Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

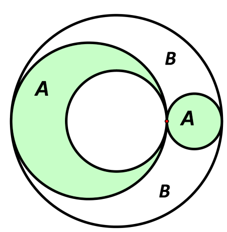
18. veljače 2014.

1. (6) S koliko nula završava broj $N = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$, ako je $x = 999\,997$?

2. (6) Koliko cjelobrojnih rješenja ima nejednadžba $\dfrac{x^2 - 2015x + 2014}{2013x^2 - 2013x} \leq 0$?

3. (6) Odredite četveroznamenkasti broj koji je za 594 veći od broja kojeg dobijemo ako zamijenimo mjesta dvoznamenkastom početku i dvoznamenkastom završetku (prve dvije znamenke premjestimo na kraj). Razlika kvadrata dvoznamenkastog početka i dvoznamenkastog završetka danog broja iznosi 204.

4. (6) Na slici su četiri kružnice koje se međusobno dodiruju. Dvije od njih koje se ne dodiruju imaju zajedničko središte. Dokažite da je površina područja označenih s A jednaka površini područja označenih s B.



5. (6) Sunčica, Franka i Dora ocijenjene su iz matematike s tri različite ocjene: 3, 4 i 5. Neven je pokušao odrediti njihove ocjene: "Dora je dobila 3, Franka nije dobila 3, a Sunčica nije dobila 5." Dora mu na to odgovori: "Rekao si istinu samo za jednu od nas" Koje su ocjene dobile Sunčica, Franka i Dora?

6. (10) Koliko ima uređenih parova cijelih brojeva x, y, $0 < x < y < 10^6$ takvih da je njihova aritmetička sredina točno za 8 veća od geometrijske sredine tih brojeva. (Geometrijska sredina brojeva a i b je broj $\sqrt{a \cdot b}$.)

7. (10) Ivan i Nenad skupljaju kovanice od 2 i 5 kuna svaki u svojoj kasici. Nakon godinu dana otvorili su kasice i prebrojali kovanice. Zajedno su skupili 280 kovanica po 2 kune. U Ivanovoj kasici 60% svih kovanica čine kovanice od 2 kune, a u Nenadovoj je kasici dvostruko više kovanica od 2 kune nego onih od 5 kuna. Ukupna vrijednost novca iz obje kasice zajedno iznosi 1360 kuna. Kolika je vrijednost novca iz Ivanove kasice, a kolika iz Nenadove?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

18. veljače 2014.

1. (6) Odredite apsolutnu vrijednost kompleksnog broja z za koji vrijedi

$$\frac{\bar{z}}{1+2i} - \frac{2z}{1-2i} = 5.$$

2. (6) Na kružnici polumjera 9 cm nalazi se središte druge kružnice, polumjera 6 cm. Odredite duljinu zajedničke tetive tih dviju kružnica.

3. (6) Andrea i Mirela se pripremaju za natjecanje iz matematike. Kada ih je njihov profesor pitao koliko su zadataka jučer rješile, nisu mu izravno odgovorile. Saznao je samo da je Andrea riješila manje zadataka od Mirele, a svaka je riješila barem jedan zadatak. Kazale su i da je umnožak broja zadataka koje je riješila Andrea i broja zadataka koje je rješila Mirela uvećan za njihov zbroj jednak 59. Koliko je zadataka riješila Andrea? Koliko je različitih odgovora na to pitanje?

4. (6) Za funkciju $f(x) = x^2 - bx + c$ vrijedi da je $f(5-x) = f(5+x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Za koje realne brojeve b i c umnožak $f(1) \cdot f(2)$ ima minimalnu vrijednost?

5. (6) Ako su x_1 i x_2 rješenja jednadžbe $x^2 + 2013x + 1 = 0$, a y_1 i y_2 rješenja jednadžbe $x^2 + 2014x + 1 = 0$ izračunajte vrijednost izraza $(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)(x_1 - y_2)(x_2 - y_1)$.

6. (10) Neka je točka C vrh pravog kuta u pravokutnom trokutu ABC. Na stranici $\overline{AC}$ odabrana je točka D tako da je $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BAD = \alpha$. Duljina stranice $\overline{AB}$ iznosi 8 cm, a duljina dužine $\overline{AD}$ iznosi 5 cm. Odredite duljine dužina $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ te dokažite da za kut α vrijedi

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

7. (10) Odredite vrijednost parametra $m \in \mathbb{Z}$ za koji kvadratna jednadžba

$$(m-1)x^2 + (2m-1)x + 3 = 0$$

ima racionalna rješenja.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

18. veljače 2014.

1. (6) Odredite vrijednost izraza $\dfrac{\sin x}{2-3\cos x}$ ako je $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$.

2. (6) Riješite jednadžbu $2\cdot 8^{2014x}-3\cdot 4^{2014x}-3\cdot 2^{2014x}+2=0$.

3. (6) Odredite sve cijele brojeve k za koje jednadžba $x^{2014}+kx^2+36=0$ ima barem jedno cjelobrojno rješenje.

4. (6) Lovro je napisao na ploču 40 cijelih brojeva, od kojih je 13 neparnih. Jakov izbriše dva od napisanih brojeva i dopiše zbroj njihovih kvadrata. Operaciju ponavlja sve dok na ploči ne ostane samo jedan broj. Je li zadnji broj paran ili neparan?

5. (6) Riješite nejednadžbu

$$x^{\frac{1}{\log x}}\cdot\log x<1.$$

6. (10) Ako za stranice a, b i redom njihove nasuprotne kutove α, β trokuta ABC vrijedi

$$(a^2+b^2)\sin(\alpha-\beta)=(a^2-b^2)\sin(\alpha+\beta),$$

onda je trokut ABC jednakokračan ili pravokutan. Dokažite!

7. (10) Dok je postavljala stol za večeru, majka je smislila zadatak kojim će pridobiti Matka da joj pomogne. Treba rasporediti šest jednakih podmetača u obliku pravokutnika uz rub okruglog stola polumjera 8 dm. Širina svakog podmetača je 2 dm, a duljina x dm. Dva vrha svakog podmetača, koji su krajnje točke one stranice koja ima duljinu x, nalaze se na samom rubu stola. Svaka dva susjedna podmetača imaju zajednički vrh - onaj koji nije na rubu stola. Matko treba izračunati duljinu podmetača x. Koji broj treba dobiti?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

18. veljače 2014.

1. (6) Odredite prirodne brojeve k i n takve da vrijedi

$$\frac{((3!)!)!}{3!} = k \cdot n!,$$

gdje je n najveći mogući broj s danim svojstvom.

2. (6) Odredite broj stranica mnogokuta kojima je mjera najmanjeg kuta 132°, a svaki je slijedeći kut za 2° veći.

3. (6) Za koje će prirodne brojeve n vrijednost izraza $\left(\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}} - \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}\right)^n$ biti racionalan broj?

4. (6) Niz realnih brojeva dan je sljedećom formulom $x_{n+1} = \frac{n+1}{x_n}$, za sve $n \geq 1$, pri čemu je $x_1 = 123456789$. Koliko je $x_1 \cdot x_2 \cdot x_{18} \cdot x_{19} \cdot x_{52} \cdot x_{53}$?

5. (6) Odredite jednadžbu krivulje po kojoj "putuje" točka A, ako je njezina udaljenost od ishodišta uvijek dvostruko manja od njezine udaljenosti od točke $T(3, 6)$.

6. (10) Spremnik za tekućinu ima oblik uspravnog kružnog stošca kojemu je visina 12 cm, a polumjer baze 5 cm. Ako u spremnik ulijemo tekućinu i držimo ga (zatvorenog) tako da mu je vrh prema dolje, a baza u horizontalnom položaju, dubina ulivene tekućine je 9 cm. Koliko cm^3 tekućine treba još doliti u spremnik tako da dubina tekućine bude 9 cm i u slučaju kad je spremnik okrenut vrhom prema gore (a baza je u horizontalnom položaju)?

7. (10) Ako je $n \in \mathbb{N}$, dokažite sljedeću jednakost

$$\log\left(1+\frac{1}{1}\right)+2\log\left(1+\frac{1}{2}\right)+3\log\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = (n+1)\log(n+1)-\log\left((n+1)!\right)$$