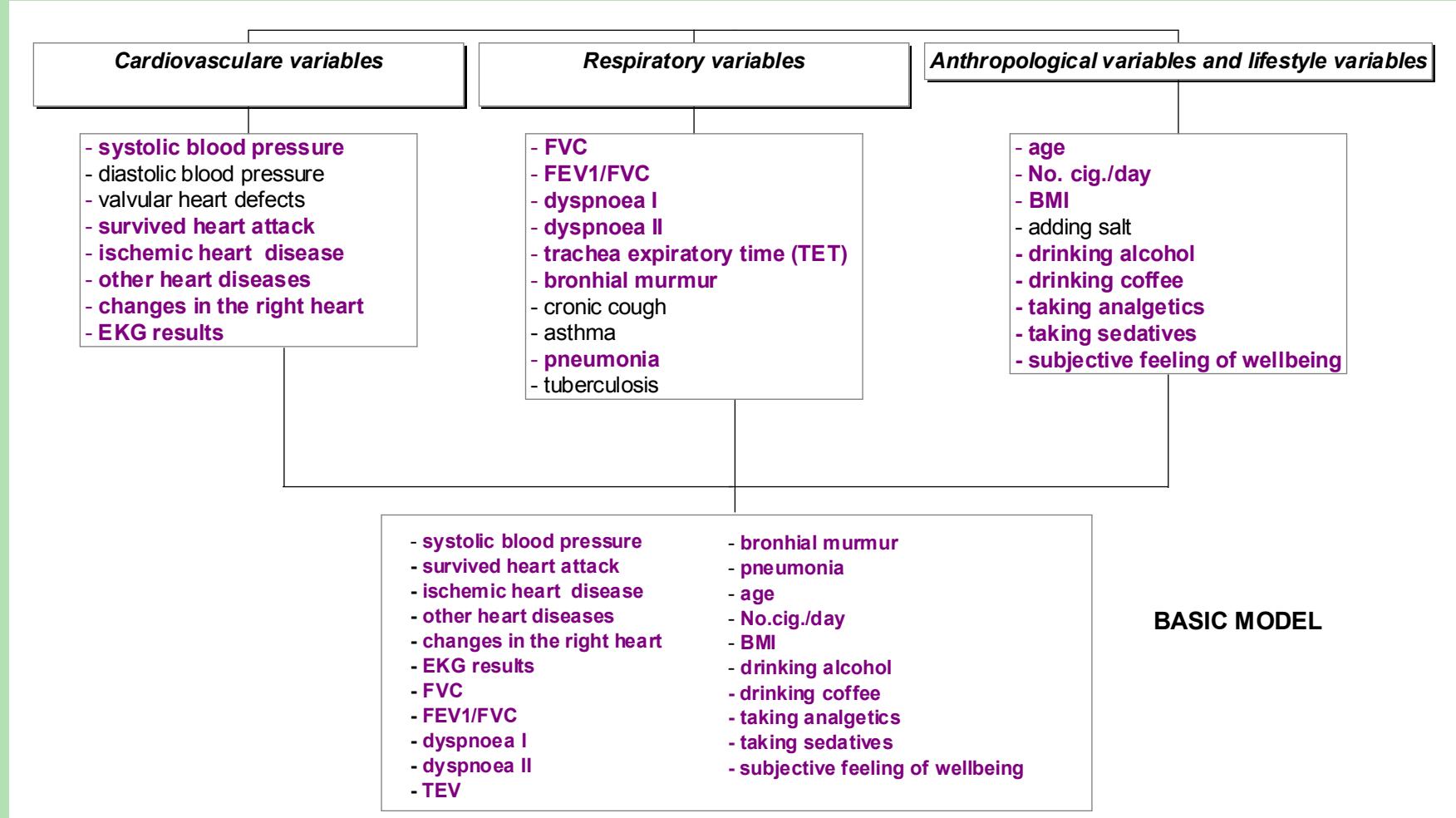
Dvostrukih interakcija

$$\binom{41}{2} = 820$$

861

	Ukupno	Broj smrti (%)	Broj cenzuriranih (%)
Ukupno	3364	950 (28.2)	2414 (71.8)
Muškarci	1571	568 (36.2)	1003 (63.8)
Žene	1793	382 (21.3)	1411 (78.7)





Analizirali smo četiri modela:

1. učinak regije
2. učinak dobi, BMI, pušenja i konzumiranje alkohola
3. glavni učinci + interakcije
4. glavni učinci + interakcije + dodatni učinak regije

Deskriptivna statistika analiziranih podataka (broj popušenih cigareta na dan samo za pušače)

	N total	Variable	N	N of miss	Min.	25% Q1	Med.	75% Q3	Max.	Mean	Std. Dev.
MUŠKI	1568	Age '72	1568	0	35	43	48	52	66	47.56	5.68
		BMI '72	1554	14	15.75	23.62	26.07	28.41	42.86	26.20	3.61
		BMI '82	1090	478	15.92	25.16	27.46	29.96	40.81	27.61	3.79
		Num.cig./day'72	820	14	1	20	20	30	80	23.59	11.05
		Num.cig./day'82	489	478	1	15	20	30	90	21.45	12.17
ŽENE	1786	Age '72	1785	1	36	43	48	53	60	47.74	5.73
		BMI '72	1770	16	14.69	24.54	27.43	30.42	49.98	27.79	4.55
		BMI '82	1320	466	17.53	26.30	29.10	32.05	59.65	29.49	4.83
		Num.cig./day'72	258	16	1	10	20	20	40	17.00	9.18
		Num.cig./day'82	228	466	1	5	10	20	40	13.97	9.79

Podaci o konzumiranju alkohola

Alkohol	1972		1982	
	muški	žene	muški	žene
N (broj onih koji nedostaju)	1555 (13)	1769 (17)	1084 (484)	1299 (487)
Nikada	182	561	147	475
Ponekad	685	992	631	769
Redovito <1 l vina	560	208	235	52
Redovito >1 l vina ili 2 dcl alkohola	128	8	71	3

Desno cenzurirani→

smrti klasificirane kao vanjski uzrok
(MKB 9E)

nepoznati datum smrti
nakon zadnjeg kontakta nemamo nikakvih
podataka o pacijentu

Veličina uzorka i broj broj smrti po regiji i spolu

	Total N	Deaths N	Censored N (%)
Črnomerec	649	182	467 (71.9)
Men	292	111	181 (62.0)
Women	358	71	287 (80.1)
Centar	548	144	404 (73.7)
Men	273	88	185 (67.8)
Women	275	56	219 (79.6)
Virovitica	767	275	492 (64.1)
Men	338	168	170 (50.3)
Women	429	107	322 (75.0)
Omiš	742	203	539 (72.6)
Men	363	118	245 (67.5)
Women	379	85	294 (77.6)
Split	371	76	295 (79.5)
Men	182	49	133 (73.1)
Women	189	27	162 (85.7)
Vis	276	68	208 (75.4)
Men	120	32	88 (73.3)
Women	156	36	120 (76.9)
Total	3354	948	2406 (71.7)
Men	1568	566	1002 (63.9)
Women	1786	382	1404 (78.6)

Od 1996. do 1999. skupljani su podaci o datumu i uzroku smrti.

📁 registar matičnih ureda

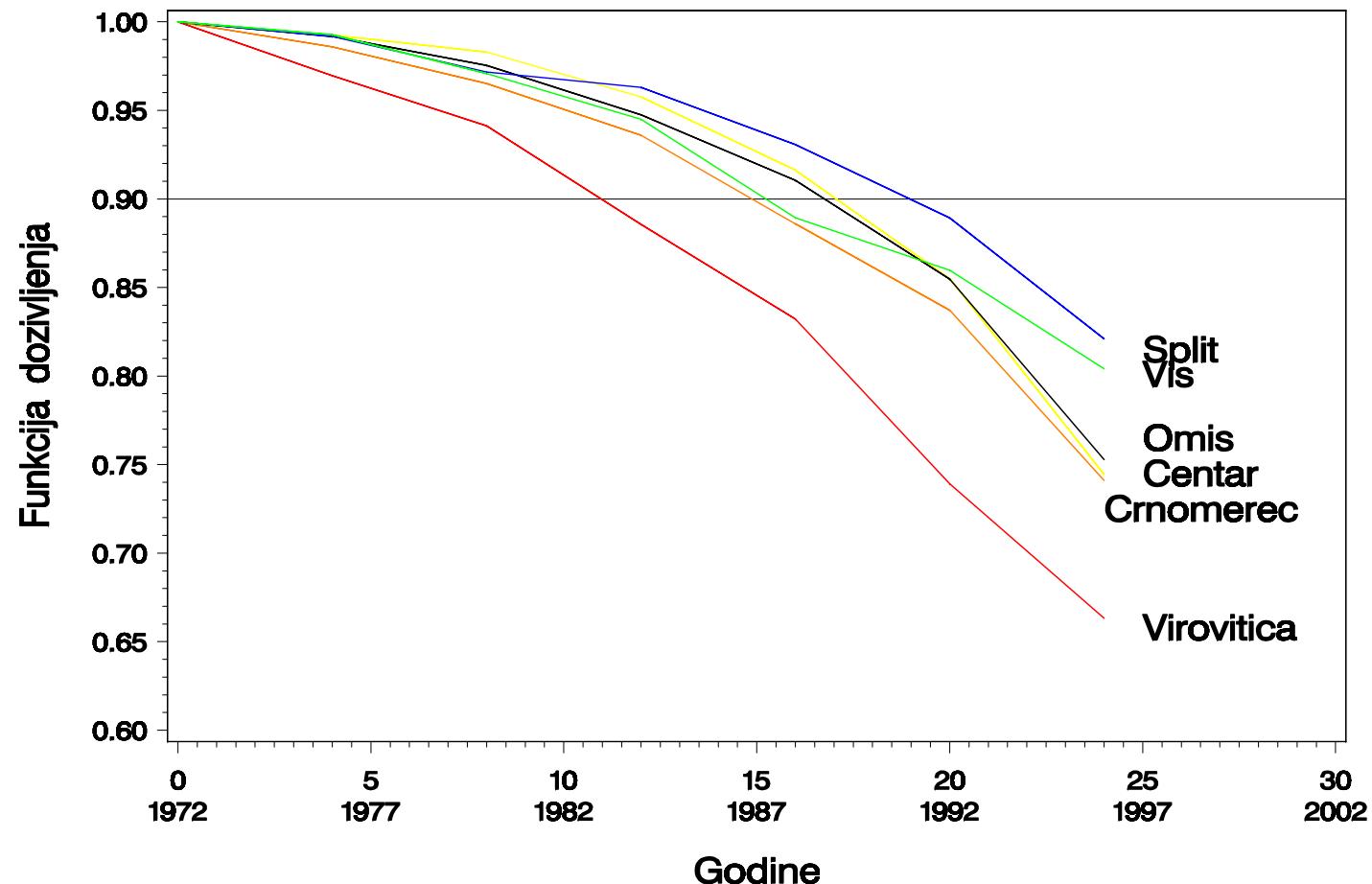
✚ crkvenim registrima

📞 telefonski kontakt

Metode→

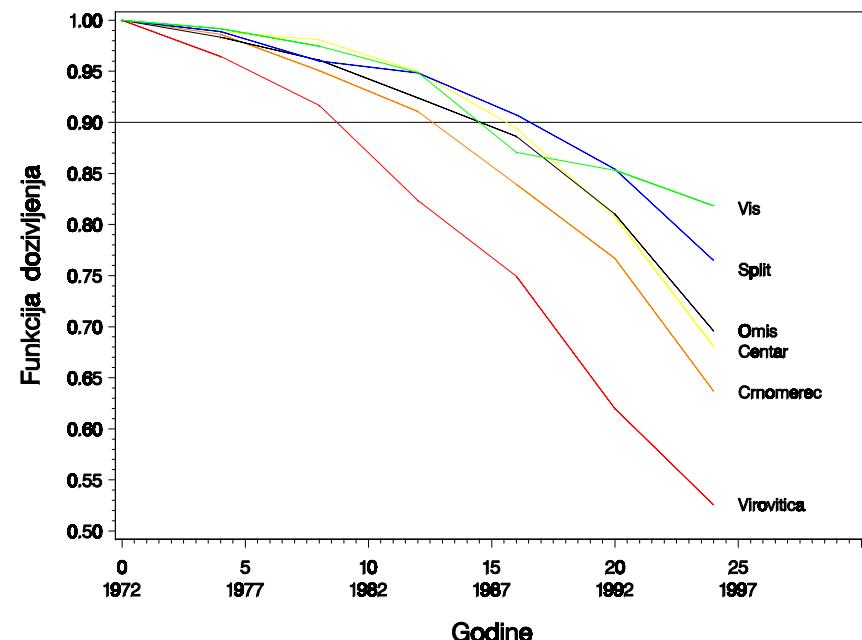
- funkcije doživljenja procijenjene su tablicama doživljenja (KM procjenitelj)
- Hazard smrti, 95% CI i procjene parametra procjenili smo koristeći Coxovu regresiju s vremenski promjenjivim varijablama
- Usporedba prikladnosti dvaju modela analizirana je promjenom $-2\log$ Likelihooda (vjerodostojnosti)
- Korištena je Breslow-ova korekcija za višestruke jednake vrijednosti doživljenja

Rezultati →

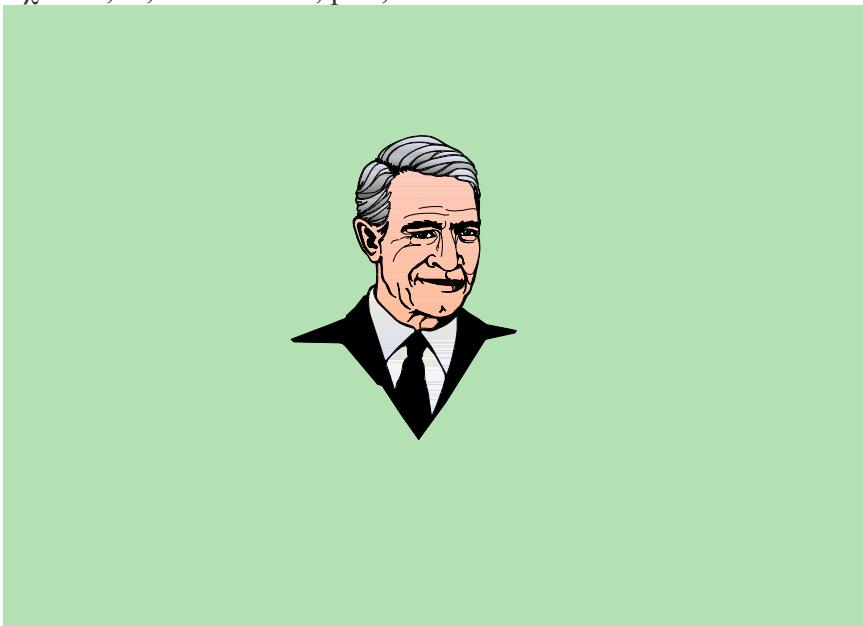


$\chi^2=49.85$, 5 st.slobode, p=0,0001

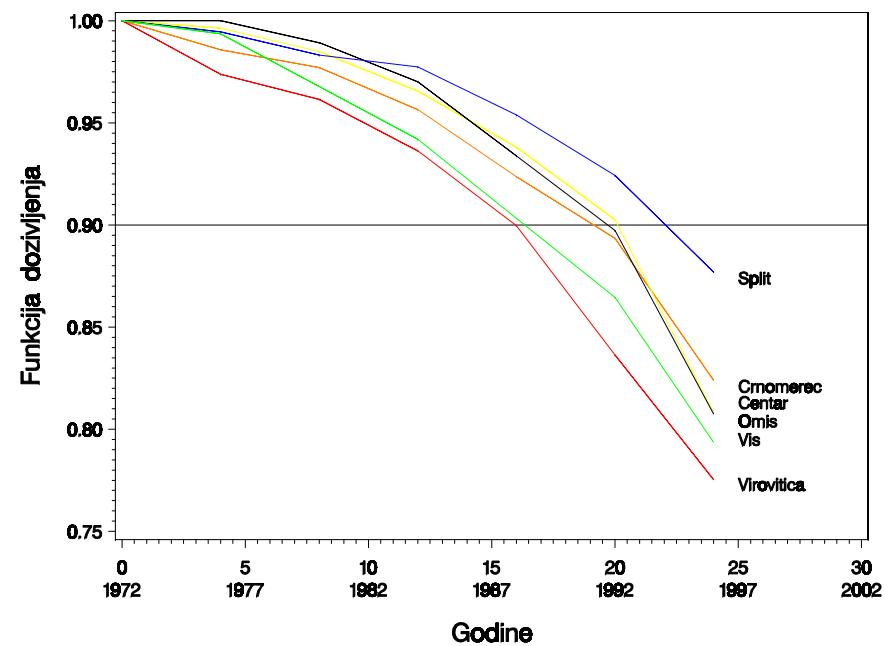
muškarci



$\chi^2=59,17$, 5 st.slobode, $p=0,0001$

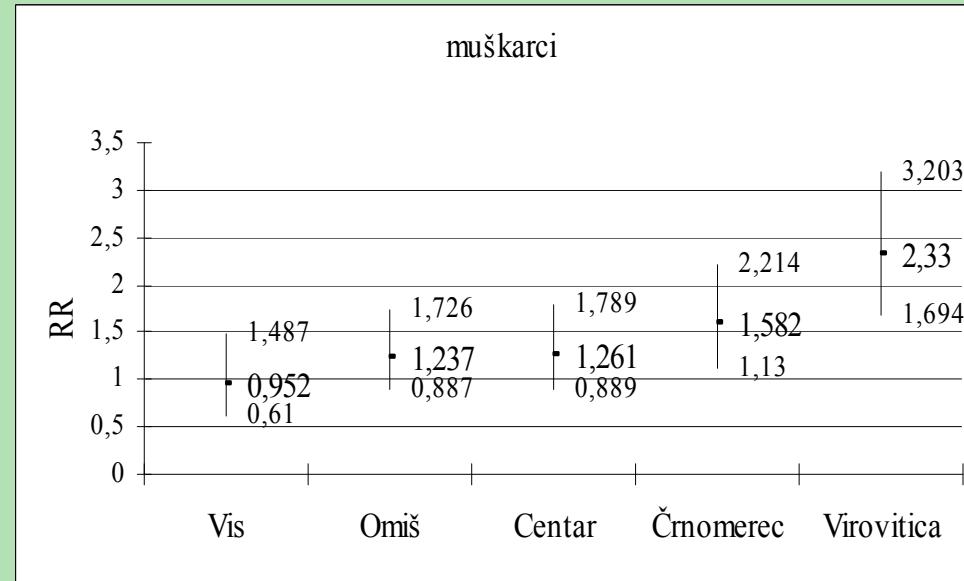


žene

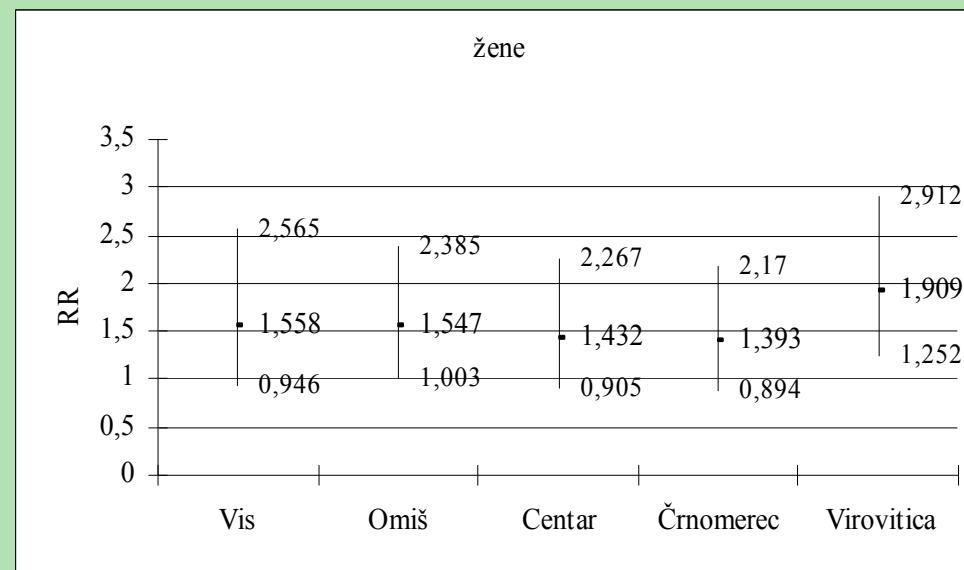


$\chi^2=11,24$, 5 st.slobode, $p=0,047$



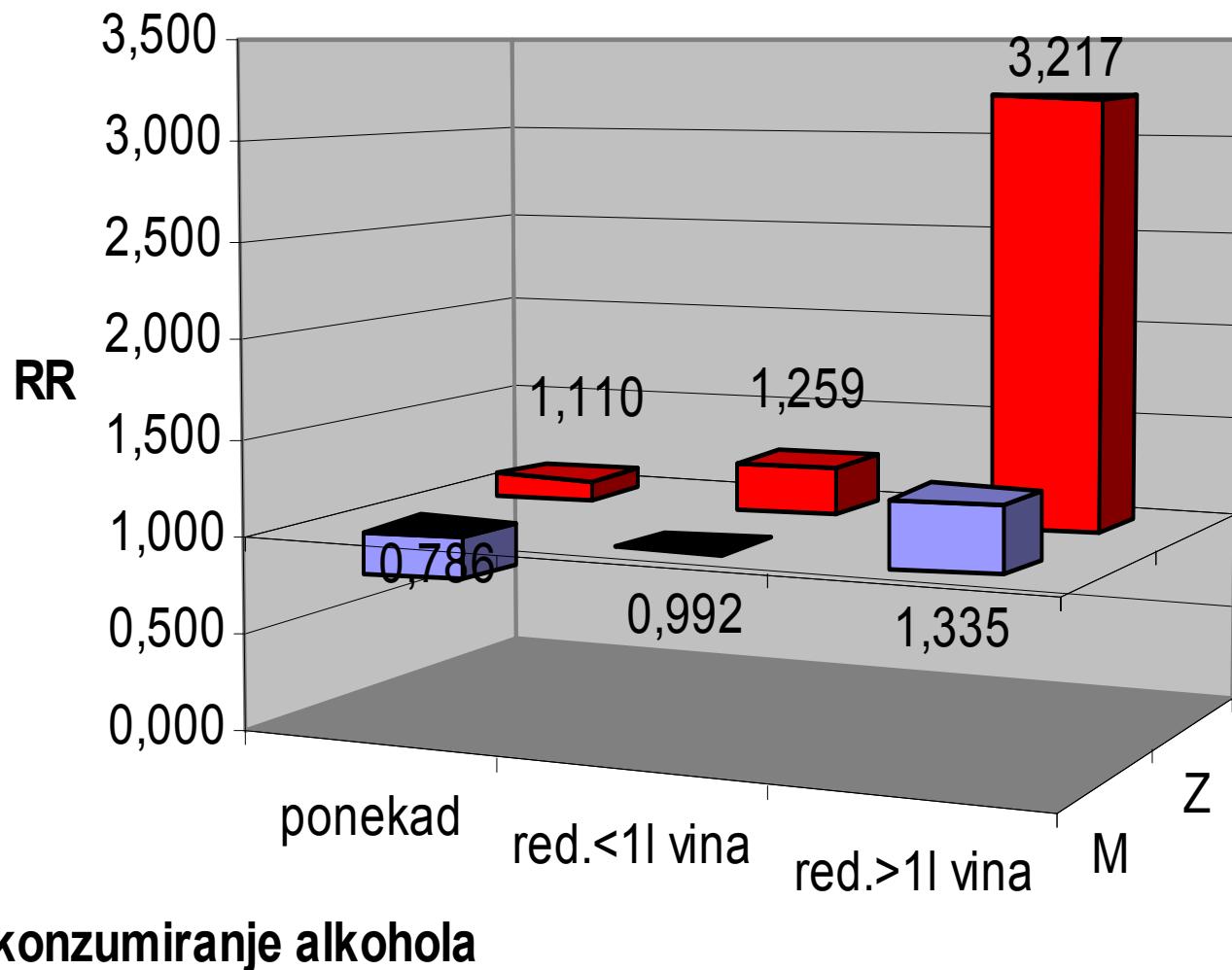


Model 1



Model 2.

		Procjena parametra	Standardna greška	p	RR	95% CI	
						Donja	Gornja
MUŠKARCI	Dob	0.0661	0.0076	0.0001	1.068	1.052	1.084
	BMI Q1-Q3	-0.4902	0.0983	0.0001	0.613	0.505	0.743
	BMI >Q3	-0.1562	0.1324	0.2379	0.855	0.660	1.109
	Broj cig./dan	0.0137	0.0028	0.0001	1.014	1.008	1.019
	Konzumiranje alkohola						
	‘ponekad’	-0.2407	0.1286	0.0612	0.786	0.611	1.011
	redovito<11 vina	-0.0085	0.1367	0.9503	0.992	0.758	1.296
	redovito>11 vina	0.2889	0.1744	0.0976	1.335	0.948	1.879
ŽENE	Dob	0.1173	0.0100	0.0001	1.124	1.103	1.147
	BMI Q1-Q3	-0.2028	0.1492	0.1742	0.816	0.609	1.094
	BMI >Q3	-0.0951	0.1610	0.5548	0.909	0.663	1.247
	Broj cig./dan	0.0145	0.0071	0.0418	1.015	1.001	1.029
	Konzumiranje alkohola						
	‘ponekad’	0.1046	0.1105	0.3438	1.110	0.894	1.379
	redovito<11 vina	0.2306	0.2128	0.2785	1.259	0.830	1.911
	redovito>11 vina	1.1684	0.7137	0.1016	3.217	0.794	13.031



Model 3.

		Procjena parametra	Standardna greška	p	RR	95% CI	
						Donja	Gornja
MUŠKARCI	Dob	0.0379	0.0101	0.0002	1.039	1.018	1.059
	BMI Q1-Q3	-2.4137	0.6716	0.0003	0.089	0.024	0.334
	BMI >Q3	-0.1062	0.1333	0.4253	0.899	0.692	1.168
	Broj cig./dan	0.0140	0.00279	0.0001	1.014	1.009	1.020
	Konzumiranje alkohola						
	‘ponekad’	-2.1332	0.7048	0.0025	0.118	0.030	0.472
	redovito<11 vina	-0.0234	0.1368	0.8641	0.977	0.747	1.277
	redovito>11 vina	0.2781	0.1745	0.1110	1.321	0.938	1.859
	dob* BMI Q1-Q3	0.0298	0.0102	0.0035	1.030	1.010	1.051
	dob* ‘ponekad’	0.0287	0.0104	0.0061	1.029	1.008	1.051
ŽENE	Dob	0.1003	0.0119	0.0001	1.105	1.080	1.132
	BMI Q1-Q3	-3.0379	0.8928	0.0007	0.048	0.008	0.276
	BMI >Q3	-0.0801	0.1621	0.6212	0.923	0.672	1.268
	Broj cig./dan	0.0148	0.0071	0.0374	1.015	1.001	1.029
	Konzumiranje alkohola						
	‘ponekad’	-0.2481	0.1543	0.1078	0.780	0.577	1.056
	redovito<11 vina	0.2132	0.2129	0.3168	1.238	0.815	1.879
	redovito>11 vina	1.0861	0.7143	0.1284	2.963	0.731	12.015
	dob* BMI Q1-Q3	0.0358	0.0128	0.0054	1.036	1.011	1.063
	BMI Q1-Q3* ‘ponekad’	0.7053	0.2102	0.0008	2.024	1.341	3.057

$$RR = \exp(0.0379 \cdot dob - 2.1332 \cdot ponekad + 0.0287 \cdot dob * ponekad) \\ = \exp(dob(0.0379 + 0.0287 \cdot ponekad) - 2.1332 \cdot ponekad)$$

ili

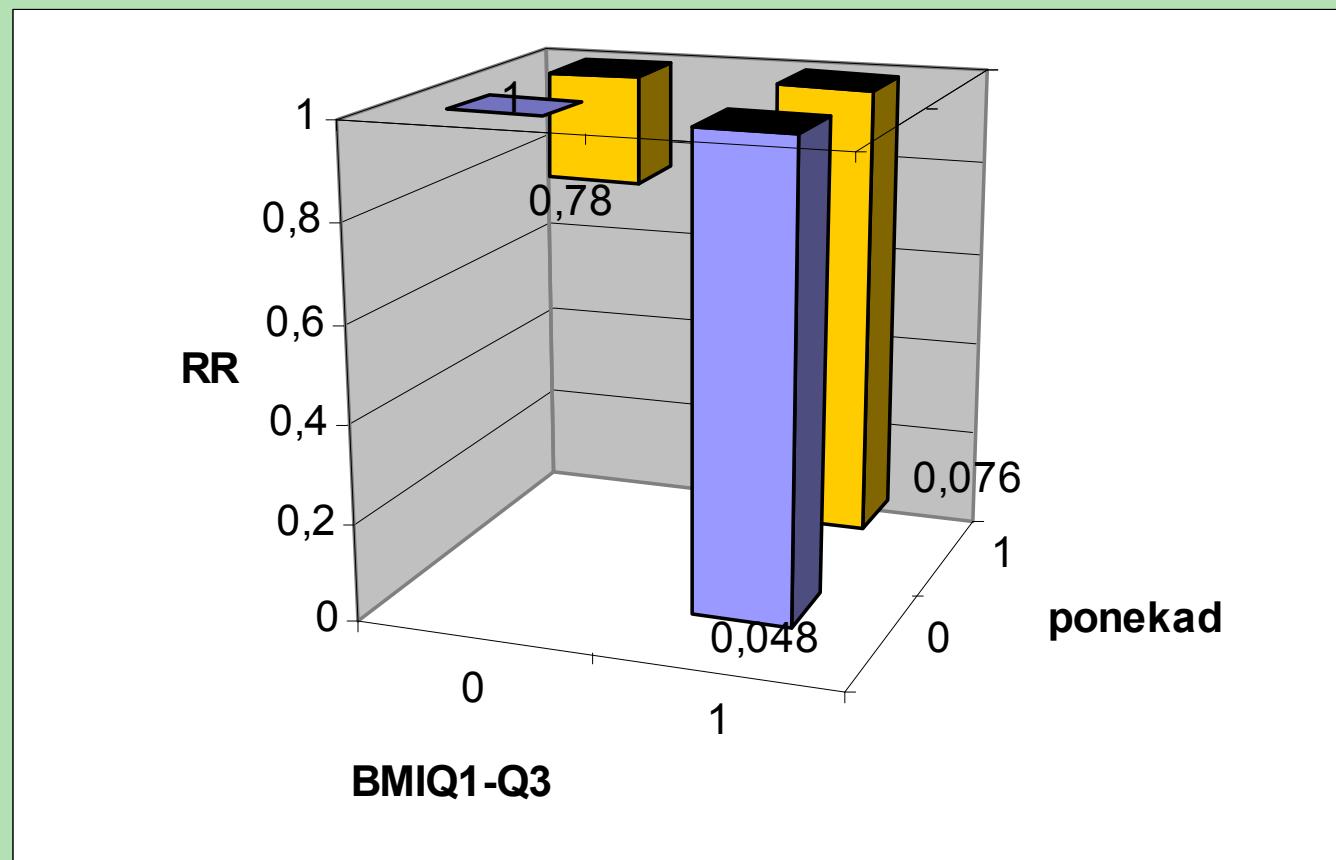
$$= \exp(0.0379 \cdot dob + ponekad(-2.1332 + 0.0287 \cdot dob))$$

$$RR = \exp(-3.0379 \cdot BMI_{Q1-Q3} - 0.2481 \cdot ponekad + 0.7053 \cdot BMI_{Q1-Q3} \cdot ponekad)$$

$$= \exp(BMI_{Q1-Q3}(-3.0379 + 0.7053 \cdot ponekad) - 0.2481 \cdot ponekad)$$

ili

$$= \exp(-3.0379 \cdot BMI_{Q1-Q3} + ponekad(-0.2481 + 0.7053 \cdot BMI_{Q1-Q3}))$$



Model 4.

		Procjena parametra	Standardna greška	p	RR	95% CI	
						Donja	Gornja
MUŠKARCI	Dob	0.0361	0.0100	0.0003	1.037	1.016	1.057
	BMI Q1-Q3	-2.4108	0.6716	0.0003	0.090	0.024	0.335
	BMI >Q3	-0.0012	0.1343	0.9928	0.999	0.768	1.300
	Broj cig./dan	0.0147	0.0028	0.0001	1.015	1.009	1.020
	Konzumiranje alkohola						
	‘ponekad’	-2.3105	0.7059	0.0011	0.099	0.025	0.396
	redovito<11 vina	0.0231	0.1395	0.8682	1.023	0.779	1.345
	redovito>11 vina	0.1225	0.1811	0.4988	1.130	0.793	1.612
	dob* BMI Q1-Q3	0.0310	0.0101	0.0023	1.032	1.011	1.052
	dob* ‘ponekad’	0.0315	0.0105	0.0026	1.032	1.011	1.054
	Vis	-0.0356	0.2302	0.8769	0.965	0.615	1.515
	Omiš	0.2674	0.1711	0.1818	1.307	0.934	1.827
	Centar	0.3498	0.1791	0.0507	1.419	0.999	2.015
	Črnomerec	0.5829	0.1731	0.0008	1.791	1.276	2.515
	Virovitica	0.8299	0.1658	0.0001	2.293	1.657	3.174
ŽENE	Dob	0.1027	0.0120	0.0001	1.108	1.082	1.135
	BMI Q1-Q3	-3.0458	0.8959	0.0007	0.048	0.008	0.275
	BMI >Q3	-0.0801	0.1621	0.6227	0.923	0.672	1.268
	Broj cig./dan	0.0215	0.0075	0.0039	1.022	1.007	1.037
	Konzumiranje alkohola						
	‘ponekad’	-0.2360	0.1549	0.1278	0.790	0.583	1.070
	redovito<11 vina	0.1728	0.2163	0.4241	1.189	0.778	1.816
	redovito>11 vina	0.8667	0.7166	0.2265	2.379	0.584	9.691
	dob* BMI Q1-Q3	0.0365	0.0129	0.0047	1.037	1.011	1.064
	BMI Q1-Q3* ‘ponekad’	0.6940	0.2109	0.0010	2.002	1.324	3.027
	Vis	0.4578	0.2577	0.0756	1.581	0.954	2.619
	Omiš	0.3829	0.2271	0.0918	1.467	0.940	2.289
	Centar	0.3629	0.2351	0.1226	1.438	0.907	2.279
	Črnomerec	0.2909	0.2270	0.2001	1.338	0.857	2.087
	Virovitica	0.7509	0.2207	0.0007	2.119	1.375	3.266

Usporedba triju modela

	d.f.	spol	-2log Vjerodostojnost		-2log Vjerodostojnost	p		-2log Vjerodostojnost	p		
Model 2	7	M	152.903	M	17.282	0.0002					
		Ž	157.090								
Model 3	9	M	170.185	Ž	18.931	0.0000	M	45.396	0.0000		
		Ž	176.021								
Model 4	14	M	215.581				Ž	16.291	0.0068		
		Ž	192.312								

Zaključci →



Žene
duže
žive

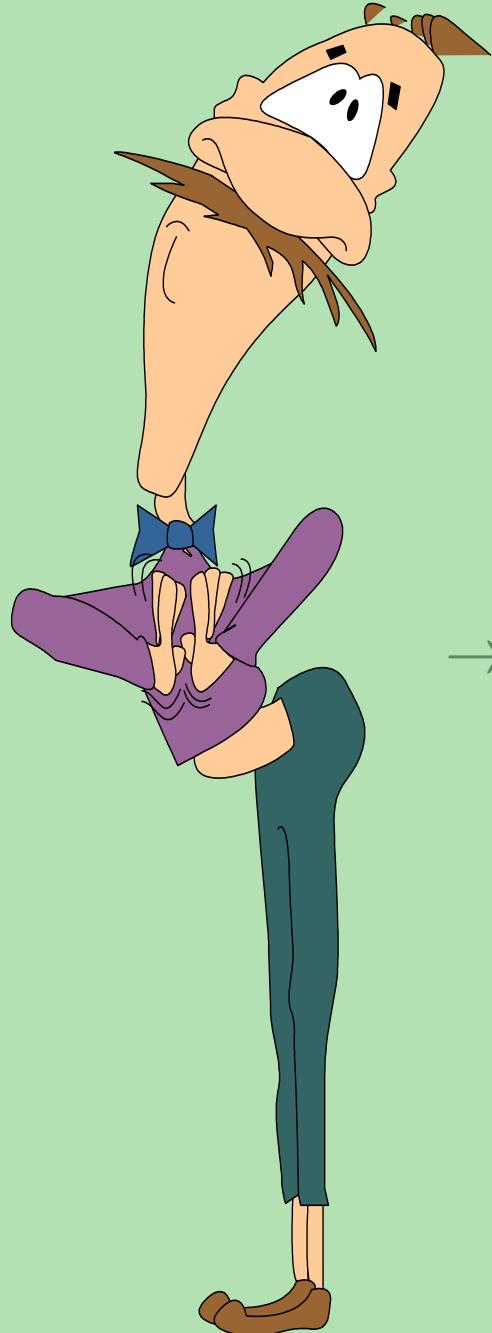


Stanovnici primorske regije
živi duže od stanovnika
kontinentalne regije





- Umjerenog konzumiranje alkohola smanjuje rizik smrti
- Žene su osjetljivije na alkohol



→ **Rizik smrti se
povećava s
nižim i višim BMI
od normalnog
($BMI < Q1$ i $BMI > Q3$)**





→ Pušenje povećava rizik
smrti,

→ Postoje indicije da
ženama
pušenje povećava rizik
smrti
više
nego muškarcima.

Literatura

- Klein J.P., Moeschberger. Survival Analysis, 2nd Ed., Springer, New York: 2003.
- Collett D. Modelling survival data in medical research. London: Chapman & Hall; 1994.
- Allison PD. Survival Analysis Using the SAS System. A Practical Guide, SAS Institute Inc., Cary, NC: 1995.
- Cantor A. SAS Survival Analysis Techniques for Medical Research, SAS Institute Inc., Cary, NC: 1997.
- Cox DR. Regression models and life tables. Journal of the Royal Statistics Society B 1972; 74: 187-220.
- Schemper M. The relative importance of prognostic factors in studies of survival. Stat Med 1993; 12: 2377-83.
- Schemper M. Non-parametric analysis of treatment-covariate interaction in the presence of censoring. Stat Med 1988; 7: 1257-66.
- Lee ET. Statistical Methods for Survival Data Analysis. Belmont: Wadsworth. Inc; 1980.
- Altman DG. De Stavola BL. Practical problems in fitting a proportional hazard model to data with updated measurements of the covariates. Stat Med 1994; 14: 301-41.
- Henderson R. Problems and prediction in survival-data analysis. Stat Med 1995; 14: 161-84.
- Schemper M. Predictive accuracy and explained variation in Cox regression. Biometrics 2000; 56(1): 249-55.
- Schemper M, Heinze G. Probability imputation revisited for prognostic factor studies. Stat Med 1997; 16(1-3): 73-80.