Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

18. veljače 2014.

1. Neka su a, b i c realni brojevi takvi da je $a \leqslant b \leqslant c$. Dokaži da vrijedi

$$c^2 - b^2 + a^2 \geqslant (c - b + a)^2.$$

2. Odredi sve parove cijelih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$x^4 + 68 = 4y^4.$$

3. Postoje li realni brojevi x, y, z takvi da vrijedi

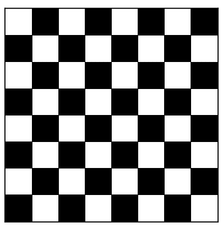
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = -5 \qquad \text{i} \qquad \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{x^2}{z^2} = 8\,?$$

4. Neka je $ABCD$ paralelogram sa šiljastim kutom u vrhu A. Neka je E nožište okomice iz točke C na pravac AB te neka je F nožište okomice iz točke C na pravac AD.

Dokaži da vrijedi

$$|AB| \cdot |AE| + |AD| \cdot |AF| = |AC|^2.$$

5. Ploča 8×8 na početku je obojena u dvije boje, crnu i bijelu, tako da su polja koja imaju zajedničku stranicu različitih boja, kao standardna šahovska ploča na slici. U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili stupac i svakom od osam polja u tom retku ili stupcu promijeniti boju iz crne u bijelu ili obratno. Može li se konačnim nizom takvih poteza postići da točno jedno polje na ploči bude crno?



Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

18. veljače 2014.

1. Neka je n prirodni broj i neka je S zbroj svih prirodnih brojeva od 1 do n.

Dokaži da broj S ne može biti za 1 manji od višekratnika broja 3.

2. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje je

$$\frac{\overline{z}}{z} + \frac{z}{\overline{z}}$$

prirodni broj.

3. Dani su pozitivni realni brojevi a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 za koje vrijedi $b_1^2 \leqslant 4a_1c_1$ i $b_2^2 \leqslant 4a_2c_2$. Dokaži da vrijedi

$$4(a_1 + a_2 + 5)(c_1 + c_2 + 1) > (b_1 + b_2 + 2)^2.$$

4. Točke P i Q leže na stranici $\overline{AB}$ pravokutnika $ABCD$ tako da vrijedi $|AP| = |PQ| = |QB|$. Pravac DQ siječe pravce AC i CP redom u točkama K i L, a pravac DB siječe pravce AC i CP redom u točkama N i M.

Odredi omjer površina četverokuta $KLMN$ i pravokutnika $ABCD$.

5. U svaki vrh pravilnog 50-erokuta je upisan ili broj 1 ili broj 2. Ni za koja tri uzastopna vrha upisani brojevi nisu jednaki, a ukupno je dvadeset puta upisan broj 1 i trideset puta upisan broj 2. Za svaki vrh izračunamo umnožak broja u tom vrhu s brojevima u dvama susjednim vrhovima, a zatim zbrojimo sve takve umnoške.

Dokaži da rezultat ne ovisi o rasporedu brojeva 1 i 2 te odredi taj rezultat.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

18. veljače 2014.

1. Neka su a, b, c, d realni brojevi takvi da vrijede jednakosti

$$2\cos a + 6\cos b + 7\cos c + 9\cos d = 0,$$
$$2\sin a - 6\sin b + 7\sin c - 9\sin d = 0.$$

Ako je $\cos(b+c) \neq 0$, odredi vrijednost izraza $\dfrac{\cos(a+d)}{\cos(b+c)}$.

2. Dan je kvadar $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kojem su duljine bridova $|AB| = |AD| = a$ i $|AA_1| = 2a$. Neka su A', B', C' i D' redom polovišta bridova $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ i $\overline{DD_1}$.

Odredi obujam tijela nastalog presjekom kocke $ABCDA'B'C'D'$ i piramide $A_1A'B'B_1D$.

3. U trokutu ABC simetrala kuta $\sphericalangle ACB$ siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D.

Ako je $|CB| = |CD|$, $|AD| = 4$ i $|DB| = 3$, odredi $|AC|$.

4. Odredi sve proste brojeve p za koje postoji prirodni broj n takav da su brojevi $n^2 + 3$ i $(n+1)^2 + 3$ djeljivi s p.

5. U svaki vrh pravilnog dvanaesterokuta $A_1A_2 \ldots A_{12}$ upisan je ili broj 1 ili broj -1. Na početku je u vrh A_1 upisan broj -1, a u sve ostale vrhove broj 1. Dozvoljeno je istovremeno promijeniti predznak brojeva u bilo kojih šest uzastopnih vrhova tog dvanaesterokuta.

Dokaži da ponavljanjem ovog postupka ne možemo postići da u vrh A_2 bude upisan broj -1, a u sve ostale vrhove broj 1.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

18. veljače 2014.

1. Neka je $n \geqslant 2$ prirodni broj i neka su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ uzastopni članovi aritmetičkog niza. Dokaži da vrijedi

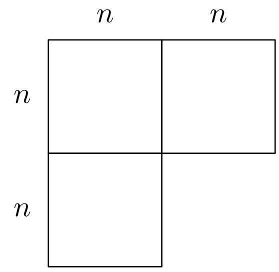
$$a_0 - \binom{n}{1}a_1 + \cdots + (-1)^k\binom{n}{k}a_k + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}a_n = 0.$$

2. Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

Koliko iznosi najveća moguća površina četverokuta $ABCD$ kojem su duljine stranica $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$ i $|DA| = d$?

3. Neka je n prirodni broj. Tri kvadrata stranice duljine n spojena su kao na slici. Zatim je svaki od njih podijeljen na n^2 jediničnih kvadratića.

Koliko je ukupno pravokutnika na crtežu nakon podjele na jedinične kvadratiće?



4. Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoje prirodni brojevi a, b, c takvi da vrijedi

$$a! + b! + c! = 2^n.$$

5. Dano je 100 točaka raspoređenih u 10 redaka i 10 stupaca. Svaka točka je crvena ili plava. Točka je u kutu ako je i na kraju stupca i na kraju retka, a na rubu ako se nalazi na kraju stupca ili retka, ali ne oboje. Dvije točke su susjedne ako se nalaze u istom retku ili stupcu, a između njih nema drugih točaka. Svake dvije susjedne točke spojene su dužinom crvene, plave ili zelene boje, tako da svaka crvena dužina spaja dvije crvene točke, svaka plava dužina spaja dvije plave točke, a svaka zelena dužina spaja jednu crvenu i jednu plavu točku. Poznato je da su ukupno 52 točke crvene, od toga ih je 16 na rubu i dvije u kutovima. Također je poznato da ukupno ima 98 zelenih dužina.

Odredi ukupni broj plavih dužina.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.