DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

Šibenik, 3. travnja 2014.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1. Odredite ostatak pri dijeljenju broja $\left(7^{2012}\right)^{2014}-\left(3^{12}\right)^{14}$ s 10.

Rješenje.

$$7^1=7,\ 7^2=49,\ 7^3=343,\ 7^4=2401,\ 7^5=16807,\ldots$$

Dakle, potencije broja 7 završavaju redom znamenkama 7, 9, 3, 1.

$$3^1=3,\ 3^2=9,\ 3^3=27,\ 3^4=81,\ 3^5=243,\ldots$$

Potencije broja 3 završavaju redom znamenkama 3, 9, 7, 1.

Broj 2012 je djeljiv s 4 pa stoga broj $7^{2012\cdot 2014}$ ima zadnju znamenku kao 7^4, a to je znamenka 1.

Broj 12 je djeljiv s 4 pa stoga broj $3^{12\cdot 14}$ ima zadnju znamenku kao 3^4, a to je znamenka 1.

Ako oduzmemo brojeve $7^{2012\cdot 2014}$ i $3^{12\cdot 14}$ zadnja će znamenka razlike biti 0 pa je dani broj djeljiv s 10.

Zadatak B-1.2. Odredite sve cijele brojeve a za koje jednadžba

$$3\cdot|x-2|+a\cdot|3-x|=a+4-x$$

ima cjelobrojna rješenja.

Rješenje.

- 1. slučaj

  Ako je $x \leq 2$ dana jednadžba prelazi u

  $$\begin{aligned}
  &3\cdot(-x+2)+a\cdot(3-x)=a+4-x,\\
  &-3x+6+3a-ax=a+4-x,\\
  &-2x-ax=-2a-2\\
  &x=\frac{2a+2}{a+2}=2-\frac{2}{a+2}.
  \end{aligned}$$

  Rješenje će biti cijeli broj ako je $a+2\in\{1,-1,2,-2\}$, odnosno $a\in\{-1,-3,0,-4\}$.
  Nejednakost $x\leq 2$ vrijedi samo za $a\in\{-1,0\}$.

- 2. slučaj

  Slučaj $2 < x < 3$ ne treba razmatrati jer je x cijeli broj.

- 3. slučaj

  Za $x \geq 3$ rješavamo jednadžbu

$$
\begin{aligned}
&3 \cdot (x-2) + a \cdot (x-3) = a + 4 - x, \\
&x = \frac{4a+10}{a+4} = 4 - \frac{6}{a+4}.
\end{aligned}
$$

  Rješenje će biti cijeli broj ako je $a + 4 \in \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$, odnosno $a \in \{-3, -5, -2, -6, -1, -7, 2, -10\}$. Nejednakost $x \geq 3$ vrijedi za $a \in \{-5, -6, -7, 2, -10\}$.

- Konačno je rješenje: $a \in \{-10, -7, -6, -5, -1, 0, 2\}$.

Zadatak B-1.3. Bazen se puni dvjema pumpama. Ako su obje pumpe otvorene 20 minuta do punog bazena bi nedostajalo još 1000 litara, a ako su obje otvorene 70 minuta, 250 litara bi se prelilo izvan punog bazena. Prva pumpa može napuniti u 2 minute onoliki dio koliko druga može napuniti u 3 minute. Koliko vremena treba svakoj od njih da sama napuni cijeli bazen?

Rješenje.

Neka je

x - vrijeme (u minutama) potrebno da prva pumpa sama napuni bazen

y - vrijeme (u minutama) potrebno da druga pumpa sama napuni bazen

V - količina vode koja stane u bazen

Tada je $\frac{V}{x}$ količina vode kojom prva pumpa napuni bazen u jednoj minuti, a $\frac{V}{y}$ količina vode kojom druga pumpa napuni bazen u jednoj minuti. Iz uvjeta u zadatku slijedi sustav jednadžbi:

$$
\begin{cases}
20 \cdot \left(\frac{V}{x} + \frac{V}{y}\right) = V - 1000 \\
70 \cdot \left(\frac{V}{x} + \frac{V}{y}\right) = V + 250 \\
2 \cdot \frac{V}{x} = 3 \cdot \frac{V}{y}
\end{cases}.
$$

Iz posljednje jednadžbe slijedi

$$
\frac{V}{x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{y}, \text{ odnosno } x = \frac{2y}{3}
$$

pa sustav prelazi u

$$
\begin{cases}
20 \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{V}{y}\right) = V - 1000 \\
70 \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{V}{y}\right) = V + 250
\end{cases},
$$

odnosno

$$
\begin{cases}
50 \cdot \frac{V}{y} = V - 1000 \\
175 \cdot \frac{V}{y} = V + 250
\end{cases}.
$$

Podijelimo li ove dvije jednadžbe dobivamo

$$\frac{2}{7}=\frac{V-1000}{V+250},$$

odnosno

$$\begin{aligned}&7V-7000=2V+500,\\&V=1500\text{ l.}\end{aligned}$$

Tada je

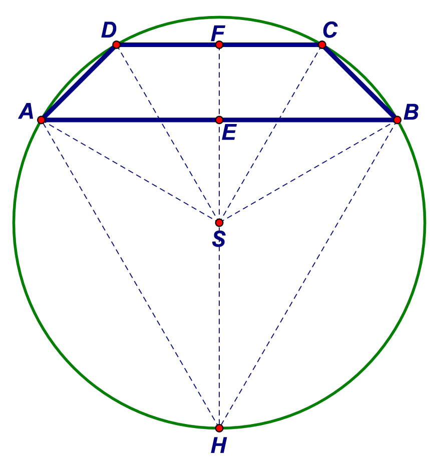
$$50\cdot\frac{1500}{y}=500$$

pa je vrijeme potrebno da druga pumpa sama napuni bazen $y=150$ min.

Vrijeme prve pumpe je $x=\frac{2y}{3}=100$ min.

Zadatak B-1.4. U krugu polumjera r povučene su s iste strane središta dvije paralelne tetive $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. $\overline{AB}$ je stranica jednakostraničnog trokuta upisanog tom krugu, a $\overline{CD}$ je stranica pravilnog šesterokuta upisanog istom krugu. Odredite opseg i površinu trapeza $ABCD$.

Rješenje.



Duljina stranice pravilnog šesterokuta jednaka je polumjeru kruga kojemu je šesterokut upisan, odnosno $|DC|=r$.

Polumjer opisane kružnice jednakostraničnom trokutu je

$$r=\frac{|AB|\sqrt{3}}{3}\quad\Rightarrow\quad|AB|=r\sqrt{3}.$$

Neka okomica iz S na CD siječe CD u F, a AB u E.

Visina jednakostraničnog trokuta je $|EH|=\frac{|AB|\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}r$.

Visina karakterističnog trokuta u šesterokutu je $|SF|=\frac{r\sqrt{3}}{2}$.

Visina trapeza je $|EF| = |SF| - \frac{1}{3}|EH| = \frac{r}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$ pa je

$$|AD| = |BC| = \sqrt{\left(\frac{|AB|-|DC|}{2}\right)^2 + |EF|^2} = \sqrt{\left(\frac{r\sqrt{3}-r}{2}\right)^2 + \frac{r^2}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)^2} = \frac{r\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2}}{2}.$$

Opseg trapeza je

$$o = |AB| + |DC| + 2|AD| = r\left(\sqrt{3}+1+\sqrt{6}-\sqrt{2}\right).$$

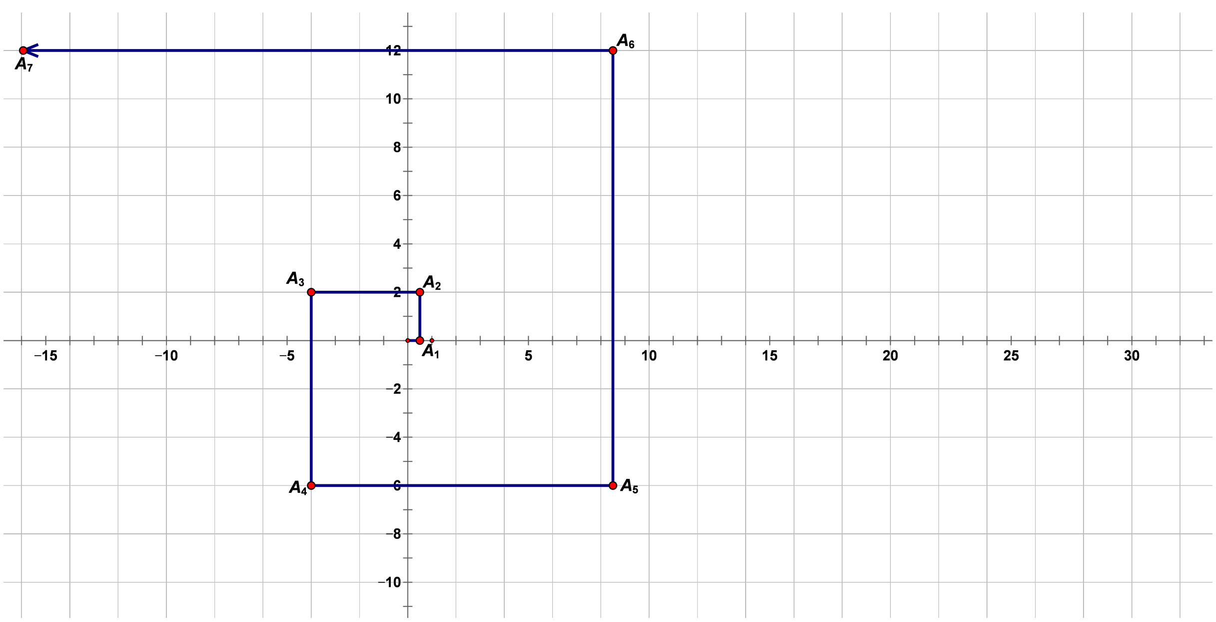
Površina trapeza je

$$P = \frac{|AB|+|CD|}{2} \cdot |EF| = \frac{r\sqrt{3}+r}{2} \cdot \frac{r}{2}\left(\sqrt{3}-1\right) = \frac{r^2}{2}.$$

Zadatak B-1.5. Marko i njegov "bend" su krenuli na turneju. Prvog su dana išli prema istoku, drugog su dana nastavili prema sjeveru, trećeg su dana nastavili prema zapadu, četvrtog dana prema jugu, petog prema istoku i tako dalje. Ako su n-tog dana turneje prešli $\dfrac{n^2}{2}$ kilometara, koliko su km bili udaljeni od polaznog mjesta na kraju četrdesetog dana?

Rješenje.

Neka je polazna točka ishodište. Kretanje i položaj prvih nekoliko dana turneje određeno je točkama A_1, A_2, $A_3, \ldots$



n (dan)	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	...	39.	40.
km	$\frac{1}{2}$	$\frac{2^2}{2}$	$\frac{3^2}{2}$	$\frac{4^2}{2}$	$\frac{5^2}{2}$	$\frac{6^2}{2}$	$\frac{7^2}{2}$	$\frac{8^2}{2}$	...	$\frac{39^2}{2}$	$\frac{40^2}{2}$
Smjer	I	S	Z	J	I	S	Z	J	...	Z	J
Kvadrant	os x	1	2	3	4	1	2	3	...	2	3

Zaključujemo da će 40.-tog dana položaj Marka biti u trećem kvadrantu u točki $A_{40}(x, y)$. Pri tome je

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1^2}{2} - \frac{3^2}{2} + \frac{5^2}{2} - \frac{7^2}{2} + \ldots + \frac{37^2}{2} - \frac{39^2}{2} = \\
&= \frac{1}{2}\left((1-3)(1+3) + (5-7)(5+7) + \ldots + (37-39)(37+39)\right) = \\
&= -1(1+3+\ldots+37+39) = \frac{-(1+39)\cdot 20}{2} = -400, \\
y &= \frac{2^2}{2} - \frac{4^2}{2} + \frac{6^2}{2} - \frac{8^2}{2} + \ldots + \frac{38^2}{2} - \frac{40^2}{2} = \\
&= \frac{1}{2}\left((2-4)(2+4) + (6-8)(6+8) + \ldots + (38-40)(38+40)\right) = \\
&= -1(2+4+\ldots+38+40) = \frac{-(2+40)\cdot 20}{2} = -420.
\end{aligned}$$

Udaljenost od Marka od polazne točke jednaka je udaljenosti točke A_{40} od ishodišta i iznosi

$$d = \sqrt{400^2 + 420^2} = 580.$$

Tražena je udaljenost 580 km.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

Šibenik, 3. travnja 2014.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1. Koliko ima kompleksnih brojeva $z = a + bi$ za koje vrijedi:

$$a, b \in \mathbb{Z}, \quad a \cdot b \geq 0 \quad \text{i} \quad \frac{|z| - 16}{1 - |z|} \geq 2?$$

Rješenje.

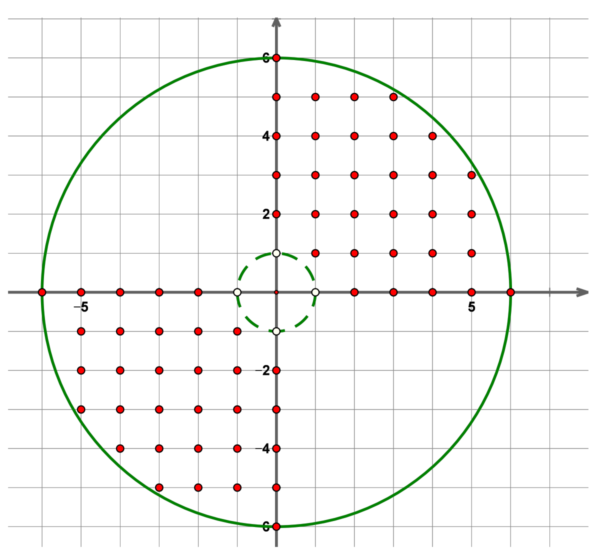
Zapišimo danu nejednadžbu u pogodnijem obliku.

$$\begin{aligned} \frac{|z| - 16}{1 - |z|} &\geq 2 \\ \frac{|z| - 16}{1 - |z|} - 2 &\geq 0 \\ \frac{3(|z| - 6)}{1 - |z|} &\geq 0 \end{aligned}$$

Rješenje ove nejednadžbe je ekvivalentno rješenju kvadratne nejednadžbe

$$(|z| - 6)(1 - |z|) \geq 0$$

uz uvjet $|z| \neq 1$, a njezino je rješenje interval $\langle 1, 6]$. Vrijedi $1 < |z| \leq 6$, odnosno rješenje nejednadžbe su sve točke unutar kružnog vijenca kojemu su polumjeri 1 i 6. Treba još samo prebrojati koliko točaka tog kružnog vijenca s cjelobrojnim koordinatama pripada prvom i trećem kvadrantu.



Dovoljno je prebrojati točke (a, b), za koje vrijedi $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $1 < a^2 + b^2 \leq 36$.

Ako je $a = 0$ tada je $b^2 \leq 36$, odnosno $b \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, što daje ukupno 5 točaka.

Ako je $a = 1$ tada je $b^2 \leq 35$, odnosno $b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, što daje ukupno 5 točaka.

Ako je $a = 2$ tada je $b^2 \leq 32$, odnosno $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, što daje ukupno 6 točaka.

Ako je $a = 3$ tada je $b^2 \leq 27$, odnosno $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, što daje ukupno 6 točaka.

Ako je $a = 4$ tada je $b^2 \leq 20$, odnosno $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, što daje ukupno 5 točaka.

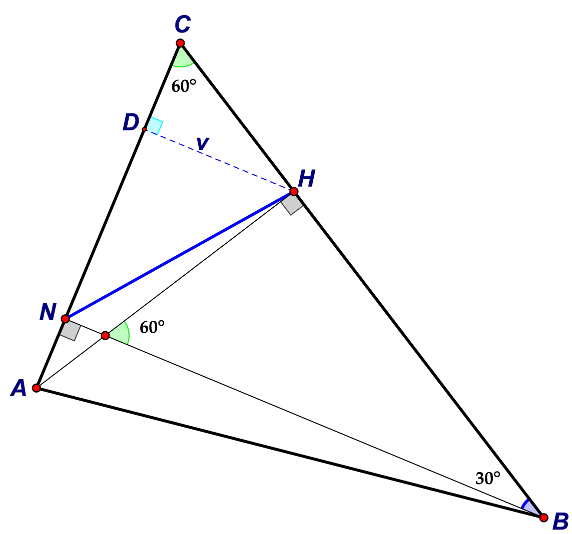
Ako je $a = 5$ tada je $b^2 \leq 11$, odnosno $b \in \{0, 1, 2, 3\}$, što daje ukupno 4 točke.

Ako je $a = 6$ tada je $b^2 \leq 0$, odnosno $b = 0$, dakle 1 točka.

Ukupno imamo $2 \cdot (5 + 5 + 6 + 6 + 5 + 4 + 1) = 64$ točke, odnosno 64 kompleksna broja s danim svojstvima.

Zadatak B-2.2. Točke H i N redom su nožišta visina iz vrha A i vrha B šiljastokutnog trokuta ABC. Duljina visine iz vrha A iznosi $5\sqrt{3}$ cm, duljina stranice $\overline{AB}$ 14 cm, a mjera kuta kojeg zatvaraju visine $\overline{AH}$ i $\overline{BN}$ iznosi $60°$. Odredite duljine preostalih stranica trokuta te duljinu dužine $\overline{HN}$.

Rješenje.



Kako je dani trokut šiljastokutan, zaključujemo da mjera kuta $\measuredangle BOH$ iznosi $60°$ pa je mjera kuta $\measuredangle NBC = 90° - 60° = 30°$, te mjera kuta $\measuredangle ACB = 60°$. Iz trokuta AHC slijedi $|AC| = \frac{|AH|}{\sin 60°} = 10$ cm.

Tada je $|CH| = \frac{1}{2}|AC| = 5$ cm.

Iz trokuta ABH slijedi

$$|BH|^2 = |AB|^2 - |AH|^2 = 196 - (5\sqrt{3})^2 = 121,$$

a odatle je $|BH| = 11$ cm, odnosno $|BC| = 11 + 5 = 16$ cm.

Preostaje još odrediti duljinu dužine $\overline{HN}$.

Iz trokuta BNC slijedi $|NC| = |BC|\cos 60^\circ = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8$ cm. Trokuti ABC i HNC su slični jer imaju zajednički kut i vrijedi jednakost omjera $\frac{|HC|}{|AC|} = \frac{|NC|}{|BC|}$, tj. $\frac{5}{10} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

Zaključujemo da je tada i omjer stranica $\frac{|HN|}{|AB|} = \frac{1}{2}$ pa duljina dužine $\overline{HN}$ iznosi $\frac{1}{2} \cdot 14 = 7$ cm.

Tražena se duljina može izračunati i preko visine v iz vrha H u trokutu HNC.

$$
\begin{aligned}
&v = |HC| \cdot \sin 60^\circ = 5\frac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}, \\
&|CD| = \frac{1}{2}|HC| = \frac{5}{2}\text{ cm}, \\
&|DN| = |CN| - |CD| = 5.5\text{ cm}, \\
&|HN|^2 = v^2 + |DN|^2 \Rightarrow |HN| = 7\text{ cm}.
\end{aligned}
$$

Zadatak B-2.3. Riješite jednadžbu

$$x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 8.$$

Rješenje.

Uvedimo supstituciju $t = x - 1$. Tada jednadžba prelazi u

$$
\begin{aligned}
(t+1)^2 + \left(\frac{t+1}{t}\right)^2 &= 8, \\
t^2 + 2t + 1 + 1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} &= 8, \\
t^2 + 2 + \frac{1}{t^2} + 2 \cdot \left(t + \frac{1}{t}\right) - 8 &= 0, \\
\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 + 2 \cdot \left(t + \frac{1}{t}\right) - 8 &= 0.
\end{aligned}
$$

Rješavanjem ove jednadžbe dobivamo

$$t + \frac{1}{t} = 2 \quad \text{ili} \quad t + \frac{1}{t} = -4.$$

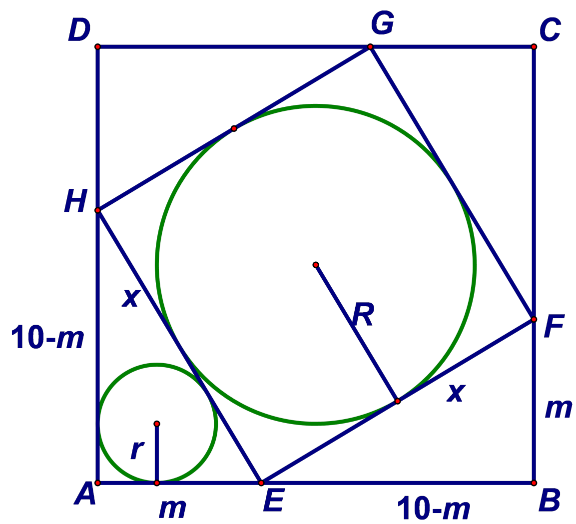
Slijedi $t^2 - 2t + 1 = 0$ ili $t^2 + 4t + 1 = 0$, odnosno

$$
\begin{aligned}
&t_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2, \\
&t_2 = -2 - \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1 - \sqrt{3}, \\
&t_3 = -2 + \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x_3 = -1 + \sqrt{3},
\end{aligned}
$$

Rješenja su svi $x \in \{2, -1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}\}$.

Zadatak B-2.4. Zadan je kvadrat $ABCD$ duljine stranice 10 cm. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka E, na stranici $\overline{BC}$ točka F, na stranici $\overline{CD}$ točka G i na stranici $\overline{DA}$ točka H tako da je $EFGH$ također kvadrat. Izračunajte duljinu dužine $\overline{AE}$ tako da zbroj površine kruga upisanog kvadratu $EFGH$ i površina krugova upisanih trokutima EBF, FCG, GDH i HAE bude najmanji mogući.

Rješenje.



Uvedimo oznake kao na slici, $|AE| = m$ i $|EF| = x$.

Polumjer kruga upisanog kvadratu je $R = \frac{x}{2}$, a polumjeri krugova upisanih pravokutnim trokutima su

$$r = \frac{10 - m + m - x}{2} = \frac{10 - x}{2}$$

(po formuli $r = \frac{a+b-c}{2}$, pri čemu su a, b katete pravokutnog trokuta a c hipotenuza).

Dakle, želimo da izraz

$$P = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \pi + 4\left(\frac{10 - x}{2}\right)^2 \pi = \frac{5\pi}{4}(x^2 - 16x + 80)$$

bude najmanji.

Kako je $P = \frac{5\pi}{4}(x^2 - 16x + 80)$ kvadratna funkcija, minimum će se ostvariti u apscisi tjemena, odnosno za $x = \frac{-(-16)}{2} = 8$.

Iz jednog od trokuta prema Pitagorinom poučku slijedi

$$\begin{aligned}
&m^2 + (10 - m)^2 = 8^2, \\
&2m^2 - 20m + 36 = 0, \\
&\Rightarrow\ m_1 = 5 - \sqrt{7},\ m_2 = 5 + \sqrt{7}.
\end{aligned}$$

Kako je $m_1 \approx 2.35$ i $m_2 \approx 7.65$, oba rješenja mogu predstavljati duljinu tražene dužine $\overline{AE}$.

Zadatak B-2.5. Profesor Ante na ploči je ispisao redom prvih n prirodnih brojeva, počevši od 1 i rekao Mati: "Ispod svakog zapisanog broja napiši umnožak tog broja i svih brojeva zapisanih ispred njega." "A ti Kate zbroji sve brojeve koje je zapisao Mate i zapiši rezultat." Ako je Kate zapisala broj m^2, odredite sve parove prirodnih brojeva m i n za koje to vrijedi.

Rješenje.

Treba odrediti sve parove prirodnih brojeva m i n, koji zadovoljavaju jednakost

$$1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = m^2.$$

Za $n > 4$ svaki od pribrojnika $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ sadrži barem jedan paran broj i barem jedan broj djeljiv s 5, što znači da ti pribrojnici imaju zadnju znamenku jednaku nuli.

Kako je $1+1\cdot2+1\cdot2\cdot3+1\cdot2\cdot3\cdot4 = 33$, to za $n > 4$ zbroj na lijevoj strani završava znamenkom 3. Kako kvadrati prirodnih brojeva završavaju jednom od znamenaka 0,1,4,5,6 ili 9, zaključujemo da za $n > 4$ ne postoje parovi prirodnih brojeva n i m koji zadovoljavaju danu jednakost.

Treba još provjeriti slučajeve kad je $n \leq 4$.

Ako je $n = 1$, slijedi 1= 1 i odgovarajući par je (1,1).

Ako je $n = 2$, slijedu $1 + 1 \cdot 2 = 3$ pa u skupu $\mathbb{N}$ nema rješenja.

Ako je $n = 3$, slijedi $1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 = 9$ i odgovarajući par je (3,3).

Ako je $n = 4$, slijedi $1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 33$ pa u skupu $\mathbb{N}$ nema rješenja.

Dakle dva su uređena para rješenje: $(n, m) \in \{(1, 1), (3, 3)\}$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

Šibenik, 3. travnja 2014.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1. Riješite jednadžbu $\cos^2 x + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = 1$.

Rješenje.

Primijenimo u danoj jednadžbi sljedeće identitete

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \ \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}.$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
&\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \cos^2 3x = 1\\
&1 + \cos 2x + 1 + \cos 4x + 2\cos^2 3x = 2\\
&\cos 2x + \cos 4x + 2\cos^2 3x = 0\\
&2\cos\frac{2x + 4x}{2}\cos\frac{2x - 4x}{2} + 2\cos^2 3x = 0\\
&2\cos 3x \cdot \cos x + 2\cos^2 3x = 0\\
&2\cos 3x \cdot (\cos x + \cos 3x) = 0\\
&4\cos 3x \cdot \cos 2x \cdot \cos x = 0\\
&\cos 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}\\
&\cos 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}\\
&\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Zadatak B-3.2. Odredite sve realne brojeve x za koje vrijedi

$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \ldots + \frac{1}{\log_x 2^{2013} \cdot \log_x 2^{2014}} \leq 2013 \log_2 x.$$

Rješenje.

Nejednadžba ima smisla ako je $x > 0$ i $x \neq 1$. Primijenimo svojstva logaritma potencije na lijevu stranu nejednadžbe.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\log_x 2 \cdot 2\log_x 2} + \frac{1}{2\log_x 2 \cdot 3\log_x 2} + \ldots + \frac{1}{2013\log_x 2 \cdot 2014\log_x 2} \leq 2013\log_2 x\\
&\frac{1}{2(\log_x 2)^2} + \frac{1}{2 \cdot 3(\log_x 2)^2} + \ldots + \frac{1}{2013 \cdot 2014(\log_x 2)^2} \leq 2013\log_2 x
\end{aligned}$$

Kako je $\frac{1}{\log_x 2} = \log_2 x$ slijedi

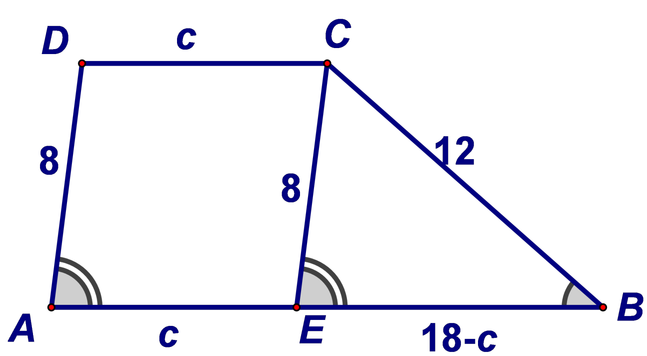
$$
\begin{aligned}
&\frac{(\log_2 x)^2}{2} + \frac{(\log_2 x)^2}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{(\log_2 x)^2}{2013 \cdot 2014} \leq 2013 \log_2 x, \\
&(\log_2 x)^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2013 \cdot 2014}\right) \leq 2013 \log_2 x, \\
&(\log_2 x)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014}\right) \leq 2013 \log_2 x, \\
&(\log_2 x)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2014}\right) \leq 2013 \log_2 x, \\
&(\log_2 x)^2 \cdot \frac{2013}{2014} \leq 2013 \log_2 x, \\
&(\log_2 x)^2 - 2014 \log_2 x \leq 0, \\
&\log_2 x \cdot (\log_2 x - 2014) \leq 0.
\end{aligned}
$$

Slijedi $\log_2 x \geq 0$ i $\log_2 x \leq 2014$, odnosno $1 \leq x \leq 2^{2014}$.

Zbog uvjeta s početka, rješenje je $x \in \langle 1, 2^{2014}]$.

Zadatak B-3.3. Duljina veće osnovice trapeza iznosi 18 cm, a duljine krakova trapeza su $b = 12$ cm i $d = 8$ cm. Omjer kutova uz veću osnovicu je $2:1$. Odredite duljinu manje osnovice trapeza.

Rješenje.



Označimo s α kut $\sphericalangle EBC$ i primijenimo poučak o sinusima na trokut EBC:

$$\frac{8}{\sin \alpha} = \frac{12}{\sin 2\alpha}.$$

Odatle dobivamo

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} &= \frac{2}{3} \\
\cos \alpha &= \frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

Iz poučka o kosinusu slijedi

$$
\begin{aligned}
& 8^2 = 12^2 + (18-c)^2 - 24(18-c)\cos\alpha, \\
& 64 = 144 + (18-c)^2 - 18(18-c)
\end{aligned}
$$

pa dobivamo jednadžbu

$$c^2 - 18c + 80 = 0$$

čija su rješenja $c = 8$ i $c = 10$.

U slučaju $c = 10$ trokut CEB je jednakokračan sa stranicama 8, 8, 12 i kutovima 45°, 45°, 90°, što znači da za njegove stranice mora vrijediti Pitagorin poučak $8^2 + 8^2 = 12^2$. Kako ova jednakost ne vrijedi jedino je rješenje $c = 8$ cm.

Ako se koristi umjesto poučka o kosinusu, još jednom poučak o sinusima na trokut CEB dobijemo jednakost

$$\frac{18-c}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} = \frac{8}{\sin\alpha},$$

koja nakon sređivanja daje rješenje $c = 8$.

Zadatak B-3.4. U ravnini je nacrtano 100 koncentričnih kružnica kojima su polumjeri 1 cm, 2 cm, 3 cm,..., 100 cm. Krug polumjera 1 cm obojan je crveno, a sva ostala područja omeđena uzastopnim kružnicama obojana su ili crveno ili zeleno, ali tako da su susjedna područja obojana različitim bojama. Odredite omjer površine svih zelenih područja i površine svih crvenih područja.

Rješenje.

Zelena područja su kružni vijenci kojima je ukupna površina

$$Z = 2^2\pi - 1^2\pi + 4^2\pi - 3^2\pi + 6^6\pi - 5^2\pi + \ldots + 100^2\pi - 99^2\pi.$$

Ovo možemo zapisati kao

$$
\begin{aligned}
Z &= \pi((2-1)(2+1) + (4-3)(4+3) + (6-5)(6+5) + \ldots + (100-99)(100+99)) = \\
&= \pi((2+1) + (4+3) + (6+5) + \ldots + (100+99)) = \\
&= \pi(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 99 + 100) = \\
&= \pi(1+100)\cdot 50 = 5050\pi
\end{aligned}
$$

Površina crvenih područja iznosi

$$C = 100^2\pi - Z = 10000\pi - 5050\pi = 4950\pi.$$

Traženi je omjer

$$\frac{Z}{C} = \frac{5050\pi}{4950\pi} = \frac{101}{99}.$$

Zadatak B-3.5. Grupa djece se natjecala tko će pojesti više jagoda. Pobjednik je pojeo n jagoda, a svaki sljedeći po dvije jagode manje i tako sve do posljednjeg djeteta na k-tom mjestu, koje je pojelo $n+2-2k$ jagoda. Ukupan broj pojedenih jagoda na natjecanju iznosi 2014. Koliko je najmanje jagoda pojeo pobjednik?

Rješenje.

Pobjednik je pojeo n jagoda, drugi po redu $n-2$ jagode, treći po redu $n-4$ jagode, ... , k-ti po redu $n+2-2k$ jagoda. Ukupan zbroj je

$$n+(n-2)+(n-4)+\ldots+(n-2(k-1))=2014.$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
&n \cdot k-2(1+2+3+\ldots+k-1)=2014, \\
&n \cdot k-2 \cdot \frac{k(k-1)}{2}=2014, \\
&k(n-k+1)=2 \cdot 19 \cdot 53.
\end{aligned}$$

Odatle slijedi $(k, n-k+1) \in\{(1,2014),(2,1007),(19,106),(38,53),(53,38),(106,19),(1007,2),(2014,1)\}$. Slijedi

$$\begin{aligned}
&k=1,\ n-k+1=2014 \quad \Rightarrow \quad n=2014 \\
&k=2,\ n-k+1=1007 \quad \Rightarrow \quad n=1008 \\
&k=19,\ n-k+1=106 \quad \Rightarrow \quad n=124 \\
&k=38,\ n-k+1=53 \quad \Rightarrow \quad n=90 \\
&k=53,\ n-k+1=38 \quad \Rightarrow \quad n=90 \\
&k=106,\ n-k+1=19 \quad \Rightarrow \quad n=124 \\
&k=1007,\ n-k+1=2 \quad \Rightarrow \quad n=1008 \\
&k=2014,\ n-k+1=1 \quad \Rightarrow \quad n=2014
\end{aligned}$$

Zaključujemo da najmanja vrijednost broja n iznosi 90.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

Šibenik, 3. travnja 2014.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1. Odredite prirodni broj N za koji vrijedi

$$\frac{1}{2!11!}+\frac{1}{3!10!}+\frac{1}{4!9!}+\frac{1}{5!8!}+\frac{1}{6!7!}=\frac{N}{1!12!}.$$

Rješenje.

Pomnožimo danu jednadžbu s $13!$,

$$\frac{13!}{2!11!}+\frac{13!}{3!10!}+\frac{13!}{4!9!}+\frac{13!}{5!8!}+\frac{13!}{6!7!}=\frac{N\cdot 13!}{1!12!}.$$

Tada dobivamo

$$\binom{13}{2}+\binom{13}{3}+\binom{13}{4}+\binom{13}{5}+\binom{13}{6}=N\binom{13}{1}.$$

Dodajmo na obje strane $\binom{13}{0}+\binom{13}{1}$,

$$\binom{13}{0}+\binom{13}{1}+\binom{13}{2}+\binom{13}{3}+\binom{13}{4}+\binom{13}{5}+\binom{13}{6}=N\binom{13}{1}+\binom{13}{0}+\binom{13}{1}.$$

Zbroj svih binomnih koeficijenata u razvoju binoma $(a+b)^n$ iznosi 2^n. Tada je lijeva strana gornje jednakosti jednaka $\frac{2^{13}}{2}$ jer je zbroj binomnih koeficijenata koji nedostaju, $\binom{13}{7}+\binom{13}{8}+\ldots+\binom{13}{13}$, jednak zbroju $\binom{13}{0}+\binom{13}{1}+\ldots+\binom{13}{6}$ (zbog svojstva simetrije). Slijedi

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{13}}{2}=N\binom{13}{1}+\binom{13}{0}+\binom{13}{1}\\
&2^{12}=13N+1+13\\
&2^{12}-1=13(N+1)\\
&(2^6-1)(2^6+1)=13(N+1)\\
&N=\frac{63\cdot 65}{13}-1=314.
\end{aligned}$$

Zadatak B-4.2. Opći član niza a_n dan je formulom $a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$. Odredite zbroj prvih 9999 članova tog niza.

Rješenje.

Opći član niza možemo zapisati u sljedećem obliku

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{(\sqrt{n+1})^2\sqrt{n}+(\sqrt{n})^2\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \\
&= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(n+1-n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.
\end{aligned}
$$

Traženi zbroj tada iznosi

$$
a_1+a_2+\ldots+a_{9999} = \frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9999}}-\frac{1}{\sqrt{10000}} = 1-\frac{1}{\sqrt{10000}} = \frac{99}{100}.
$$

Zadatak B-4.3. U kvadratnu plutenu ploču kojoj je duljina stranice 1 metar zabodena je 201 pribadača. Dokažite da barem tri pribadače leže unutar kruga polumjera $\frac{1}{14}$ metra.

Rješenje.

Kvadrat razdijelimo na 100 kvadrata kojima je duljina stranice 1 dm, (10×10). Kako je $2 \cdot 100 < 201$, prema Dirichletovom principu barem jedan od tih 100 kvadrata sadrži najmanje tri pribadače.

Krug opisan tom kvadratu sadrži najmanje tri pribadače i ima promjer

$$
\begin{aligned}
2r &= \frac{1}{10}\sqrt{2} \\
r &= \frac{\sqrt{2}}{20} = \sqrt{\frac{2}{400}} = \sqrt{\frac{1}{200}} < \sqrt{\frac{1}{196}} = \frac{1}{14} \text{ metara.}
\end{aligned}
$$

Zadatak B-4.4. Odredite sve prirodne brojeve a za koje je broj a^3+1 potencija broja 3.

Prvo rješenje.

Ako je a^3+1 djeljivo s 3, broj a je oblika $a = 3p-1$, $p \in \mathbb{N}$. Tada je

$$
a^3+1 = (3p-1)^3+1 = 27p^3-27p^2+9p-1+1 = 9p(3p^2-3p+1).
$$

Izraz $3p^2-3p+1$ nije djeljiv s 3, a kako je a^3+1 potencija broja 3 on može biti samo jednak 3°.

Tada iz

$$
3p^2-3p+1=1
$$

slijedi da je $p=1$, a $a^3+1=9$ pa je $a=2$.

Drugo rješenje.

Neka je $a^3+1=3^k$.

Tada iz rastava $a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)$ slijedi da je

$$a+1=3^m \text{ i } a^2-a+1=3^n,$$

gdje su m i n nenegativni cijeli brojevi.

Iz $a+1=3^m$ zaključujemo da a nije djeljiv s 3. U protivnom bi $m=0$, a tada je i $a=0$ što je nemoguće jer je a prirodan broj. Iz $a^2-a+1=3^n$ slijedi

$$a^2+2a+1-3a=3^n, \text{ odnosno } (a+1)^2-3a=3^n.$$

Odatle je

$$\begin{aligned}&3a=(a+1)^2-3^n=3^{2m}-3^n\\&a=3^{2m-1}-3^{n-1}.\end{aligned}$$

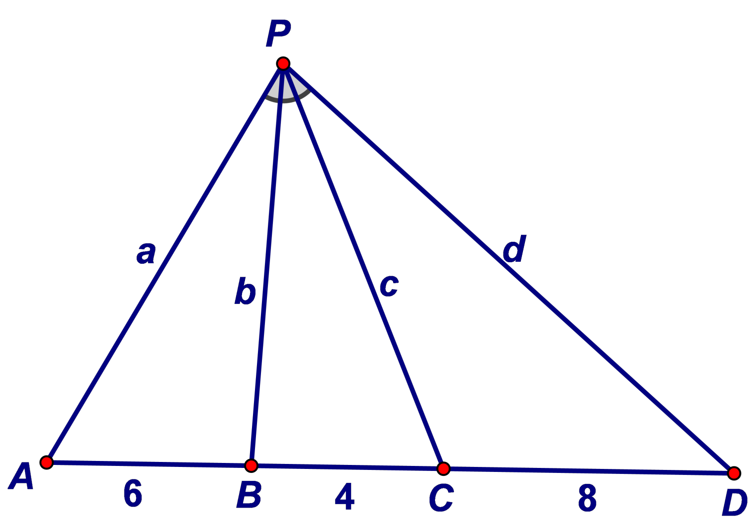
Ovaj je prikaz moguć samo ako je $n-1=0$ jer bi u protivnom a bio djeljiv s 3. Prema tome $n=1$ i slijedi

$$\begin{aligned}&a^2-a+1=3^1,\\&a^2-a-2=0,\\&a=2.\end{aligned}$$

Zadatak B-4.5. Uz ravnu su cestu duž jednog pravca zasađena 4 stabla. Prvo je od drugog udaljeno 6 m, drugo od trećeg 4 m i treće od četvrtog 8 m. Na kojoj se udaljenosti od svakog od stabala nalazi promatrač koji sve tri udaljenosti među stablima vidi pod istim kutom?

Rješenje.

Označimo položaje stabala redom točkama A, B, C i D, a položaj promatrača točkom P.



Uvedimo oznake:

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle CPD = \alpha$$
$$|AP| = a,\ |BP| = b,\ |CP| = c.$$

Primijenimo poučak o sinusu na trokute APB i BPC:

$$\frac{6}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\sphericalangle PBA} \text{ i } \frac{4}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\left(180^\circ - \sphericalangle PBA\right)}$$

Slijedi
$$\frac{a}{c} = \frac{3}{2}.$$

Analogno se iz trokuta BPC i CPD dobije

$$\frac{b}{d} = \frac{1}{2}.$$

Napomena: Ove omjere mogli smo dobiti i primijenom poučka o simetrali unutarnjeg kuta trokuta na trokute APC i BPD.

Iz poučka o kosinusu i navedenih omjera imamo:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = 36 \\ b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = 16 \\ c^2 + d^2 - 2cd\cos\alpha = 64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9c^2 + 4b^2 - 12bc\cos\alpha = 144 \\ b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = 16 \\ c^2 + 4b^2 - 4bc\cos\alpha = 64 \end{cases}$$

Iz druge jednadžbe je
$$2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - 16,$$

što nakon uvrštavanja u prvu i treću jednadžbu daje

$$\begin{cases} 9c^2 + 4b^2 - 6b^2 - 6c^2 + 96 = 144 \\ c^2 + 4b^2 - 2b^2 - 2c^2 + 32 = 64 \end{cases},$$

odnosno
$$\begin{cases} 3c^2 - 2b^2 = 48 \\ -c^2 + 2b^2 = 32 \end{cases}.$$

Slijedi $c^2 = 40$, $b^2 = 36$.

Tada su tražene udaljenosti $c = 2\sqrt{10}$m, $b = 6$m, $a = \frac{3}{2}c = 3\sqrt{10}$m i $d = 2b = 12$m.