ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

18. veljače 2014.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1. S koliko nula završava broj $N = x^3 + 3x^2 - 9x - 27$, ako je $x = 999\,997$?

Prvo rješenje.

Dani izraz možemo zapisati u obliku

$$N = x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = x^2(x+3) - 9(x+3) = (x+3)(x^2-9) = (x+3)^2(x-3) \quad \text{(3 boda)}$$

Tada za $x = 999\,997$ dobivamo

$$N = (999\,997 + 3)^2(999\,997 - 3) = 10^{12} \cdot 999\,994, \quad \text{(2 boda)}$$

što znači da broj N završava s 12 nula. (1 bod)

Drugo rješenje.

Ako je $x = 999\,997 = 10^6 - 3$, (1 bod)

tada je

$$\begin{aligned} N &= (10^6-3)^3 + 3(10^6-3)^2 - 9(10^6-3) - 27 = && \text{(1 bod)} \\ &= 10^{18} - 9 \cdot 10^{12} + 27 \cdot 10^6 - 27 + 3 \cdot 10^{12} - 18 \cdot 10^6 + 27 - 9 \cdot 10^6 + 27 - 27 = \\ &= 10^{18} - 6 \cdot 10^{12} = && \text{(2 boda)} \\ &= 10^{12}(10^6 - 6) = 999994 \cdot 10^{12}. && \text{(1 bod)} \end{aligned}$$

Broj N završava s 12 nula. (1 bod)

Zadatak B-1.2. Koliko cjelobrojnih rješenja ima nejednadžba $\dfrac{x^2 - 2015x + 2014}{2013x^2 - 2013x} \leq 0$?

Rješenje.

Napišimo u obliku umnoška brojnik i nazivnik razlomka na lijevoj strani dane nejednadžbe,

$$\frac{x^2 - 2014x - x + 2014}{2013x(x-1)} \leq 0,$$

$$\frac{x(x-2014) - (x-2014)}{2013x(x-1)} \leq 0,$$

$$\frac{(x-2014)(x-1)}{2013x(x-1)} \leq 0. \quad \text{(2 boda)}$$

Za $x \neq 0$ i $x \neq 1$ posljednja je nejednadžba ekvivalentna sljedećoj

$$\frac{x-2014}{x} \leq 0. \qquad \text{(1 bod)}$$

Slijedi

$$\begin{cases} x-2014 \leq 0 \\ x>0 \end{cases} \text{ ili } \begin{cases} x-2014 \geq 0 \\ x<0 \end{cases}$$

pa je rješenje nejednadžbe interval $\langle 0, 2014] \setminus \{1\}$. (2 boda)

Unutar ovog intervala ima 2013 cjelobrojnih rješenja dane nejednadžbe. (1 bod)

Zadatak B-1.3. Odredite četveroznamenkasti broj koji je za 594 veći od broja kojeg dobijemo ako zamijenimo mjesta dvoznamenkastom početku i dvoznamenkastom završetku (prve dvije znamenke premjestimo na kraj). Razlika kvadrata dvoznamenkastog početka i dvoznamenkastog završetka danog broja iznosi 204.

Rješenje.

Označimo dvoznamenkasti početak s x, a dvoznamenkasti završetak s y. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
&x \cdot 100 + y = y \cdot 100 + x + 594, \\
&99x - 99y = 594, \\
&x - y = 6 && \text{(2 boda)} \\
&\text{ i} \\
&x^2 - y^2 = 204, \\
&(x-y)(x+y) = 204 \\
&6(x+y) = 204 \\
&x + y = 34. && \text{(2 boda)}
\end{aligned}$$

Rješavanjem sustava

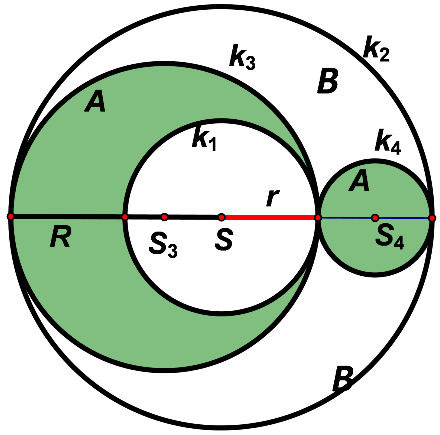
$$\begin{cases} x-y=6 \\ x+y=34 \end{cases}$$

dobivamo $x=20$, $y=14$.

Traženi je broj 2014. (2 boda)

Zadatak B-1.4. Na slici su četiri kružnice koje se međusobno dodiruju. Dvije od njih koje se ne dodiruju imaju zajedničko središte. Dokažite da je površina područja označenih s A jednaka površini područja označenih s B.

Rješenje.



Neka su r i R redom polumjeri kružnica k_1 i k_2, koje imaju zajedničko središte S.

Središta svih kružnica su na istom pravcu pa kružnica k_3 (sa središtem u S_3) ima polumjer $\frac{1}{2}(R+r)$, a kružnica k_4 (sa središtem u S_4) ima polumjer $\frac{1}{2}(R-r)$. (2 boda)

Tada područja označena s A imaju površinu

$$
\begin{aligned}
A &= \left(\frac{1}{2}(R+r)\right)^2 \pi - r^2\pi + \left(\frac{1}{2}(R-r)\right)^2 \pi = \\
&= \left(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{2}Rr + \frac{1}{4}r^2 - r^2 + \frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{2}Rr + \frac{1}{4}r^2\right)\pi = \\
&= \frac{1}{2}(R^2 - r^2)\pi
\end{aligned}
$$

(2 boda)

Tada područja označena s B imaju površinu

$$
B = R^2\pi - \left(\frac{1}{2}(R+r)\right)^2 \pi - \left(\frac{1}{2}(R-r)\right)^2 \pi = \frac{1}{2}\left(R^2 - r^2\right)\pi
$$

Dakle $A = B$. (2 boda)

Zadatak B-1.5. Sunčica, Franka i Dora ocijenjene su iz matematike s tri različite ocjene: 3, 4 i 5. Neven je pokušao odrediti njihove ocjene: "Dora je dobila 3, Franka nije dobila 3, a Sunčica nije dobila 5." Dora mu na to odgovori: "Rekao si istinu samo za jednu od nas" Koje su ocjene dobile Sunčica, Franka i Dora?

Rješenje.

Ako pretpostavimo da je Neven pogodio samo Dorinu ocjenu, onda slijedi da su Sunčica i Franka dobile istu ocjenu (3), što je nemoguće. (2 boda)

Nemoguća je pretpostavka i da Franka nije dobila 3, jer u tom slučaju ni jedna učenica nije dobila 3. (2 boda)

Neven je pogodio samo da Sunčica nije dobila 5. Kako su ostale pretpostavke netočne, slijedi da je Franka dobila 3, a Dora nije dobila 3. (1 bod)

Traženi je odgovor - Franka je dobila 3, Sunčica 4, a Dora 5. (1 bod)

Zadatak B-1.6. Koliko ima uređenih parova cijelih brojeva x, y, $0 < x < y < 10^6$ takvih da je njihova aritmetička sredina točno za 8 veća od geometrijske sredine tih brojeva. (Geometrijska sredina brojeva a i b je broj $\sqrt{a \cdot b}$.)

Rješenje.

$$\frac{x+y}{2} = 8 + \sqrt{xy}, \quad \text{(1 bod)}$$
$$x + y = 16 + 2\sqrt{xy},$$
$$(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{xy} + (\sqrt{y})^2 = 16,$$
$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = 16. \quad \text{(2 boda)}$$

Kako je $0 < x < y < 10^6$, slijedi $0 < \sqrt{x} < \sqrt{y} < 1000$ i (2 boda)

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = 4 \Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x} + 4. \quad \text{(2 boda)}$$

Zadatak svodimo na određivanje broja uređenih parova

$$(n, n+4),\ n \in \mathbb{N} \text{ t.d. je } n + 4 < 1000.$$

n	n+4
1	5
2	6
.	.
.	.
.	.
994	998
995	999

Iz tablice se može vidjeti da je takvih uređenih parova točno 995, a tada je 995 i parova brojeva (x, y) jer

$$x = n^2,\ y = (n+4)^2 \text{ i } 0 < n^2 < (n+4)^2 < 10^6. \quad \text{(3 boda)}$$

Zadatak B-1.7. Ivan i Nenad skupljaju kovanice od 2 i 5 kuna svaki u svojoj kasici. Nakon godinu dana otvorili su kasice i prebrojali kovanice. Zajedno su skupili 280 kovanica po 2 kune. U Ivanovoj kasici 60% svih kovanica čine kovanice od 2 kune, a u Nenadovoj je kasici dvostruko više kovanica od 2 kune nego onih od 5 kuna. Ukupna vrijednost novca iz obje kasice zajedno iznosi 1360 kuna. Kolika je vrijednost novca iz Ivanove kasice, a kolika iz Nenadove?

Rješenje.

Uvedimo sljedeće oznake:
x_1 - broj kovanica od 2 kn u Ivanovoj kasici

y_1 - broj kovanica od 5 kn u Ivanovoj kasici
x_2 - broj kovanica od 2 kn u Nenadovoj kasici
y_2 - broj kovanica od 5 kn u Nenadovoj kasici

Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 = 280, \\
&x_1 = 0.6(x_1 + y_1), \\
&x_2 = 2y_2, \\
&2(x_1 + x_2) + 5(y_1 + y_2) = 1360.
\end{aligned}$$
(3 boda)

Iz prve dvije jednadžbe slijedi $x_2 = 280 - x_1$, $y_1 = \frac{2}{3}x_1$, (1 bod)

pa je $y_2 = \frac{1}{2}x_2 = 140 - \frac{1}{2}x_1$, (1 bod)

što uvrštavanjem u posljednju jednadžbu daje

$$2 \cdot 280 + 5\left(\frac{2}{3}x_1 + 140 - \frac{1}{2}x_1\right) = 360.$$
(1 bod)

Slijedi

$$\begin{aligned}
&5\left(\frac{2}{3}x_1 + 140 - \frac{1}{2}x_1\right) = 800 \\
&\frac{2}{3}x_1 + 140 - \frac{1}{2}x_1 = 160 \\
&x_1 = 120.
\end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned}
&x_2 = 280 - x_1 = 160, \\
&y_1 = \frac{2}{3}x_1 = 80, \\
&y_2 = \frac{1}{2}x_2 = 80.
\end{aligned}$$
(2 boda)

Vrijednost Ivanova novca je $120 \cdot 2 + 80 \cdot 5 = 640$ kn, a vrijednost Nenadova novca je $160 \cdot 2 + 80 \cdot 5 = 720$ kn. (2 boda)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

18. veljače 2014.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1. Odredite apsolutnu vrijednost kompleksnog broja z za koji vrijedi

$$\frac{\bar{z}}{1+2i} - \frac{2z}{1-2i} = 5.$$

Rješenje.

Neka je $z = x + yi$. Nakon množenja dane jednadžbe s $(1-2i)(1+2i)$ dobivamo

$$(x - yi)(1-2i) - 2(x+yi)(1+2i) = 25 \qquad \text{(1 bod)}$$
$$-x - 6xi - 3yi + 2y = 25 \qquad \text{(1 bod)}$$

pa slijedi

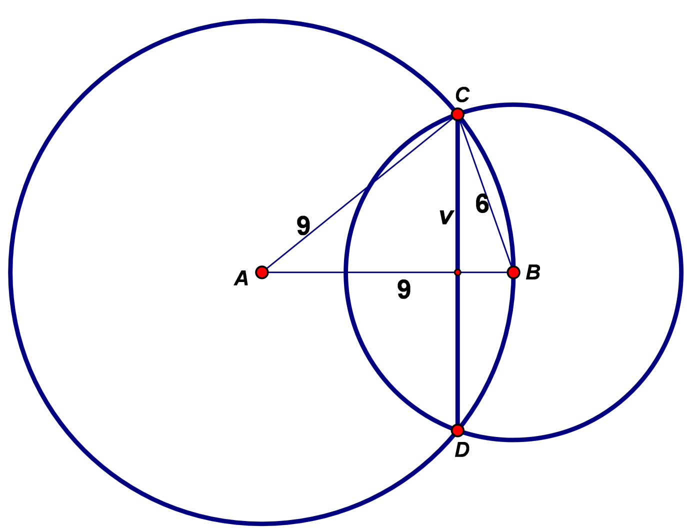
$$-x + 2y = 25$$
$$-6x - 3y = 0. \qquad \text{(2 boda)}$$

Iz ovog sustava slijedi da je $y = 10$, a $x = -5$. (1 bod)

Dakle, $z = -5 + 10i$, odnosno $|z| = 5\sqrt{5}$. (1 bod)

Zadatak B-2.2. Na kružnici polumjera 9 cm nalazi se središte druge kružnice, polumjera 6 cm. Odredite duljinu zajedničke tetive tih dviju kružnica.

Rješenje.



(1 bod)

Izračunajmo prvo pomoću Heronove formule površinu trokuta ABC.

$$s=\frac{9+9+6}{2}=12,$$
$$P=\sqrt{12\cdot 3\cdot 3\cdot 6}=18\sqrt{2}\mathrm{cm}^2. \qquad \text{(2 boda)}$$

Površina trokuta ABC se može računati i kao

$$P=\frac{|AB|\cdot v}{2}$$

pa slijedi da je visina trokuta ABC

$$v=\frac{2P}{|AB|}=\frac{2\cdot 18\sqrt{2}}{9}=4\sqrt{2}\mathrm{cm}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Tada duljina zajedničke tetive $\overline{CD}$ iznosi $2v=8\sqrt{2}\mathrm{cm}$. (1 bod)

Zadatak B-2.3. Andrea i Mirela se pripremaju za natjecanje iz matematike. Kada ih je njihov profesor pitao koliko su zadataka jučer rješile, nisu mu izravno odgovorile. Saznao je samo da je Andrea riješila manje zadataka od Mirele, a svaka je riješila barem jedan zadatak. Kazale su i da je umnožak broja zadataka koje je riješila Andrea i broja zadataka koje je rješila Mirela uvećan za njihov zbroj jednak 59. Koliko je zadataka riješila Andrea? Koliko je različitih odgovora na to pitanje?

Rješenje.

Neka je x broj zadataka koje je riješila Andrea, a y broj zadataka koje je riješila Mirela, gdje je $x<y$. Tada se zadatak svodi na rješavanje jednadžbe

$$xy+x+y=59 \qquad \text{(1 bod)}$$

koju možemo zapisati u obliku

$$xy+x+y+1=60, \qquad \text{(1 bod)}$$

odnosno

$$(x+1)(y+1)=60. \qquad \text{(1 bod)}$$

Rastav broja 60 na proste faktore je $60=2^2\cdot 3\cdot 5$ (1 bod)

pa je broj njegovih djelitelja 12. Kako je $x<y$ imamo 6 mogućnosti napisati broj 60 kao umnožak dva prirodna broja,

$$1\cdot 60, 2\cdot 30, 3\cdot 20, 4\cdot 15, 5\cdot 12, 6\cdot 10.$$

Kako je $x\neq 0$ slijedi da je Andrea mogla rješiti 1, 2, 3, 4 ili 5 zadataka, odnosno, postoji 5 različitih odgovora na to pitanje. (2 boda)

Zadatak B-2.4. Za funkciju $f(x)=x^2-bx+c$ vrijedi da je $f(5-x)=f(5+x)$ za svaki $x\in\mathbb{R}$. Za koje realne brojeve b i c umnožak $f(1)\cdot f(2)$ ima minimalnu vrijednost?

Rješenje.

Iz jednakosti $f(5-x)=f(5+x)$ zaključujemo da je $x_0=5$ ako je $(x_0, f(x_0))$ tjeme grafa dane kvadratne funkcije. (2 boda)

Slijedi

$$\frac{-b}{2}=5 \Rightarrow b=10. \qquad \text{(1 bod)}$$

Tada je umnožak

$$\begin{aligned} f(1)\cdot f(2) &= (1-b+c)(4-2b+c)= \\ &= (-9+c)(-16+c)= \\ &= c^2-25c+144 \end{aligned} \qquad \text{(1 bod)}$$

kvadratna funkcija koja poprima minimalnu vrijednost za $c=\frac{25}{2}$. (2 boda)

Zadatak B-2.5. Ako su x_1 i x_2 rješenja jednadžbe $x^2+2013x+1=0$, a y_1 i y_2 rješenja jednadžbe $x^2+2014x+1=0$ izračunajte vrijednost izraza $(x_1-y_1)(x_2-y_2)(x_1-y_2)(x_2-y_1)$.

Rješenje.

Prema Vieteovim formulama vrijedi

$$\begin{aligned} &x_1+x_2=-2013,\ x_1\cdot x_2=1 \\ &y_1+y_2=-2014, y_1\cdot y_2=1 \end{aligned} \qquad \text{(2 boda)}$$

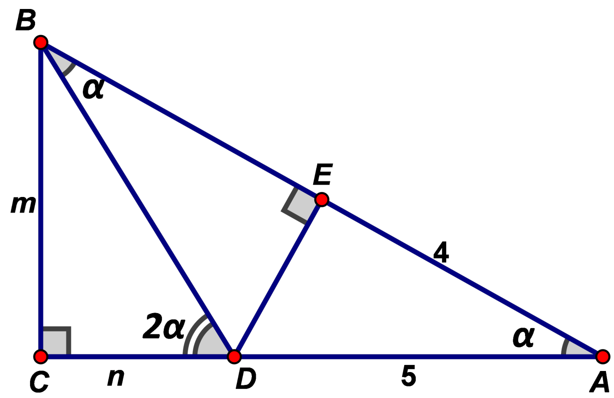
U danom ćemo izrazu prvo pomnožiti prvu i treću te drugu i četvrtu zagradu te primjeniti prethodne jednakosti.

$$\begin{aligned} &(x_1-y_1)(x_2-y_2)(x_1-y_2)(x_2-y_1)= \\ &=\left(x_1^2-x_1y_2-x_1y_1+y_1y_2\right)\left(x_2^2-x_2y_1-x_2y_2+y_1y_2\right)= \\ &=\left(x_1^2-x_1(y_1+y_2)+y_1y_2\right)\left(x_2^2-x_2(y_1+y_2)+y_1y_2\right)= \qquad \text{(2 boda)} \\ &=\left(x_1^2+2014x_1+1\right)\left(x_2^2+2014x_2+1\right)= \\ &=(\underbrace{x_1^2+2013x_1+1}_{0}+x_1)(\underbrace{x_2^2+2013x_2+1}_{0}+x_2) \\ &=x_1\cdot x_2=1 \end{aligned} \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak B-2.6. Neka je točka C vrh pravog kuta u pravokutnom trokutu ABC. Na stranici $\overline{AC}$ odabrana je točka D tako da je $\measuredangle ABD=\measuredangle BAD=\alpha$. Duljina stranice $\overline{AB}$ iznosi 8 cm, a duljina dužine $\overline{AD}$ iznosi 5 cm. Odredite duljine dužina $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ te dokažite da za kut α vrijedi

$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Rješenje.



Trokut ABD je jednakokračan trokut i neka je $\overline{DE}$ njegova visina na osnovicu $\overline{AB}$. Kut $\sphericalangle BDC$ je vanjski kut trokuta ABD i njegova je mjera 2α.

Slika i/ili obrazloženje. (2 boda)

Tada vrijedi

$$|BD| = |AD| = 5\text{cm},\ |ED| = 3\text{cm},\ |AE| = 4\text{cm}.$$

Iz trokuta AED slijedi

$$\sin\alpha = \frac{3}{5},\ \cos\alpha = \frac{4}{5}. \quad \text{(2 boda)}$$

Analogno iz trokuta ABC slijedi

$$\sin\alpha = \frac{m}{8},\ \cos\alpha = \frac{5+n}{8}. \quad \text{(2 boda)}$$

Iz posljednje dvije jednakosti slijedi da je

$$\frac{m}{8} = \frac{3}{5},\ \frac{5+n}{8} = \frac{4}{5}.$$

Tada je

$$m = \frac{24}{5}\text{cm},\ n = \frac{7}{5}\text{cm}. \quad \text{(2 boda)}$$

Slijedi

$$\sin(2\alpha) = \frac{m}{5} = \frac{24}{25} = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = 2\sin\alpha\cos\alpha. \quad \text{(2 boda)}$$

Zadatak B-2.7. Odredite vrijednost parametra $m \in \mathbb{Z}$ za koji kvadratna jednadžba

$$(m-1)x^2 + (2m-1)x + 3 = 0$$

ima racionalna rješenja.

Prvo rješenje.

Da bi rješenja kvadratne jednadžbe bila racionalna njezina diskriminanta mora biti kvadrat nekog cijelog broja. Neka je to k^2.

$$D = (2m-1)^2 - 4(m-1)\cdot 3 = 4m^2 - 16m + 13$$
$$4m^2 - 16m + 13 = k^2. \quad \text{(2 boda)}$$

Riješimo dobivenu kvadratnu jednadžbu po m.

$$\begin{aligned}
4m^2 - 16m + 13 - k^2 &= 0 \\
m_{1,2} &= \frac{16 \pm \sqrt{256 - 16(13 - k^2)}}{8} = \\
&= \frac{16 \pm \sqrt{48 + 16k^2}}{8} = \\
&= \frac{16 \pm 4\sqrt{3 + k^2}}{8} = \\
&= \frac{4 \pm \sqrt{3 + k^2}}{2}.
\end{aligned} \qquad \text{(2 boda)}$$

Rješenje je cijeli broj samo ako je $3 + k^2$ kvadrat nekog cijelog broja, odnosno (1 bod)

$$\begin{aligned}
&3 + k^2 = n^2, \\
&n^2 - k^2 = 3, \\
&(n - k)(n + k) = 1 \cdot 3,
\end{aligned}$$

što je moguće samo za

$$\begin{cases} n - k = \pm 1 \\ n + k = \pm 3 \end{cases} \quad \text{ili} \quad \begin{cases} n - k = \pm 3 \\ n + k = \pm 1. \end{cases} \qquad \text{(2 boda)}$$

Iz ovih sustava i uz uvjet $n^2 > k^2$, proizlazi da je $k^2 = 1$. (1 bod)

Tada je $m = 1$ ili $m = 3$. (1 bod)

Za $m = 1$, jednadžba nije kvadratna pa je jedino rješenje $m = 3$. (1 bod)

Drugo rješenje.

Analogno kao i u prvom rješenju $D = 4m^2 - 16m + 13 = k^2$. (2 boda)

Jednadžbu $4m^2 - 16m + 13 - k^2 = 0$ možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}
&4m^2 - 16m + 16 - 3 - k^2 = 0 \\
&(2m - 4)^2 - k^2 = 3 \\
&(2m - 4 - k)(2m - 4 + k) = 3.
\end{aligned} \qquad \text{(3 boda)}$$

Kako su m i k cijeli brojevi slijedi

$$\begin{cases} 2m - 4 - k = \pm 1 \\ 2m - 4 + k = \pm 3 \end{cases} \quad \text{ili} \quad \begin{cases} 2m - 4 - k = \pm 3 \\ 2m - 4 + k = \pm 1. \end{cases} \qquad \text{(2 boda)}$$

Rješavanjem ovih sustava dobivamo da je je $m = 1$ ili $m = 3$, (2 boda)

ali za $m = 1$ jednadžba nije kvadratna pa je jedino rješenje $m = 3$. (1 bod)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

18. veljače 2014.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1. Odredite vrijednost izraza $\dfrac{\sin x}{2-3\cos x}$ ako je $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$.

Prvo rješenje.

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{2-3\cos x}&=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)-3\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)} && \text{(2 boda)}\\&=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{-\cos^2\frac{x}{2}+5\sin^2\frac{x}{2}}. && \text{(2 boda)}\end{aligned}$$

Podijelimo li u posljednjoj jednakosti brojnik i nazivnik sa $\sin^2\frac{x}{2}$ slijedi

$$\frac{\sin x}{2-3\cos x}=\frac{2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{-\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}+5}=\frac{1}{-\frac{1}{4}+5}=\frac{4}{19}. \qquad \text{(2 boda)}$$

Drugo rješenje.

Iz $\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}=\frac{1}{4}$ slijedi

$$\frac{1+\cos x}{1-\cos x}=\frac{1}{4}, \qquad \text{(2 boda)}$$

odnosno

$$\cos x=-\frac{3}{5}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Tada je

$$\sin^2 x=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}.$$

Kako je $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$ slijedi da je $\frac{x}{2}\in\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle\cup\langle\pi,\frac{3\pi}{2}\rangle$. Tada je $x\in\langle 0,\pi\rangle$, a kako je sinus pozitivan na tom intervalu slijedi

$$\sin x=\frac{4}{5} \qquad \text{(2 boda).}$$

Traženi izraz ima vrijednost

$$\frac{\sin x}{2-3\cos x}=\frac{\frac{4}{5}}{2+\frac{9}{5}}=\frac{4}{19}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Zadatak B-3.2. Riješite jednadžbu $2\cdot 8^{2014x}-3\cdot 4^{2014x}-3\cdot 2^{2014x}+2=0$.

Rješenje.

$$2 \cdot 8^{2014x} - 3 \cdot 4^{2014x} - 3 \cdot 2^{2014x} + 2 = 0.$$

Uvodimo zamjenu $2^{2014x} = t$.

Tada je $2t^3 - 3t^2 - 3t + 2 = 0$. (1 bod)

Dobili smo simetričnu jednadžbu trećeg stupnja. Nakon grupiranja slijedi

$$\begin{aligned}
&2(t^3+1) - 3t(t+1) = 0\\
&2(t+1)(t^2-t+1) - 3t(t+1) = 0 && \text{(1 bod)}\\
&(t+1)(2t^2-2t+2-3t) = 0,\\
&(t+1)(2t^2-5t+2) = 0,\\
&t = -1 \text{ ili } t = 2 \text{ ili } t = \frac{1}{2}. && \text{(1 bod)}
\end{aligned}$$

Kako je 2^{2014x} uvijek pozitivno, moguća su samo rješenja $t = 2$ ili $t = \frac{1}{2}$. (1 bod)

Tada je $2^{2014x} = 2$ ili $2^{2014x} = \frac{1}{2}$, odnosno

$$2014x = 1 \text{ ili } 2014x = -1.$$

Rješenja su dakle $x = \frac{1}{2014}$ i $x = \frac{-1}{2014}$. (2 boda)

Zadatak B-3.3. Odredite sve cijele brojeve k za koje jednadžba $x^{2014} + kx^2 + 36 = 0$ ima barem jedno cjelobrojno rješenje.

Prvo rješenje.

Neka je x_0 cjelobrojno rješenje jednadžbe $x^{2014} + kx^2 + 36 = 0$.

Tada je $k = -x_0^{2012} - \frac{36}{x_0^2}$. (1 bod)

Da bi k bio cijeli broj x_0^2 mora biti djelitelj broja 36, (2 boda)

odnosno $x_0^2 \in \{1, 4, 9, 36\}$. (1 bod)

Slijedi $k \in \{-37, -4^{1006} - 9, -9^{1006} - 4, -36^{1006} - 1\}$. (2 boda)

Drugo rješenje.

Ako jednadžba ima cjelobrojno rješenje x_0 ono mora biti djelitelj slobodnog člana, u ovom slučaju broja 36. (2 boda)

Ispitamo li redom sve djelitelje slobodnog člana, $\{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm9, \pm12, \pm18, \pm36\}$ (dovoljno je uzeti pozitivne zbog parnosti), dobivamo tražena rješenja. (4 boda)

Zadatak B-3.4. Lovro je napisao na ploču 40 cijelih brojeva, od kojih je 13 neparnih. Jakov izbriše dva od napisanih brojeva i dopiše zbroj njihovih kvadrata. Operaciju ponavlja sve dok na ploči ne ostane samo jedan broj. Je li zadnji broj paran ili neparan?

Rješenje.

Promotrimo što se događa s ukupnim brojem neparnih brojeva nakon svakog izvođenja dane operacije. Ako je Jakov izbrisao dva parna broja, zbroj njihovih kvadrata je paran, pa je broj neparnih brojeva ostao isti. (2 boda)

Ako je Jakov obrisao dva neparna broja, zbroj njihovih kvadrata je paran broj, pa se tada broj neparnih brojeva smanjio za dva. (1 bod)

Ako je Jakov obrisao jedan paran i jedan neparan broj, zbroj njihovih kvadrata je neparan, pa je broj neparnih brojeva ostao isti. (1 bod)

Nakon svakog ponavljanja dane operacije broj neparnih brojeva se ili smanji za dva ili ostaje isti. To znači da na kraju, ako je početni broj neparnih brojeva 13, mora ostati jedan neparan broj. (2 boda)

Zadatak B-3.5. Riješite nejednadžbu

$$x^{\frac{1}{\log x}} \cdot \log x < 1.$$

Rješenje.

Nejednadžba ima smisla za $x > 0$ i $x \neq 1$. (1 bod)

Logaritmiranjem dane nejednadžbe dobivamo

$$\frac{1}{\log x} \log x + \log(\log x) < \log 1, \qquad \text{(1 bod)}$$

$$1 + \log(\log x) < 0,$$

$$\log(\log x) < -1. \qquad \text{(1 bod)}$$

Slijedi

$$\log x < \frac{1}{10} \qquad \text{(1 bod)}$$

$$x < 10^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{10} \qquad \text{(1 bod)}$$

Zbog uvjeta $x > 0$ i $x \neq 1$, rješenje dane nejednadžbe je

$$x \in \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, \sqrt[10]{10}\rangle = \langle 0, \sqrt[10]{10}\rangle \setminus \{1\}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Zadatak B-3.6. Ako za stranice a, b i redom njihove nasuprotne kutove α, β trokuta ABC vrijedi

$$(a^2 + b^2)\sin(\alpha - \beta) = (a^2 - b^2)\sin(\alpha + \beta),$$

onda je trokut ABC jednakokračan ili pravokutan. Dokažite!

Rješenje.

$$(a^2+b^2)\sin(\alpha-\beta)=(a^2-b^2)\sin(\alpha+\beta),$$
$$(a^2+b^2)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=(a^2-b^2)(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$
$$2b^2\sin\alpha\cos\beta=2a^2\cos\alpha\sin\beta$$ (2 boda)

Iz poučka o sinusu slijedi $a=\frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$. (2 boda)

Tada je

$$b^2\sin\alpha\cos\beta=\left(\frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2\cos\alpha\sin\beta,$$

što nakon sređivanja daje

$$\sin\beta\cos\beta=\sin\alpha\cos\alpha,\ \text{tj.}\ \sin(2\beta)=\sin(2\alpha).$$ (2 boda)

Odatle slijedi

$$2\beta=2\alpha \text{ ili } 2\beta=180^\circ-2\alpha,$$ (2 boda)

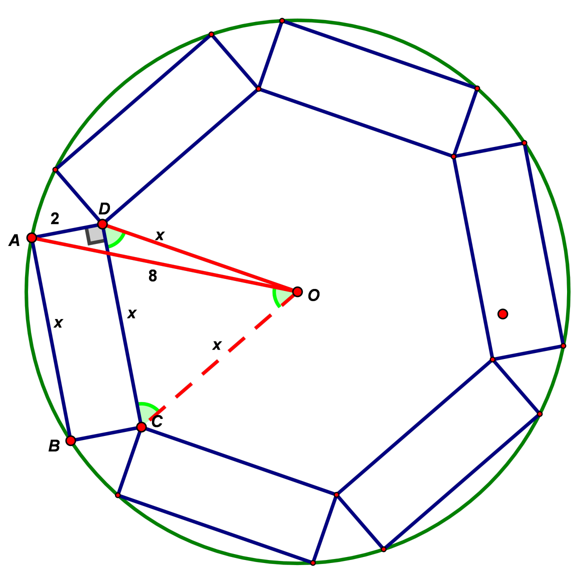
odnosno

$$\beta=\alpha \text{ ili } \beta+\alpha=90^\circ,$$

što znači da je trokut ABC jednakokračan ili pravokutan. (2 boda)

Zadatak B-3.7. Dok je postavljala stol za večeru, majka je smislila zadatak kojim će pridobiti Matka da joj pomogne. Treba rasporediti šest jednakih podmetača u obliku pravokutnika uz rub okruglog stola polumjera 8 dm. Širina svakog podmetača je 2 dm, a duljina x dm. Dva vrha svakog podmetača, koji su krajnje točke one stranice koja ima duljinu x, nalaze se na samom rubu stola. Svaka dva susjedna podmetača imaju zajednički vrh - onaj koji nije na rubu stola. Matko treba izračunati duljinu podmetača x. Koji broj treba dobiti?

Rješenje.



Slika - može i bez označenog polumjera AO i OD. (2 boda)

Unutrašnji vrhovi svih pravokutnika određuju pravilan šesterokut pa je mjera kuta $\sphericalangle CDO$ 60°. (1 bod)

Tada mjera kuta $\sphericalangle ADO$ iznosi $90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$. (2 boda)

Primjenimo poučak o kosinusu na trokut ADO,

$$8^2 = 2^2 + x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x \cdot \cos 150^\circ.$$ (2 boda)

Tada je $64 = 4 + x^2 + 2x\sqrt{3}$, (1 bod)

tj. $x^2 + 2x\sqrt{3} - 60 = 0$.

Pozitivno rješenje ove jednadžbe je $x = -\sqrt{3} + 3\sqrt{7}$ dm. (2 boda)

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

18. veljače 2014.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1. Odredite prirodne brojeve k i n takve da vrijedi

$$\frac{((3!)!)!}{3!} = k \cdot n!,$$

gdje je n najveći mogući broj s danim svojstvom.

Rješenje.

Izračunajmo lijevu stranu dane jednakosti.

$$\frac{((3!)!)!}{3!} = \frac{(6!)!}{6} = \frac{720!}{6} = \frac{720 \cdot 719!}{6} = 120 \cdot 719! \qquad \text{(3 boda)}$$

Tada je jednakost

$$120 \cdot 719! = k \cdot n!$$

ispunjena za sve $n = 1, \ldots, 719$ i pripadajući k. Budući da tražimo najveći mogući n, slijedi

$$k = 120,\ n = 719. \qquad \text{(3 boda)}$$

Napomena. Ako nema komentara da dana jednakost ima više rješenja smanjiti 1 bod.

Zadatak B-4.2. Odredite broj stranica mnogokuta kojima je mjera najmanjeg kuta 132°, a svaki je slijedeći kut za 2° veći.

Rješenje.

Mjere kutova čine aritmetički niz kojemu je $a_1 = 132^\circ$, $d = 2$. (1 bod)

Zbroj n članova aritmetičkog niza je $S = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = n(131 + n)$. (1 bod)

Zbroj svih kutova u mnogokutu je $S = (n-2) \cdot 180$. (1 bod)

Tada iz $n(131 + n) = (n-2) \cdot 180$, slijedi $n^2 - 49n + 360 = 0$. (1 bod)

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $n_1 = 9$, $n_2 = 40$. Dakle, mnogokut može imati 9 ili 40 stranica. U mnogokutu s 40 stranica će zbog uvjeta zadatka jedan kut biti 180°, pa takav mnogokut nije rješenje. (2 boda)

Zadatak B-4.3. Za koje će prirodne brojeve n vrijednost izraza $\left(\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}} - \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}\right)^n$ biti racionalan broj?

Rješenje.

Odredimo vrijednost broja $x = \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}} - \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$,

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{5-2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{5+2\sqrt{6}}} = \\ &= \frac{\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{25-24}} = \\ &= \sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}. \end{aligned}$$ (2 boda)

Uočimo da je $x > 0$. Tada je

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2 = \\ &= 5 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{5+2\sqrt{6}}\sqrt{5-2\sqrt{6}} + 5 - 2\sqrt{6} = \\ &= 8 \end{aligned}$$ (1 bod)

Kako je $x > 0$ slijedi $x = \sqrt{8} = 2^{\frac{3}{2}}$. (2 boda)

Tada je broj $x^n = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^n$ racionalan ako i samo ako je n paran broj. (1 bod)

Zadatak B-4.4. Niz realnih brojeva dan je sljedećom formulom $x_{n+1} = \frac{n+1}{x_n}$, za sve $n \geq 1$, pri čemu je $x_1 = 123456789$. Koliko je $x_1 \cdot x_2 \cdot x_{18} \cdot x_{19} \cdot x_{52} \cdot x_{53}$?

Rješenje.

Uočimo da iz dane jednakosti slijedi

$$x_n \cdot x_{n+1} = n + 1, \text{ za sve } n \geq 1.$$ (2 boda)

Tada je $x_1 \cdot x_2 = 2$, $x_{18} \cdot x_{19} = 19$, $x_{52} \cdot x_{53} = 53$ (2 boda)

pa je $x_1 \cdot x_2 \cdot x_{18} \cdot x_{19} \cdot x_{52} \cdot x_{53} = 2 \cdot 19 \cdot 53 = 2014$. (2 boda)

Zadatak B-4.5. Odredite jednadžbu krivulje po kojoj "putuje" točka A, ako je njezina udaljenost od ishodišta uvijek dvostruko manja od njezine udaljenosti od točke $T(3,6)$.

Prvo rješenje.

Neka je $A(x,y)$ i $O(0,0)$. Tada je

$$2|\overline{AO}| = |\overline{AT}|,$$ (1 bod)

$$2\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2},$$ (1 bod)

$$4(x^2+y^2) = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36,$$

$$3x^2 + 3y^2 + 6x + 12y - 45 = 0.$$ (1 bod)

Podijelimo danu jednakost s 3. Tada je

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15 = 0$$
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 15 - 1 - 4 = 0$$
$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 20. \qquad \text{(2 boda)}$$

Dakle, točka A putuje po kružnici $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 20$. (1 bod)

Drugo rješenje.

Točka $B(1, 2)$ se nalazi na $\frac{1}{3}$ udaljenosti između ishodišta i točke A. (1 bod)

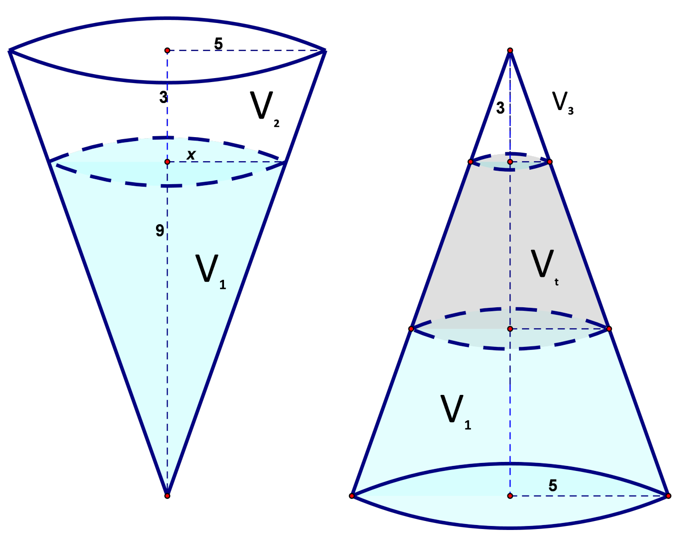
Točka A putuje po kružnici čije je središte točka simetrična točki B s obzirom na ishodište $S(-1, -2)$.

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = r^2 \qquad \text{(2 boda)}$$
$$r = |\overline{AS}| = \sqrt{20} \qquad \text{(1 bod)}$$

Dakle, rješenje je kružnica: $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 20$. (2 boda)

Zadatak B-4.6. Spremnik za tekućinu ima oblik uspravnog kružnog stošca kojemu je visina 12 cm, a polumjer baze 5 cm. Ako u spremnik ulijemo tekućinu i držimo ga (zatvorenog) tako da mu je vrh prema dolje, a baza u horizontalnom položaju, dubina ulivene tekućine je 9 cm. Koliko cm^3 tekućine treba još doliti u spremnik tako da dubina tekućine bude 9 cm i u slučaju kad je spremnik okrenut vrhom prema gore (a baza je u horizontalnom položaju)?

Rješenje.



(1 bod)

Neka je vrh stošca prema dolje kao što je kod stošca lijevo na slici. Polumjer baze stošca i polumjer x (na visini 9 cm) su omjeru kao dubina tekućine i visina stošca,

$$k = \frac{x}{5} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Tada su obujam tekućine V_1 i obujam cijelog stošca V u omjeru

$$\frac{V_1}{V} = k^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}. \qquad \text{(1 bod)}$$

Slijedi da je obujam ulivene tekućine

$$V_1 = \frac{27}{64}V,$$

a obujam dijela stošca bez tekućine je

$$V_2 = V - \frac{27}{64}V = \frac{37}{64}V. \qquad \text{(2 boda)}$$

Promotrimo sada slučaj kada je vrh stošca prema gore kao što je kod stošca desno na slici. Tekućina koju smo ulili na početku zauzima obujam $V_1 = \frac{27}{64}V$, obujam tekućine koju treba doliti do visine 9 cm označit ćemo s V_t i obujam dijela stošca koji je bez tekućine s V_3. Kao i u prvom slučaju zaključujemo da je

$$\frac{V_3}{V} = \left(\frac{y}{5}\right)^3 = \left(\frac{3}{12}\right)^3 = \frac{1}{64},$$

pa slijedi

$$V_3 = \frac{1}{64}V. \qquad \text{(2 boda)}$$

Traženi obujam možemo izračunati iz

$$V_t = V_2 - V_3 = \frac{36}{64}V = \frac{9}{16}V \ (\text{ili } V_t = V - V_1 - V_3). \qquad \text{(2 boda)}$$

Kako je obujam danog stošca

$$V = \frac{r^2\pi}{3} \cdot h = 100\pi \text{cm}^3,$$

slijedi

$$V_t = \frac{225\pi}{4}\text{cm}^3. \qquad \text{(1 bod)}$$

Zadatak B-4.7. Ako je $n \in \mathbb{N}$, dokažite sljedeću jednakost

$$\log\left(1+\frac{1}{1}\right) + 2\log\left(1+\frac{1}{2}\right) + 3\log\left(1+\frac{1}{3}\right) + \ldots + n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = (n+1)\log(n+1) - \log\left((n+1)!\right)$$

Prvo rješenje.

$$
\begin{aligned}
&\log\left(1+\frac{1}{1}\right)+2\log\left(1+\frac{1}{2}\right)+3\log\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)= \\
&=\log\left(\frac{2}{1}\right)+2\log\left(\frac{3}{2}\right)+3\log\left(\frac{4}{3}\right)+\ldots+n\log\left(\frac{n+1}{n}\right)= && \text{(1 bod)}\\
&=\log 2-\log 1+2\log 3-2\log 2+3\log 4-3\log 3+\ldots+n\log(n+1)-n\log n= \\
& && \text{(2 boda)}\\
&=n\log(n+1)-\log 2-\log 3-\ldots-\log n= && \text{(2 boda)}\\
&=n\log(n+1)-(\log 2+\log 3+\ldots+\log n)= \\
&=n\log(n+1)+\log(n+1)-(\log 2+\log 3+\ldots+\log n+\log(n+1))= && \text{(2 boda)}\\
&=(n+1)\log(n+1)-\log(2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1))= && \text{(2 boda)}\\
&=(n+1)\log(n+1)-\log((n+1)!) && \text{(1 bod)}
\end{aligned}
$$

Drugo rješenje.

$$
\begin{aligned}
&\log\left(1+\frac{1}{1}\right)+2\log\left(1+\frac{1}{2}\right)+3\log\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)= \\
&=\log\left[\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] && \text{(2 boda)}\\
&=\log\left[\left(\frac{2}{1}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right] && \text{(1 bod)}\\
&=\log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3^2}{2^2}\cdot\frac{4^3}{3^3}\cdot\ldots\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n}\right)= \\
&=\log\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}\cdot(n+1)^n\right)= && \text{(2 boda)}\\
&=\log\left(\frac{1}{n!}\cdot(n+1)^n\right)= \\
&=\log\left(\frac{(n+1)^n\cdot(n+1)}{n!\cdot(n+1)}\right)= && \text{(2 boda)}\\
&=\log\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\right)= && \text{(1 bod)}\\
&=\log(n+1)^{n+1}-\log((n+1)!)= && \text{(1 bod)}\\
&=(n+1)\log(n+1)-\log((n+1)!) && \text{(1 bod)}
\end{aligned}
$$

Treće rješenje.

Dokaz matematičkom indukcijom.

1. Provjera tvrdnje za n = 1.

$$
\log\left(1+\frac{1}{1}\right)=(1+1)\log(1+1)-\log(2!)\Rightarrow\log 2=2\log 2-\log 2
$$

što je istinita jednakost. (2 boda)

2. Pretpostavimo da tvrdnja

$$\log\left(1+\frac{1}{1}\right)+2\log\left(1+\frac{1}{2}\right)+3\log\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=(n+1)\log(n+1)-\log\left((n+1)!\right)$$

vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i dokažimo da tada vrijedi i za $n+1$, odnosno da vrijedi:

$$\log\left(1+\frac{1}{1}\right)+2\log\left(1+\frac{1}{2}\right)+3\log\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=$$
$$=(n+2)\log(n+2)-\log\left((n+2)!\right)$$ (2 boda)

Ako primjenimo pretpostavku na prvih n članova s lijeve strane i dodamo $(n+1)$-vi član dobivamo redom:

$$(n+1)\log(n+1)-\log\left((n+1)!\right)+(n+1)\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=$$ (1 bod)

$$=(n+1)\log(n+1)-\log\left((n+1)!\right)+(n+1)\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)=$$
$$=(n+1)\log(n+1)-\log((n+1)!)+(n+1)\log(n+2)-(n+1)\log(n+1)=$$ (1 bod)

$$=(n+1)\log(n+2)-\log((n+1)!)=$$
$$=(n+1)\log(n+2)+\log(n+2)-\log(n+2)-\log((n+1)!)=$$ (2 boda)

$$=(n+2)\log(n+2)-\log((n+1)!\cdot(n+2))=$$
$$=(n+2)\log(n+2)-\log((n+2)!)$$ (1 bod)

Time smo dokazali da dana tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n. (1 bod)