Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

Šibenik, 3. travnja 2014.

1. Odredi najmanji prirodni broj a takav da je vrijednost izraza

$$\frac{n^8 + n^6 + n^4 + n^2 + a}{n^2 - 1}$$

za $n = 2014$ cijeli broj djeljiv sa 3.

2. Na igralištu se nalazi 2014 sportaša koji na dresovima imaju brojeve od 1 do 2014 (svaki broj je na točno jednom dresu). Na početku su svi u stojećem položaju. U određenim vremenskim intervalima trener uzvikuje redom sve prirodne brojeve od 1 do 2014. Sportaši kojima je na dresu višekratnik uzviknutoga broja odmah mijenjaju svoj položaj iz stojećeg položaja u čučanj ili obratno.

Koliko je sportaša u čučnju nakon što trener uzvikne broj 2014?

3. Dužina $\overline{AB}$ je promjer kružnice sa središtem O. Na kružnici je dana točka C takva da je OC okomito na AB. Na kraćem luku $\widehat{BC}$ odabrana je točka P. Pravci CP i AB sijeku se u točki Q, a točka R je sjecište pravca AP i okomice kroz Q na pravac AB.

Dokaži da je $|BQ| = |QR|$.

4. Neka su x_1, x_2, $\ldots$, x_{100} realni brojevi za koje vrijedi

$$\begin{aligned}
|2x_k - x_{k+1}| &= x_{k+2} \quad \text{za sve } k \in \{1, 2, \ldots, 98\},\\
|2x_{99} - x_{100}| &= x_1,\\
|2x_{100} - x_1| &= x_2.
\end{aligned}$$

Dokaži da je $x_1 = x_2 = \cdots = x_{100}$.

5. Andrija i Boris imaju 2014 karata označenih brojevima od 1 do 2014. Andrija ima sve karte s parnim, a Boris sve karte s neparnim brojevima. Andrija je poredao svoje karte ukrug redom, od 2 do 2014, u smjeru kazaljke na satu tako da se brojevi na kartama ne vide. Boris zna da su karte poredane tim redom i u tom smjeru, ali ne zna gdje se nalazi karta s brojem 2. Nakon toga, Boris na svaku Andrijinu stavi po jednu od svojih karata i tako nastane 1007 parova karata. Za svaki se par usporedi brojeve na kartama i dodijeli jedan bod onom igraču na čijoj je karti veći broj.

Odredi najveći mogući N tako da Boris može biti siguran da će ostvariti barem N bodova.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

Šibenik, 3. travnja 2014.

1. Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju sustav

$$\begin{aligned} x + y^2 &= y^3, \\ y + x^2 &= x^3. \end{aligned}$$

2. Svaki od brojeva x_1, x_2, $\ldots$, x_{2014} može biti -1, 0 ili 1. Koja je najmanja moguća vrijednost zbroja svih umnožaka $x_i x_j$ za $1 \leqslant i < j \leqslant 2014$?

3. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je broj $3^m + 3^n + 1$ kvadrat nekog prirodnog broja.

4. Neka su p i q dva paralelna pravca. Kružnica k dodiruje pravac p u točki A i siječe pravac q u različitim točkama B i C. Neka je T točka na pravcu p i neka dužine $\overline{TB}$ i $\overline{TC}$ sijeku kraći luk $\widehat{AC}$ redom u točkama K i L, različitima od B i C.

Dokaži da pravac KL prolazi polovištem dužine $\overline{AT}$.

5. Sto kvadratnih omotnica različitih veličina raspoređeno je tako da se za svake dvije različite omotnice manja omotnica nalazi unutar veće ili su omotnice jedna izvan druge. Pritom se i u manjoj i u većoj omotnici mogu nalaziti i druge omotnice. Dva rasporeda smatramo različitima ako postoje dvije omotnice koje se u jednom rasporedu nalaze jedna unutar druge, a u drugom ne.

Koliko ima različitih rasporeda u kojima se unutar najveće omotnice nalaze sve ostale?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

Šibenik, 3. travnja 2014.

1. Neka je ABC jednakostranični trokut sa stranicama duljine 1. Točka X na polupravcu AB i točka Y na polupravcu AC odabrane su tako da su $|AX|$ i $|AY|$ prirodni brojevi.

Može li polumjer kružnice opisane trokutu AXY biti $\sqrt{2014}$?

2. Unutar šiljastokutnog trokuta ABC nalazi se točka P takva da je

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle CBA + \sphericalangle ACB, \qquad \sphericalangle BPC = \sphericalangle ACB + \sphericalangle BAC.$$

Dokaži da vrijedi

$$\frac{|AC| \cdot |BP|}{|BC|} = \frac{|BC| \cdot |AP|}{|AB|}.$$

3. Postoje li prirodni brojevi m i n za koje su $m^2 + n$ i $n^2 + m$ kvadrati prirodnih brojeva?

4. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geqslant \frac{3a+2b-c}{4}.$$

5. Na kružnici duljine $6N$ označeno je $3N$ točaka koje dijele tu kružnicu na ukupno $3N$ lukova: N lukova duljine 1, N lukova duljine 2 i N lukova duljine 3.

Dokaži da među označenim točkama postoje dvije koje su krajnje točke nekog promjera te kružnice.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

Šibenik, 3. travnja 2014.

1. Za prirodni broj n označimo sa $s(n)$ zbroj njegovih pozitivnih djelitelja, a sa $d(n)$ broj njegovih pozitivnih djelitelja. Odredi sve prirodne brojeve n takve da vrijedi

$$s(n) = n + d(n) + 1.$$

2. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(x)f(y) = f(x+y) + xy.$$

3. Dano je 2014 žetona koji su s jedne strane crne, a s druge bijele boje i ploča dimenzija 2014×1. Na početku se na svakom polju ploče nalazi po jedan žeton, okrenut na crnu ili na bijelu stranu. U svakom potezu dozvoljeno je ukloniti jedan žeton okrenut na crnu stranu i istovremeno preokrenuti žetone na susjednim poljima (ako nisu već uklonjeni).

Odredi sve početne rasporede žetona za koje je nizom takvih poteza moguće ukloniti sve žetone.

4. Neka su a, b i c duljine stranica trokuta opsega 1. Dokaži da vrijedi

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} < 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5. Neka je $ABCD$ konveksni četverokut takav da vrijedi

$$\sphericalangle BAD = 90^\circ, \qquad \sphericalangle BAC = 2\sphericalangle BDC \quad \text{i} \quad \sphericalangle DBA + \sphericalangle DCB = 180^\circ.$$

Odredi mjeru kuta $\sphericalangle DBA$.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.