DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

Šibenik, 3. travnja 2014.

Zadatak A-1.1.

Odredi najmanji prirodni broj a takav da je vrijednost izraza

$$\frac{n^8+n^6+n^4+n^2+a}{n^2-1}$$

za $n=2014$ cijeli broj djeljiv sa 3.

Rješenje.

Sređivanjem izraza dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{n^8+n^6+n^4+n^2+a}{n^2-1} &= \frac{n^8-n^6+2(n^6-n^4)+3(n^4-n^2)+4(n^2-1)+a+4}{n^2-1} \\ &= n^6+2\cdot n^4+3\cdot n^2+4+\frac{a+4}{n^2-1}.\end{aligned}$$

Ostatak pri dijeljenju broja 2014 sa 3 je 1, pa sve potencije broja 2014 daju ostatak 1 pri dijeljenju sa 3.

Dakle, broj $2014^6+2\cdot 2014^4+3\cdot 2014^2+4$ daje pri dijeljenju sa 3 isti ostatak kao $1+2+3+4$, pa je taj ostatak 1. Da bi čitav izraz bio djeljiv sa 3, broj $\frac{a+4}{2014^2-1}$ mora pri dijeljenju sa 3 davati ostatak 2, pa je najmanji mogući traženi a onaj za koji je $\frac{a+4}{2014^2-1}=2$, odnosno $a=2\cdot 2014^2-6$.

Zadatak A-1.2.

Na igralištu se nalazi 2014 sportaša koji na dresovima imaju brojeve od 1 do 2014 (svaki broj je na točno jednom dresu). Na početku su svi u stojećem položaju. U određenim vremenskim intervalima trener uzvikuje redom sve prirodne brojeve od 1 do 2014. Sportaši kojima je na dresu višekratnik uzviknutoga broja odmah mijenjaju svoj položaj iz stojećeg položaja u čučanj ili obratno.

Koliko je sportaša u čučnju nakon što trener uzvikne broj 2014?

Rješenje.

Svaki sportaš će promijeniti položaj onoliko puta koliko njegov broj ima djelitelja.

Dakle, na kraju će u čučnju biti oni sportaši čiji brojevi imaju neparan broj djelitelja.

Sve djelitelje broja n možemo grupirati u dvočlane skupove $\left\{d, \frac{n}{d}\right\}$, osim ako je $n=d^2$ za neki prirodni broj d kada umjesto jednog dvočlanog skupa imamo jednočlan skup (jer je $\frac{n}{d}=d$). To znači da prirodni broj ima neparno mnogo djelitelja ako i samo ako je potpun kvadrat.

Među brojevima $1, \ldots, 2014$ kvadrati su $1^2, 2^2, \ldots, 44^2$ (jer je $44^2=1936$ i $45^2=2025$).

U čučnju će ostati 44 sportaša.

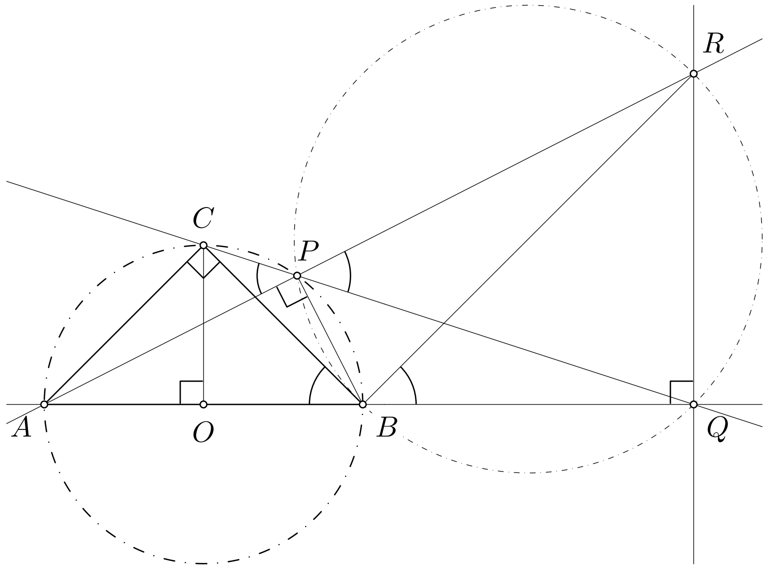
Napomena: Tvrdnju da prirodni broj ima neparno mnogo djelitelja ako i samo ako je potpun kvadrat možemo dokazati i na sljedeći način. Ako je $n = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$, gdje su p_i različiti prosti brojevi i $k_i \geqslant 1$, tada n ima $(k_1+1)\cdots(k_s+1)$ djelitelja (faktor p_i se može pojaviti između 0 i k_i puta u djelitelju). Dakle, broj djelitelja broja n je neparan ako i samo ako su svi brojevi k_i parni.

Zadatak A-1.3.

Dužina $\overline{AB}$ je promjer kružnice sa središtem O. Na kružnici je dana točka C takva da je OC okomito na AB. Na kraćem luku $\widehat{BC}$ odabrana je točka P. Pravci CP i AB sijeku se u točki Q, a točka R je sjecište pravca AP i okomice kroz Q na pravac AB.

Dokaži da je $|BQ| = |QR|$.

Rješenje.



Trokut OCB je jednakokračan pravokutan trokut jer su $\overline{OB}$ i $\overline{OC}$ polumjeri kružnice sa središtem u točki O. Zato je $\sphericalangle CBA = \sphericalangle CBO = 45°$.

Obodni kutovi $\sphericalangle CPA$ i $\sphericalangle CBA$ nad tetivom $\overline{CA}$ su jednaki, pa je

$$\sphericalangle QPR = \sphericalangle CPA = \sphericalangle CBA = 45°.$$

Prema Talesovom teoremu kut $\sphericalangle APB$ je pravi kut pa je i $\sphericalangle BPR$ pravi.

Četverokut $BQRP$ je tetivan jer ima dva prava nasuprotna kuta ($\sphericalangle RQB$ i $\sphericalangle BPR$) pa su obodni kutovi nad tetivom $\overline{QR}$ jednaki, odnosno $\sphericalangle QBR = \sphericalangle QPR = 45°$.

Zato je $\sphericalangle BRQ = 180° - \sphericalangle RQB - \sphericalangle QBR = 180° - 90° - 45° = 45°$, pa je $\sphericalangle BRQ = 45° = \sphericalangle QBR$ i vrijedi $|BQ| = |QR|$.

Zadatak A-1.4.

Neka su x_1, x_2, …, x_{100} realni brojevi za koje vrijedi

$$\begin{aligned} |2x_k - x_{k+1}| &= x_{k+2} \quad \text{za sve } k \in \{1, 2, \ldots, 98\}, \\ |2x_{99} - x_{100}| &= x_1, \\ |2x_{100} - x_1| &= x_2. \end{aligned}$$

Dokaži da je $x_1 = x_2 = \cdots = x_{100}$.

Prvo rješenje.

Kvadriranjem dobivamo niz jednadžbi:

$$4x_k^2 - 4x_k x_{k+1} + x_{k+1}^2 = x_{k+2}^2 \text{ za } k \in \{1, 2, \ldots, 98\},$$
$$4x_{99}^2 - 4x_{99}x_{100} + x_{100}^2 = x_1^2, \qquad 4x_{100}^2 - 4x_{100}x_1 + x_1^2 = x_2^2.$$

Zbrajanjem tih jednadžbi dobivamo izraz

$$4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{100}^2) - 4(x_1x_2 + \cdots + x_{99}x_{100} + x_{100}x_1) = 0.$$

Dijeljenjem sa 2 i grupiranjem dobivamo

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + \cdots + x_{99}^2 - 2x_{99}x_{100} + x_{100}^2 + x_{100}^2 - 2x_{100}x_1 + x_1^2 = 0,$$

odnosno

$$(x_1 - x_2)^2 + \cdots + (x_{99} - x_{100})^2 + (x_{100} - x_1)^2 = 0.$$

Budući da su svi pribrojnici nenegativni, moraju svi biti jednaki nula, odnosno $x_1 = \cdots = x_{100}$.

Drugo rješenje.

Označimo $y_k = 2x_k - x_{k+1}$ za $1 \leqslant k \leqslant 99$, te $y_{100} = 2x_{100} - x_1$.

Tada je

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{100} = 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_{100}) - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{100}) = x_1 + x_2 + \cdots + x_{100}.$$

S druge strane, zbrajanjem zadanih jednakosti dobivamo

$$|y_1| + |y_2| + \cdots + |y_{100}| = x_1 + x_2 + \cdots + x_{100}.$$

Izjednačavanjem dobivenih jednakosti zaključujemo

$$|y_1| + |y_2| + \cdots + |y_{100}| = y_1 + y_2 + \cdots + y_{100}.$$

Budući da za $1 \leqslant k \leqslant 100$ vrijedi $|y_k| \geqslant y_k$, pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $y_k \geqslant 0$, gornja jednakost je moguća samo ako su svi brojevi y_k nenegativni.

To znači da u nizu jednakosti koji je zadan u zadatku možemo ukloniti apsolutne vrijednosti i zaključujemo

$$\begin{aligned} 2x_k - x_{k+1} &= x_{k+2} \quad \text{za } 1 \leqslant k \leqslant 98, \\ 2x_{99} - x_{100} &= x_1, \\ 2x_{100} - x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Označimo $x_{100+k} = x_k$ za $1 \leqslant k \leqslant 100$. Neka je k takav da je $x_k \geqslant x_i$ za sve $1 \leqslant i \leqslant 100$. Tada je $2x_k = x_{k+1} + x_{k+2} \leqslant 2x_k$, pa vrijedi $x_k = x_{k+1} = x_{k+2}$. Pretpostavimo li da je $x_j \neq x_{j+1}$ za neki j, onda postoji najmanji $j > k$ takav da je $x_{j-1} = x_j \neq x_{j+1}$. No, to je u kontradikciji s pretpostavkom da je $x_j = 2x_{j-1} - x_j = x_{j+1}$.

Dakle, mora vrijediti $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_{100}$.

Napomena: Nakon što dokažemo da je $y_k \geqslant 0$ za sve $1 \leqslant k \leqslant 100$, rješenje možemo dovršiti i analizom slučajeva.

Ako pretpostavimo da je $x_1 > x_2$, onda zbog $2x_1 = x_2 + x_3$ mora vrijediti $x_2 < x_1 < x_3$. Iz druge jednakosti onda zaključujemo $x_4 < x_2 < x_1 < x_3$. Nastavljajući ovaj postupak (preciznije, koristeći matematičku indukciju) možemo dokazati da vrijedi sljedeći niz strogih nejednakosti

$$x_{100} < x_{98} < \cdots < x_4 < x_2 < x_1 < x_3 < x_5 < \cdots < x_{99}.$$

No, ovo je u kontradikciji s posljednjom jednakosti jer bi moralo vrijediti $2x_{100} < x_1 + x_2 = 2x_{100}$.

Slično, slučaj $x_2 > x_1$ vodi na kontradikciju, pa zaključujemo da je $x_1 = x_2$.

Ako je $x_1 = x_2$, onda prva jednakost povlači da je $x_1 = x_2 = x_3$. Druga jednakost onda povlači $x_2 = x_3 = x_4$. Nastavljajući ovaj postupak, dobivamo da je $x_1 = x_2 = \cdots = x_{100}$.

Zadatak A-1.5.

Andrija i Boris imaju 2014 karata označenih brojevima od 1 do 2014. Andrija ima sve karte s parnim, a Boris sve karte s neparnim brojevima. Andrija je poredao svoje karte ukrug redom, od 2 do 2014, u smjeru kazaljke na satu tako da se brojevi na kartama ne vide. Boris zna da su karte poredane tim redom i u tom smjeru, ali ne zna gdje se nalazi karta s brojem 2. Nakon toga, Boris na svaku Andrijinu stavi po jednu od svojih karata i tako nastane 1007 parova karata. Za svaki se par usporedi brojeve na kartama i dodijeli jedan bod onom igraču na čijoj je karti veći broj.

Odredi najveći mogući N tako da Boris može biti siguran da će ostvariti barem N bodova.

Rješenje.

Najveći broj bodova za koji Boris može biti siguran da će ostvariti je 503.

Tvrdimo da ako Boris svoje karte složi obrnutim redom, od 2013 do 1, u smjeru kazaljke na satu, onda će bez obzira na Andrijin raspored Boris ostvariti 503 boda.

2013	2011	$\cdots$	$2a+1$	$2a-1$	$\cdots$	$2k+1$	$2k-1$	$2k-3$	$2k-5$	$\cdots$	$2c+1$	$2c-1$	$\cdots$	3	1
$2k$	$2k+2$	$\cdots$	$2b$	$2b+2$	$\cdots$	2012	2014	2	4	$\cdots$	$2d$	$2d+2$	$\cdots$	$2k-4$	$2k-2$

Za takav Borisov raspored, promotrimo neki Andrijin raspored. Ispod Borisove karte 2013 se nalazi Andrijina karta $2k$, za neki $k \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $2k \neq 2014$, slučaj u kojem je $2k = 2014$ izravno slijedi. Na slici je prikazan raspored karata napisan u niz, počevši od mjesta na koje je Boris stavio kartu 2013. Parove karata podijelimo u dva dijela: dio u kojem se nalaze Andrijine karte $2k$, $2k+2$, ..., 2012, 2014, te drugi dio u kojem se nalaze 2, 4, ..., $2k-4$, $2k-2$. U prvom dijelu Andrijine karte (slijeva nadesno) rastu od $2k$ do 2014, a Borisove padaju od 2013. Drugim riječima, na početku tog dijela su Borisove karte veće, a na kraju su Andrijine veće. Označimo s $2a+1$ ($a \in \mathbb{N}$) zadnju Borisovu kartu u prvom dijelu koja je veća od odgovarajuće Andrijine karte, koju označimo s $2b$ za neki $b \in \mathbb{N}$. Dakle, vrijedi

$$2a+1 > 2b, \quad 2a-1 < 2b+2.$$

Iz prethodnih nejednakosti slijedi $2a-3 < 2b < 2a+1$, pa je $2b = 2a-2$ ili $2b = 2a$. Primijetimo da je zbroj karata u svakom paru prvog dijela jednak i iznosi $2013 + 2k$. Naime, u svakom sljedećem paru je Borisov broj za 2 manji od prethodnog, a Andrijin za 2 veći od prethodnog, pa se zbroj ne mijenja. Stoga vrijedi $(2a+1) + 2b = 2013 + 2k$.

Ako je $2b = 2a-2$, onda je k neparan broj i $a = \dfrac{1007+k}{2}$. Slično, ako je $2b = 2a$, onda je k paran broj i $a = \frac{1006+k}{2}$. Ako je X broj parova u prvome dijelu u kojima je Borisova karta veća od Andrijine, onda je $X = b - k + 1$. Stoga zaključujemo da vrijedi

$$X = \begin{cases} \frac{1007-k}{2}, & \text{ako je } k \text{ neparan,} \\ \frac{1008-k}{2}, & \text{ako je } k \text{ paran.} \end{cases}$$

Nadalje, označimo sa Y broj parova u drugome dijelu u kojima je Borisova karta veća od Andrijine. Analognim zaljučivanjem kao u prvome dijelu, dobivamo

$$Y = \begin{cases} \frac{k-1}{2}, & \text{ako je } k \text{ neparan,} \\ \frac{k-2}{2}, & \text{ako je } k \text{ paran.} \end{cases}$$

Stoga je $X + Y = 503$ bez obzira na vrijednost broja k, te zaključujemo da će slaganjem karata na ovaj način Boris ostvariti 503 boda.

Preostaje nam dokazati da Boris ne može rasporediti svoje karte tako da njegov broj bodova bude veći od 503 bez obzira na Andrijin raspored.

Pretpostavimo da postoji Borisov raspored za koji Andrija ostvaruje manje od 504 boda bez obzira kako postavi svoje karte. Za takav Borisov raspored, označimo s A ukupni broj bodova koje Andrija ostvari u *svim* svojim mogućim rasporedima. Mogućih Andrijinih rasporeda ima 1007, pa po pretpostavci vrijedi $A < 1007 \cdot 504$. S druge strane, promotrimo koliko broju A pridonosi svaka od Borisovih karata. Karta s brojem 2 doprinosi ukupno 1 bod jer daje bodove samo u rasporedu u kojem se karta s brojem 1 nalazi iznad nje. Karta s brojem 4 donosi 2 boda (slučajevi u kojima su iznad nje karte 1 i 3). Općenito, za $k \in \{1, 2, \ldots, 1007\}$ karta s brojem $2k$ donosi k bodova. Stoga vrijedi

$$A = 1 + 2 + \cdots + 1007 = \frac{1007 \cdot 1008}{2} = 1007 \cdot 504.$$

Došli smo do kontradikcije, pa zaključujemo da naša pretpostavka nije bila točna, tj. da Boris ne može biti siguran da će ostvariti više od 503 boda.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

Šibenik, 3. travnja 2014.

Zadatak A-2.1.

Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju sustav

$$\begin{aligned} x + y^2 &= y^3, \\ y + x^2 &= x^3. \end{aligned}$$

Rješenje.

Oduzimanjem zadanih jednadžbi dobivamo $y - x + x^2 - y^2 = x^3 - y^3$, što je ekvivalentno

$$y - x + (x - y)(x + y) = (x - y)(x^2 + xy + y^2),$$

odnosno

$$(x - y)(-1 + x + y) = (x - y)(x^2 + xy + y^2),$$

pa slijedi da je $x + y - 1 = x^2 + xy + y^2$ ili $x - y = 0$.

U prvom slučaju je $x + y - 1 = x^2 + xy + y^2$, što možemo zapisati kao

$$y^2 + (x - 1)y + x^2 - x + 1 = 0. \tag{$\spadesuit$}$$

Ovu jednadžbu promatramo kao kvadratnu jednadžbu po y. Njena diskriminanta je

$$D = (x - 1)^2 - 4(x^2 - x + 1) = -3x^2 + 2x - 3.$$

Diskriminanta kvadratnog trinoma $-3x^2 + 2x - 3$ je $-32 < 0$, pa vrijedi da je $D < 0$ za svaki realni broj x, što povlači da jednadžba ($\spadesuit$) nema realnih rješenja za y. Dakle, u ovom slučaju nema rješenja.

U drugom slučaju je $y = x$ i obje jednadžbe postaju $x + x^2 = x^3$, tj. $x(x^2 - x - 1) = 0$. Slijedi da je $x_1 = 0$ ili $x^2 - x - 1 = 0$. Rješavanjem kvadratne jednadžbe dobivamo rješenja $x_{2,3} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Jedina rješenja su $(x, y) \in \left\{(0, 0), \left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}, \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right), \left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}, \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

Napomena: Jednadžba $x + y - 1 = x^2 + xy + y^2$ je ekvivalentna s

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x + y)^2 = 0,$$

koja nema rješenja jer ne postoje x i y takvi da je $x = 1$, $y = 1$ i $x + y = 0$.

Zadatak A-2.2.

Svaki od brojeva x_1, x_2, ..., x_{2014} može biti -1, 0 ili 1. Koja je najmanja moguća vrijednost zbroja svih umnožaka $x_i x_j$ za $1 \leqslant i < j \leqslant 2014$?

Prvo rješenje.

Primijetimo da dvostruki zbroj svih umnožaka $x_i x_j$ za $1 \leqslant i < j \leqslant 2014$ možemo zapisati kao

$$(x_1 + \cdots + x_{2014})^2 - (x_1^2 + \cdots + x_{2014}^2).$$

Označimo $A = (x_1 + \cdots + x_{2014})^2$ i $B = x_1^2 + \cdots + x_{2014}^2$.

Želimo minimizirati A i maksimizirati B.

Broj A je kvadrat realnog broja, pa je $A \geqslant 0$. Minimum $A = 0$ postiže se kad je među brojevima x_i jednak broj 1 i -1, npr. kad je $x_1 = x_2 = \cdots = x_{1007} = 1$, a $x_{1008} = x_{1009} = \cdots = x_{2014} = -1$.

Za broj B vrijedi $B = x_1^2 + \cdots + x_{2014}^2 \leqslant 1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2 = 2014$. Najveća vrijednost $B = 2014$ postiže se ako nijedan x_i nije 0, npr. kad je $x_1 = x_2 = \cdots = x_{1007} = 1$, a $x_{1008} = x_{1009} = \cdots = x_{2014} = -1$.

Budući da se najmanja vrijednost od A i najveća vrijednost od B mogu postići za iste vrijednosti brojeva x_1, ..., x_{2014}, slijedi da je tražena najmanja moguća vrijednost zbroja svih umnožaka $x_i x_j$ za $1 \leqslant i < j \leqslant 2014$ jednaka $\dfrac{A - B}{2} = -1007$.

Drugo rješenje.

Primijetimo da je traženo rješenje negativno jer za $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \cdots = x_{2014} = 0$ promatrani zbroj umnožaka iznosi -1.

Zaključujemo da se najmanja vrijednost zbroja umnožaka postiže ako nisu svi x_i jednaki 0. Dapače, pokazat ćemo da je je zbroj umnožaka najmanji ako nijedan x_i nije jednak 0.

Promotrimo niz kojem nisu svi elementi jednaki 0 i nisu svi elementi različiti od 0.

Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo $x_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$ i $x_{k+1} = \cdots = x_{2014} = 0$.

Neka je $S = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 2014} x_i x_j$.

Definirajmo $x_i' = x_i$ za $i \neq k+1$, te $x_{k+1}' = 1$, ako je $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leqslant 0$, odnosno $x_{k+1}' = -1$, ako je $x_1 + x_2 + \cdots + x_k > 0$.

Označimo li $S' = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 2014} x_i' x_j'$, vrijedi $S' \leqslant S$. Naime, x_{k+1}' smo odabrali tako da je

$$S' - S = x_{k+1}' \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i' = -|x_1' + \cdots + x_k'| \leqslant 0.$$

Time smo dokazali da za svaki niz $x_1, x_2, \ldots, x_{2014}$ u kojem je neki od $x_i = 0$, postoji drugi niz koji ima manje elemenata jednakih 0, a manji ili jednak pripadni zbroj umnožaka. Preostaje nam analizirati slučaj kada su svi članovi x_i jednaki 1 i -1.

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $x_1 = \cdots = x_k = 1$ i $x_{k+1} = \cdots = x_{2014} = -1$. Uočimo da je

$$S = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 2014} x_i x_j = \sum_{j=1}^{2014} x_j \cdot \sum_{i=j+1}^{2014} x_i.$$

Za $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ vrijedi

$$x_j \cdot \sum_{i=j+1}^{2014} x_i = \sum_{i=j+1}^{k} 1 + \sum_{i=k+1}^{2014} (-1) = 2k - j - 2014.$$

Za $j \in \{k+1, k+2, \ldots, 2014\}$ vrijedi

$$x_j \cdot \sum_{i=j+1}^{2014} x_i = \sum_{i=j+1}^{2014} (-1) = j - 2014.$$

Zbrajajući po svim mogućim j od 1 do 2014 dobivamo

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=1}^{k} (2k - j - 2014) + \sum_{j=k+1}^{2014} (2014 - j) \\ &= 2k^2 - \sum_{j=1}^{k} j - 2014k + 2014(2014 - k) - \sum_{j=k+1}^{2014} j \\ &= 2k^2 - 2014(2014 - 2k) - \sum_{j=1}^{2014} j \\ &= 2(k^2 - 2014k) - 2014^2 - \frac{2014 \cdot 2015}{2}. \end{aligned}$$

Izraz S će poprimiti najmanju vrijednost onda kad kvadratna funkcija $k^2 - 2014k$ poprima najmanju vrijednost, a to je za $k = 1007$. Tada je $S = -1007$.

Zadatak A-2.3.

Dokaži da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je broj $3^m + 3^n + 1$ kvadrat nekog prirodnog broja.

Rješenje.

Pretpostavimo da postoji k takav da $3^m + 3^n + 1 = k^2$. Uočimo da je k neparan broj. Vrijedi $3^m + 3^n = k^2 - 1$.

Kvadrat neparnog broja daje ostatak 1 pri dijeljenju s 8 (jer za prirodni broj a vrijedi $(2a-1)^2 = 4a(a-1) + 1$ i jedan od brojeva a i $a - 1$ je paran). To znači da 8 dijeli $k^2 - 1$. Budući da potencije broja 3 pri dijeljenju s 8 daju ostatke 1 i 3, broj $3^m + 3^n$ može davati ostatke 2, 4 i 6 pri dijeljenju s 8, što je kontradikcija.

Prema tome, $3^m + 3^n + 1$ ne može biti kvadrat prirodnog broja.

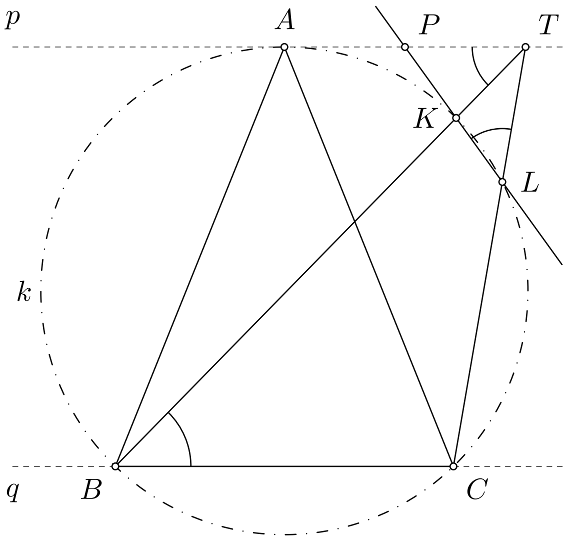
Zadatak A-2.4.

Neka su p i q dva paralelna pravca. Kružnica k dodiruje pravac p u točki A i siječe pravac q u različitim točkama B i C. Neka je T točka na pravcu p i neka dužine $\overline{TB}$ i $\overline{TC}$ sijeku kraći luk $\widehat{AC}$ redom u točkama K i L, različitima od B i C.

Dokaži da pravac KL prolazi polovištem dužine $\overline{AT}$.

Prvo rješenje.

Neka je točka P sjecište pravaca p i KL te $\sphericalangle TBC = x$.



Pravac BT je presječnica paralelnih pravaca p i q pa je $\sphericalangle BTA = \sphericalangle TBC = x$.

Četverokut $BCLK$ je tetivan, stoga vrijedi $\sphericalangle CLK = 180° - \sphericalangle KBC = 180° - \sphericalangle TBC = 180° - x$ pa je $\sphericalangle KLT = 180° - \sphericalangle CLK = x$.

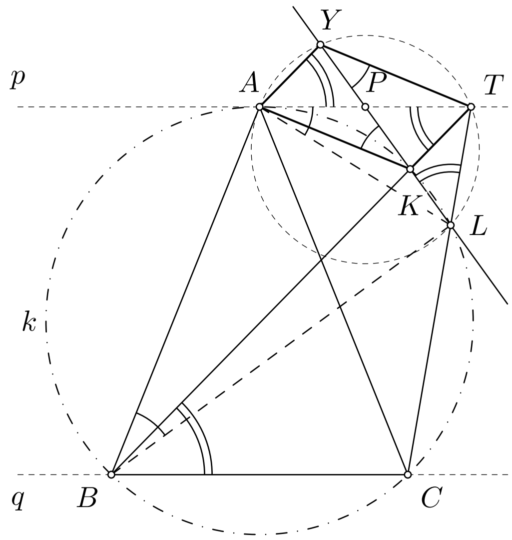
Trokuti PKT i PTL su slični jer imaju zajednički kut pri vrhu P te sukladne kutove $\sphericalangle KTP = \sphericalangle BTA = x$ i $\sphericalangle KLT = x$. Zato je

$$\frac{|PK|}{|PT|} = \frac{|PT|}{|PL|}, \quad \text{tj.} \quad |PK| \cdot |PL| = |PT|^2.$$

Budući da potencija točke P u odnosu na kružnicu k iznosi $|PK| \cdot |PL| = |PA|^2$, konačno dobivamo $|PA|^2 = |PT|^2$. Dakle, $|PA| = |PT|$, tj. točka P je polovište dužine $\overline{AT}$.

Drugo rješenje.

Neka je točka Y sjecište kružnice opisane trokutu ATL i pravca KL (različito od L).



Kako je četverokut $AYTL$ tetivan slijedi $\sphericalangle TYL = \sphericalangle TAL$. Zbog kuta između tetive $\overline{AL}$ i tangente p kružnice k vrijedi $\sphericalangle TAL = \sphericalangle ABL$, a budući da je i četverokut $AKLB$ tetivan, vrijedi $\sphericalangle ABL = \sphericalangle AKY$. Dobivamo da je $\sphericalangle TYL = \sphericalangle TYK = \sphericalangle AKY$ što povlači $AK \parallel YT$.

Iz tetivnog četverokuta $AYTL$ sada imamo $\sphericalangle YAT = \sphericalangle YLT$. Kako je četverokut $BKLC$ tetivan, vrijedi $\sphericalangle YLT = \sphericalangle KLT = \sphericalangle KBC = \sphericalangle TBC$. Budući da je BT presječnica pravaca p i q, vrijedi i $\sphericalangle TBC = \sphericalangle ATB$. Iz svega toga slijedi $\sphericalangle YAT = \sphericalangle ATB = \sphericalangle ATK$, što povlači $AY \parallel KT$.

Iz paralelnosti $AK \parallel YT$ i $AY \parallel KT$ dobivamo da je četverokut $AYTK$ paralelogram, pa pravac njegove dijagonale KL prolazi polovištem dužine $\overline{AT}$.

Zadatak A-2.5.

Sto kvadratnih omotnica različitih veličina raspoređeno je tako da se za svake dvije različite omotnice manja omotnica nalazi unutar veće ili su omotnice jedna izvan druge. Pritom se i u manjoj i u većoj omotnici mogu nalaziti i druge omotnice. Dva rasporeda smatramo različitima ako postoje dvije omotnice koje se u jednom rasporedu nalaze jedna unutar druge, a u drugom ne. Koliko ima različitih rasporeda u kojima se unutar najveće omotnice nalaze sve ostale?

Prvo rješenje.

Promotrimo isti problem s ukupno n omotnica te označimo s K_n traženi broj rasporeda.

Neka je dan jedan raspored n omotnica. Ako maknemo najmanju omotnicu, dobivamo raspored $n-1$ preostalih omotnica. S druge strane, ako nam je dan jedan mogući raspored preostalih $n-1$ omotnica, najmanju omotnicu možemo staviti u najveću omotnicu ili u bilo koju od preostalih $n-2$ omotnica. Dakle, K_n je točno $n-1$ puta veći od K_{n-1}.

Stoga je $K_n = (n-1) \cdot K_{n-1} = (n-1) \cdot (n-2) \cdot K_{n-2} = \cdots = (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot K_2$.

Kad imamo samo dvije omotnice, jedini mogući način je staviti manju unutar veće, pa je $K_2 = 1$. Stoga je traženi broj rasporeda $K_n = (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1$.

Za sto omotnica je broj različitih rasporeda $K_{100} = 99 \cdot 98 \cdots 1$, tj. umnožak prvih 99 prirodnih brojeva.

Drugo rješenje.

Označimo najveću omotnicu brojem 1, drugu najveću brojem 2, treću najveću brojem 3, ..., a najmanju brojem 100. Zamislimo da je na početku omotnica s brojem 1 prazna i promotrimo na koje sve načine možemo preostale omotnice staviti u nju poštujući pritom uvjete zadatka.

U prvom koraku omotnicu 2 možemo na samo jedan način staviti u omotnicu 1. Zatim omotnicu 3 možemo staviti ili unutar omotnice 2 ili izvan omotnice 2, a unutar omotnice 1. Dakle, ukupno na dva načina. Općenito, omotnicu k možemo staviti

- unutar omotnice $k-1$
- izvan omotnice $k-1$, a unutar omotnice $k-2$
- izvan omotnica $k-1$ i $k-2$, ali unutar omotnice $k-3$
- $\vdots$
- izvan svih ostalih omotnica osim omotnice 1.

To je ukupno $k-1$ načina.

Dakle, omotnice s brojevima 2, 3, ..., 100 možemo unutar omotnice 1 staviti na ukupno $1 \cdot 2 \cdots 99$ načina, što je ujedno i traženi broj rasporeda.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

Šibenik, 3. travnja 2014.

Zadatak A-3.1.

Neka je ABC jednakostranični trokut sa stranicama duljine 1. Točka X na polupravcu AB i točka Y na polupravcu AC odabrane su tako da su $|AX|$ i $|AY|$ prirodni brojevi.

Može li polumjer kružnice opisane trokutu AXY biti $\sqrt{2014}$?

Rješenje.

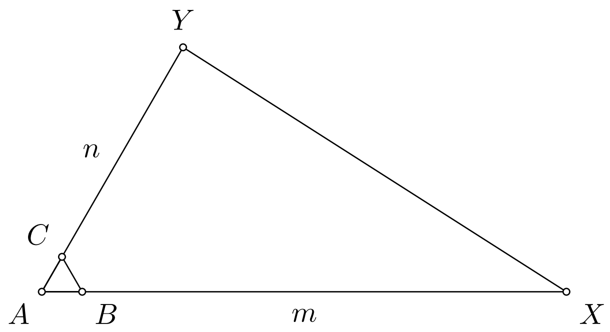
Pretpostavimo da je moguće da je polumjer kružnice opisane trokutu AXY jednak $\sqrt{2014}$.

U trokutu AXY kut nasuprot stranici $\overline{XY}$ iznosi $60°$ jer je trokut ABC jednakostraničan.

Ako je R polumjer kružnice opisane trokutu AXY, onda je

$$|XY| = 2R\sin 60° = \sqrt{2014}\cdot\sqrt{3}.$$

Označimo $|AX| = m$, $|AY| = n$, gdje su m i n prirodni brojevi.



Primjenom poučka o kosinusu na trokut AXY dobivamo $m^2 + n^2 - 2mn\cos 60° = |XY|^2$, odnosno

$$m^2 + n^2 - mn = 2014\cdot 3.$$

Primijetimo prvo da je desna strana jednakosti parna. Ako su m i n različite parnosti ili ako su oba neparna, onda je lijeva strana neparna, što je nemoguće.

Preostaje samo mogućnost da su i m i n parni brojevi. Tada je $m^2 + n^2 - mn$ djeljivo s 4, ali $2014\cdot 3$ nije, pa je i to nemoguće.

Dakle, početna pretpostavka je pogrešna, odnosno R ne može biti $\sqrt{2014}$.

Zadatak A-3.2.

Unutar šiljastokutnog trokuta ABC nalazi se točka P takva da je

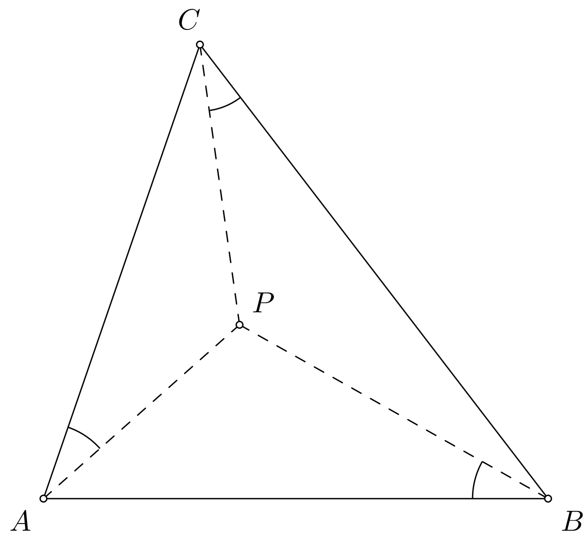
$$\sphericalangle APB = \sphericalangle CBA + \sphericalangle ACB, \qquad \sphericalangle BPC = \sphericalangle ACB + \sphericalangle BAC.$$

Dokaži da vrijedi

$$\frac{|AC| \cdot |BP|}{|BC|} = \frac{|BC| \cdot |AP|}{|AB|}.$$

Prvo rješenje.

Označimo $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$ i $\sphericalangle ACB = \gamma$.



Iz $\sphericalangle APB = \beta + \gamma$ i $\sphericalangle BPC = \gamma + \alpha$ slijedi

$$\sphericalangle CPA = 360° - \sphericalangle APB - \sphericalangle BPC = 360° - \beta - \gamma - \gamma - \alpha = \alpha + \beta.$$

Ako je $\sphericalangle PBA = x$, onda je $\sphericalangle BAP = 180° - \sphericalangle APB - \sphericalangle PBA = 180° - \beta - \gamma - x = \alpha - x$, te $\sphericalangle PAC = \sphericalangle BAC - \sphericalangle BAP = \alpha - (\alpha - x) = x$.

Analogno dobijemo $\sphericalangle ACP = \gamma - x$, $\sphericalangle PCB = x$ i $\sphericalangle CBP = \beta - x$.

Primjenom poučka o sinusima u trokutima ABP i BCP dobivamo

$$\frac{|AP|}{\sin x} = \frac{|AB|}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{|AB|}{\sin \alpha} \qquad \text{i} \qquad \frac{|BP|}{\sin x} = \frac{|BC|}{\sin(\gamma + \alpha)} = \frac{|BC|}{\sin \beta},$$

odakle zbog $\sin \alpha : \sin \beta = |BC| : |AC|$ slijedi

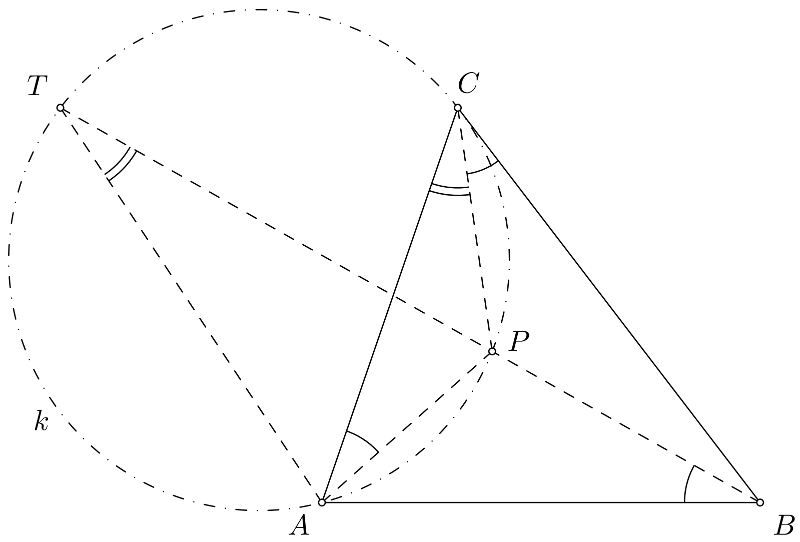
$$\frac{|BP|}{|AP|} = \frac{|BC| \sin \alpha}{|AB| \sin \beta} = \frac{|BC| \cdot |BC|}{|AB| \cdot |AC|},$$

odnosno

$$\frac{|AC| \cdot |BP|}{|BC|} = \frac{|BC| \cdot |AP|}{|AB|}.$$

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju uvedemo oznake $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$, te pokažemo da je $\sphericalangle CAP = \sphericalangle ABP = \sphericalangle BCP = x$. Tada je $\sphericalangle PAB = \alpha - x$, $\sphericalangle PBC = \beta - x$ i $\sphericalangle PCA = \gamma - x$.



Promotrimo kružnicu k opisanu trokutu APC. Kako je $\sphericalangle PCB = \sphericalangle PAC = x$, prema obratu teorema o kutu između tangente i tetive zaključujemo da je pravac BC tangenta te kružnice.

Neka pravac BP siječe kružnicu k u točkama P i T. Tada vrijedi

$$|BC|^2 = |BP| \cdot |BT|. \tag{$\clubsuit$}$$

Također, vrijedi $\sphericalangle ATB = \sphericalangle ATP = \sphericalangle ACP = \gamma - x$. Budući da vrijedi i $\sphericalangle ABT = \sphericalangle ABP = x = \sphericalangle CAP$, zaključujemo da su trokuti ABT i PAC slični.

Stoga vrijedi $|AB| : |BT| = |PA| : |AC|$, tj. $|BT| = \dfrac{|AB| \cdot |AC|}{|AP|}$.

Uvrštavanjem u ($\clubsuit$) dobivamo

$$|BC|^2 = |BP| \cdot \frac{|AB| \cdot |AC|}{|AP|},$$

što je ekvivalentno s tvrdnjom zadatka.

Zadatak A-3.3.

Postoje li prirodni brojevi m i n za koje su $m^2 + n$ i $n^2 + m$ kvadrati prirodnih brojeva?

Rješenje.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $m \geqslant n$. Očito, $m^2 < m^2 + n$. S druge strane, $(m+1)^2 = m^2 + 2m + 1 > m^2 + n$ jer je $2m > n$.

Dakle, imamo

$$m^2 < m^2 + n < (m+1)^2,$$

odnosno $m^2 + n$ je smješten između dva uzastopna kvadrata pa ne može biti kvadrat prirodnog broja. Ne postoje takvi prirodni brojevi m i n.

Zadatak A-3.4.

Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geqslant \frac{3a+2b-c}{4}.$$

Prvo rješenje.

Dodavanjem $\frac{a+b}{4}$ i $\frac{b+c}{4}$ na obje strane tražene nejednakosti, dobivamo

$$\left(\frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4}\right) + \left(\frac{b^2}{b+c} + \frac{b+c}{4}\right) \geqslant \frac{3a+2b-c}{4} + \frac{a+b}{4} + \frac{b+c}{4} = a+b.$$

Posljednja nejednakost slijedi iz A–G nejednakosti jer je

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geqslant a \qquad \text{i} \qquad \frac{b^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geqslant b.$$

Drugo rješenje.

Izraze na lijevoj strani dane nejednakosti ocijenimo na sljedeći način:

$$\frac{a^2}{a+b} \geqslant \frac{pa+qb}{4} \qquad \text{i} \qquad \frac{b^2}{b+c} \geqslant \frac{pb+qc}{4},$$

pri čemu je, da bismo dokazali danu nejednakost, potrebno naći koeficijente p i q takve da je $(pa+qb)+(pb+qc) = 3a+2b-c$. Brojevi za koje ova jednakost vrijedi za sve a, b, c su $p = 3$, $q = -1$. Preostaje nam dokazati nejednakost

$$\frac{x^2}{x+y} \geqslant \frac{3x-y}{4}$$

za sve pozitivne realne brojeve x i y.

Prethodna nejednakost je ekvivalentna nejednakostima

$$\begin{aligned} 4x^2 &\geqslant (3x-y)(x+y), \\ x^2 - 2xy + y^2 &\geqslant 0, \\ (x-y)^2 &\geqslant 0, \end{aligned}$$

a posljednja nejednakost očito vrijedi.

Treće rješenje.

Korištenjem Cauchy–Schwarz nejednakosti u Engel formi dobivamo da je

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geqslant \frac{(a+b)^2}{a+2b+c} = a+b - \frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c} \geqslant a+b - \frac{a+2b+c}{4} = \frac{3a+2b-c}{4}.$$

Ovdje zadnja nejednakost slijedi iz A–G nejednakosti jer je

$$\left(\frac{a+2b+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{(a+b)+(b+c)}{2}\right)^2 \geqslant (a+b)(b+c).$$

Četvrto rješenje.

Množimo danu nejednakost s $4(a+b)(b+c)$ i nakon sređivanja dobivamo

$$a^2b - ab^2 + a^2c + ac^2 - b^2c + bc^2 + 2b^3 - 4abc \geqslant 0,$$

a ta je nejednakost ekvivalentna s

$$b(a-c)^2 + (a+c-2b)(ac-b^2) \geqslant 0. \qquad (\diamondsuit)$$

Ako je $(a+c-2b)(ac-b^2) \geqslant 0$, nejednakost očito vrijedi.

Još treba dokazati nejednakost $(\diamondsuit)$ ako je $(a+c-2b)(ac-b^2) < 0$.

Utvrdimo najprije kada je ovaj umnožak negativan. Naizgled postoje dva slučaja, ali jedini mogući je

$$a+c-2b > 0, \quad b^2 > ac.$$

Tada je $b > \sqrt{ac}$ i $b < \dfrac{a+c}{2}$. Drugi slučaj otpada jer je $\sqrt{ac} < \dfrac{a+c}{2}$.

Dakle, nejednakost još nije dokazana samo u slučaju da se b nalazi između geometrijske i aritmetičke sredine brojeva a i c. Označimo $G = \sqrt{ac}$, $A = \frac{a+c}{2}$. Kako je $a+c = 2A$ i $ac = G^2$, nije teško pokazati da je nejednakost $(\diamondsuit)$ ekvivalentna s

$$2A^2b - Ab^2 + AG^2 - 3bG^2 + b^3 \geqslant 0,$$

uz uvjet $G < b < A$.

No, ta je nejednakost ekvivalentna s

$$Ab(A-b) + b(A^2 - G^2) + G^2(A-b) + b(b^2 - G^2) \geqslant 0$$

koja vrijedi jer je zbog $A > b > G$ vrijednost svake zagrade pozitivna.

Time je polazna nejednakost dokazana.

Zadatak A-3.5.

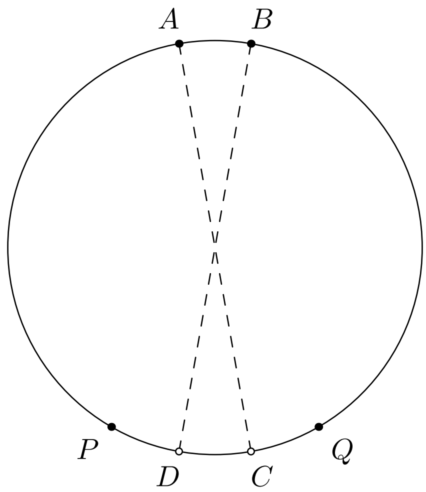
Na kružnici duljine $6N$ označeno je $3N$ točaka koje dijele tu kružnicu na ukupno $3N$ lukova: N lukova duljine 1, N lukova duljine 2 i N lukova duljine 3.

Dokaži da među označenim točkama postoje dvije koje su krajnje točke nekog promjera te kružnice.

Rješenje.

Danih $3N$ točaka nazovimo *vanjskim* točkama. Svaki od N lukova duljine 2 podijelimo na dva luka jednakih duljina jednom točkom, a svaki od N lukova duljine 3 podijelimo na tri jednaka dijela dvjema točkama. Tih novih $3N$ točaka nazovimo *unutarnjim* točkama. Ukupno unutarnjih i vanjskih ima $6N$ i one dijele kružnicu na $6N$ dijelova duljine 1. Zbog činjenice da je $6N$ paran broj zaključujemo da se dijametralno suprotno svakoj od tih $6N$ točaka nalazi također jedna od tih $6N$ točaka. Iz definicije unutarnjih točaka slijedi da ne postoje 3 uzastopne unutarnje točke.

Pretpostavimo suprotno tvrdnji zadatka da nikoje dvije od danih $3N$ vanjskih točaka nisu međusobno dijametralno suprotne. To znači da se dijametralno suprotno svakoj vanjskoj točki nalazi unutarnja točka. Kako vanjskih i unutarnjih točaka ima jednako, zaključujemo i da se dijametralno suprotno svakoj unutarnjoj točki nalazi vanjska točka.



Neka su A i B dvije proizvoljne vanjske točke koje čine luk duljine 1. Kao na slici, neka je točka C dijametralno suprotna točki A, a točka D dijametralno suprotna točki B. Nadalje, neka je točka P (različita od C) takva da je luk $\widehat{PD}$ duljine 1, te neka je točka Q (različita od D) takva da je luk $\widehat{CQ}$ duljine 1.

Točke A i B su vanjske točke pa su točke C i D unutarnje. Zbog činjenice da ne postoje 3 uzastopne unutarnje točke, zaključujemo da su točke P i Q vanjske. Dakle, nasuprot luka $\widehat{AB}$ duljine 1 se nalazi luk $\widehat{PQ}$ duljine 3. Kako lukova duljine 1 i 3 ima jednako, zaključujemo da vrijedi i obrat – nasuprot svakog luka duljine 3 nalazi se luk duljine 1.

Za $i \in \{1, 2, 3\}$, neka je L_i broj lukova duljine i unutar kraćeg luka $\widehat{AP}$ te neka je D_i broj lukova duljine i unutar kraćeg luka $\widehat{BQ}$.

Duljina luka $\widehat{AP}$ je $3N - 2$ pa stoga vrijedi jednakost:

$$L_1 + 2L_2 + 3L_3 = 3N - 2. \qquad (*)$$

Zaključili smo da se nasuprot svakog luka duljine 1 nalazi luk duljine 3 i obratno pa vrijedi:

$$D_1 = L_3. \qquad (**)$$

Ukupno ima N lukova duljine 1 pa vrijedi:

$$L_1 + D_1 = N - 1,$$

odnosno, zbog $(**)$:

$$L_1 + L_3 = N - 1. \qquad (***)$$

Oduzimanjem jednakosti $(***)$ od jednakosti $(*)$ dobijemo:

$$2L_2 + 2L_3 = 2N - 1,$$

no to je nemoguće jer je lijeva strana prethodne jednakosti paran broj, a desna strana neparan broj. Stoga zaključujemo da je naša pretpostavka bila pogrešna pa postoje dvije vanjske točke koje su međusobno dijametralno suprotne.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

Šibenik, 3. travnja 2014.

Zadatak A-4.1.

Za prirodni broj n označimo sa $s(n)$ zbroj njegovih pozitivnih djelitelja, a sa $d(n)$ broj njegovih pozitivnih djelitelja. Odredi sve prirodne brojeve n takve da vrijedi

$$s(n) = n + d(n) + 1.$$

Rješenje.

Primijetimo da $n = 1$ svakako nije rješenje, pa je $d(n) \geqslant 2$.

Također, nije moguće da vrijedi $d(n) = 2$ jer bi tada broj n bio prost i zadana jednadžba bi glasila $1 + n = n + 2 + 1$, pa je $d(n) \geqslant 3$.

Neka su $1 = D_1 < D_2 < \cdots < D_d = n$ djelitelji broja n. Početna jednadžba glasi

$$1 + \sum_{i=2}^{d(n)-1} D_i + n = n + d(n) + 1.$$

Budući da je $D_i \geqslant 2$ za sve $i \in \{2, 3, \ldots, d(n) - 1\}$, vrijedi $d(n) = \sum_{i=2}^{d(n)-1} D_i \geqslant (d(n) - 2) \cdot 2$, odakle je $d(n) \leqslant 4$, odnosno $3 \leqslant d(n) \leqslant 4$.

Za $d(n) = 3$ broj n je kvadrat nekog prostog broja p i početna jednadžba glasi

$$1 + p + p^2 = p^2 + 3 + 1,$$

odakle slijedi $p = 3$ i $n = p^2 = 9$.

Za $d(n) = 4$ imamo dvije mogućnosti.

a) Ako je n umnožak nekih prostih brojeva q i r ($q < r$), onda početna jednadžba glasi $1 + q + r + qr = qr + 4 + 1$, odakle je $q + r = 4$. Ne postoje takvi prosti brojevi q i r.

b) Ako je n kub nekog prostog broja s, onda početna jednadžba glasi $1+s+s^2+s^3 = s^3+4+1$, odakle je $s^2 + s - 4 = 0$. Ne postoji takav prirodni broj s.

Dakle, jedino rješenje je $n = 9$.

Zadatak A-4.2.

Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(x)f(y) = f(x+y) + xy.$$

Rješenje.

Uvrštavanjem $y = 0$ slijedi $f(x)f(0) = f(x)$ za sve realne brojeve x.

Ako bi vrijedilo $f(x) = 0$ za sve x, tada bi početna jednakost glasila $0 = 0 + xy$ za sve x, y, što je nemoguće. Dakle, mora vrijediti $f(0) = 1$.

Uvrštavanjem $x = 1$, $y = -1$ slijedi $f(1)f(-1) = f(0) - 1$, odnosno $f(1)f(-1) = 0$.

Ako je $f(1) = 0$ tada uvrštavanjem $y = 1$ u početnu jednadžbu dobivamo da $0 = f(x+1) + x$ za sve x, pa zamjenom $z = x + 1$ dobivamo da je $f(z) = 1 - z$ za sve z.

Analogno, ako je $f(-1) = 0$ uvrštavanjem $y = -1$ dobivamo da je $0 = f(x-1) - x$ za sve x, pa zamjenom $z = x - 1$ dobivamo da je $f(z) = 1 + z$ za sve z.

Uvrštavanjem vidimo da funkcije $f(x) = 1 - x$ i $f(x) = 1 + x$ zaista zadovoljavaju početnu jednadžbu, te su to tražena rješenja.

Zadatak A-4.3.

Dano je 2014 žetona koji su s jedne strane crne, a s druge bijele boje i ploča dimenzija 2014×1. Na početku se na svakom polju ploče nalazi po jedan žeton, okrenut na crnu ili na bijelu stranu. U svakom potezu dozvoljeno je ukloniti jedan žeton okrenut na crnu stranu i istovremeno preokrenuti žetone na susjednim poljima (ako nisu već uklonjeni).

Odredi sve početne rasporede žetona za koje je nizom takvih poteza moguće ukloniti sve žetone.

Rješenje.

Matematičkom indukcijom po broju žetona dokazat ćemo tvrdnju: Iz nekog početnoga rasporeda možemo ukloniti sve žetone ako i samo ako je u tom rasporedu neparan broj žetona okrenut na crnu stranu.

Ako je na ploči samo jedan žeton, možemo ga ukloniti ako i samo ako je okrenut na crnu stranu.

Za prirodni broj $N > 1$, pretpostavimo da je tvrdnja istinita za sve rasporede koji se sastoje od manje od N žetona i promotrimo proizvoljan početni raspored od N žetona. Neka je K broj žetona u tom rasporedu koji su okrenuti na crnu stranu.

Primijetimo da se uklanjanem nekog žetona ploča razdvaja u dva dijela te da potezi na jednom od ta dva dijela ne utječu na žetone drugog dijela.

Ako je K neparan broj, dokazat ćemo da je moguće ukloniti sve žetone. Neka je Y prvi žeton na ploči koji je okrenut na crnu stranu. Pretpostavimo da Y nije ni na prvom ni na zadnjem mjestu ploče, te nazovimo X žeton na polju ispred Y, a Z žeton na polju iza Y. U prvom potezu uklonimo Y i polje ploče na kojem se nalazi Y (te preokrenemo X i Z). Na taj način ćemo dobiti dvije manje ploče. Pokazat ćemo da sa svake od njih možemo ukloniti sve žetone. Na prvoj ploči se nalaze svi žetoni koji su ispred Y, a na drugoj ploči svi žetoni koji se nalaze iza Y.

Na prvoj ploči su svi žetoni okrenuti na bijelu stranu, osim X kojeg smo upravo okrenuli na crnu stranu. Dakle, na prvoj ploči je točno jedan žeton okrenut na crnu stranu, pa prema pretpostavci indukcije postoji niz poteza kojim možemo ukloniti sve žetone s te ploče.

Ako je Z okrenut na bijelu stranu, onda će nakon poteza broj žetona na drugoj ploči koji su okrenuti na crnu stranu biti jednak K. Ako je Z okrenut na crnu stranu, onda će nakon poteza broj žetona na drugoj ploči koji su okrenuti na crnu stranu biti $K-2$. U oba slučaja broj žetona na drugoj ploči je neparan. Prema pretpostavci indukcije zaključujemo da možemo ukloniti sve žetone i s druge ploče.

Ako je Y prvo polje ploče, onda promatramo samo drugu ploču i žeton Z, a ako je Y zadnje polje ploče, onda promatramo samo prvu ploču i žeton X.

Pretpostavimo da je K paran broj i da za promatrani početni raspored postoji niz poteza kojim možemo ukloniti sve žetone. Neka je Y žeton kojeg uklanjamo u prvom potezu. Uz žeton Y, na ploči se prije tog poteza nalazio neparan broj žetona okrenutih na crnu stranu. Ukupan broj žetona okrenutih na crnu stranu na dva dijela ploče nakon poteza će i dalje biti neparan broj. Stoga se na jednom dijelu ploče nalazi paran broj žetona okrenutih na crnu stranu. Prema pretpostavic indukcije, žetoni s tog dijela ploče se ne mogu ukloniti, pa dolazimo do kontradikcije. Time smo pokazali da ako je moguće ukloniti sve žetone, onda broj žetona okrenutih na crnu stranu ne može biti paran.

Zadatak A-4.4.

Neka su a, b i c duljine stranica trokuta opsega 1. Dokaži da vrijedi

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}<1+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Rješenje.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $a \geqslant b \geqslant c$.

Tada iz nejednakosti trokuta i jednakosti $a+b+c=1$ slijedi $a<b+c=1-a$, odnosno $a<\frac{1}{2}$.

Zbog $b \leqslant a$ vrijedi $\sqrt{a^2+b^2} \leqslant \sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Zbog $c \leqslant b$ vrijedi $b^2+c^2 \leqslant b^2+bc<b^2+bc+\frac{c^2}{4}=\left(b+\frac{c}{2}\right)^2$, odnosno $\sqrt{b^2+c^2}<b+\frac{c}{2}$.

Analogno slijedi $\sqrt{a^2+c^2}<a+\frac{c}{2}$.

Zbrajanjem dobivenih nejednakosti slijedi

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}<\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(b+\frac{c}{2}\right)+\left(a+\frac{c}{2}\right)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zadatak A-4.5.

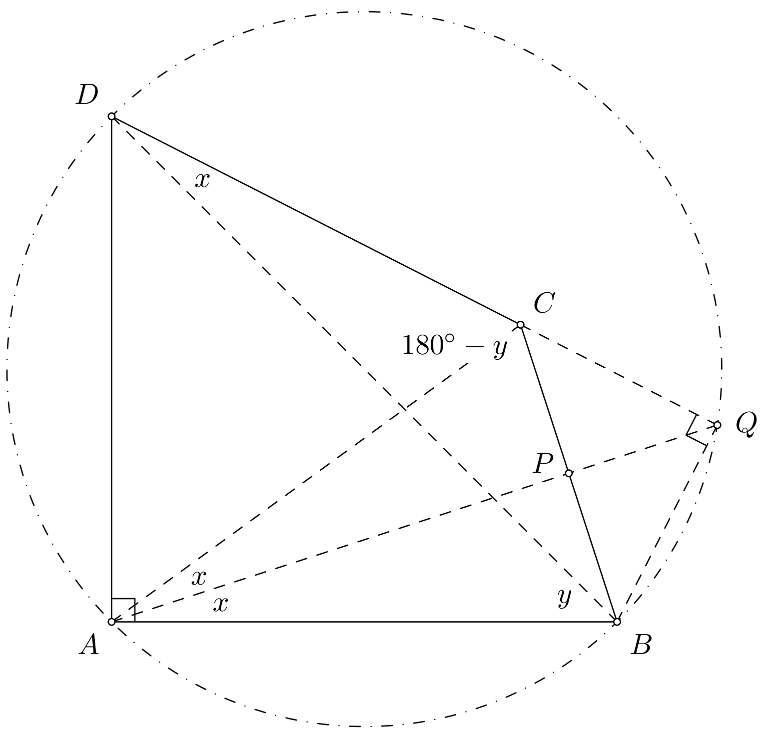
Neka je $ABCD$ konveksni četverokut takav da vrijedi

$$\sphericalangle BAD = 90^\circ, \qquad \sphericalangle BAC = 2\sphericalangle BDC \quad \text{i} \quad \sphericalangle DBA + \sphericalangle DCB = 180^\circ.$$

Odredi mjeru kuta $\sphericalangle DBA$.

Prvo rješenje.

Neka je $\sphericalangle BDC = x$ i $\sphericalangle DBA = y$. Tada je $\sphericalangle BAC = 2x$. Neka su točke P i Q redom sjecišta simetrale kuta $\sphericalangle BAC$ s dužinom $\overline{BC}$ i polupravcem DC.



Tada je $\sphericalangle BAQ = \sphericalangle BDQ = x$, pa je četverokut $ABQD$ tetivan. Budući da je $\sphericalangle BAD$ pravi i kut $\sphericalangle DQB$ je također pravi.

Obodni kutovi $\sphericalangle DQA$ i $\sphericalangle DBA$ nad tetivom $\overline{AD}$ su jednaki, tj. $\sphericalangle DQA = y$, te je $\sphericalangle AQB = 90^\circ - y$.

Budući da je $\sphericalangle BCQ = 180^\circ - \sphericalangle DCB = y = \sphericalangle DQA$, trokut PQC je jednakokračan i vrijedi $|PQ| = |PC|$.

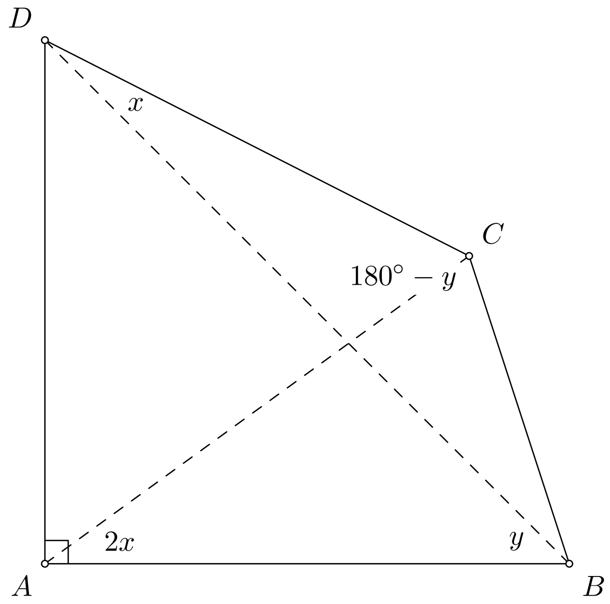
Imamo i $\sphericalangle QBP = \sphericalangle QPC - \sphericalangle PQB = 180^\circ - 2y - (90^\circ - y) = 90^\circ - y = \sphericalangle AQB$, pa je i trokut PBQ jednakokračan i vrijedi $|PB| = |PQ|$.

Dakle, točka P je polovište dužine $\overline{BC}$, pa prema obratu poučka o simetrali kuta $\sphericalangle BAC$ vrijedi $|AB| = |AC|$.

Stoga je $90^\circ = \sphericalangle APB = \sphericalangle QPC = 180^\circ - 2y$, odakle slijedi $\sphericalangle DBA = y = 45^\circ$.

Drugo rješenje.

Neka je $\sphericalangle BDC = x$ i $\sphericalangle DBA = y$. Tada je $\sphericalangle BAC = 2x$, $\sphericalangle ADB = 90° - y$, $\sphericalangle ADC = 90° - y + x$, $\sphericalangle CAD = 90° - 2x$, $\sphericalangle CBD = 180° - \sphericalangle DCB - \sphericalangle BDC = y - x$ i $\sphericalangle CBA = 2y - x$.



Primjenom poučka o sinusima u trokutima ABC i ACD dobivamo

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{\sin(2y - x)}{\sin 2x} \qquad \text{i} \qquad \frac{|AC|}{|DC|} = \frac{\sin(90° - y + x)}{\sin(90° - 2x)} = \frac{\cos(y - x)}{\cos 2x},$$

odakle je

$$\frac{|DC|}{|BC|} = \frac{\sin(2y - x)\cos 2x}{\cos(y - x)\sin 2x}.$$

Primjenom poučka o sinusima u trokutu BCD dobivamo $\dfrac{|DC|}{|BC|} = \dfrac{\sin(y - x)}{\sin x}$, pa je

$$\frac{\sin(2y - x)\cos 2x}{\cos(y - x)\sin 2x} = \frac{\sin(y - x)}{\sin x}.$$

Transformacijom posljednje jednadžbe redom dolazimo do

$$\begin{gathered}
\cos 2x \sin x \sin(2y - x) = \sin 2x \sin(y - x)\cos(y - x), \\
\cos 2x \sin x \sin(2y - x) = 2\sin x \cos x \sin(y - x)\cos(y - x), \\
\cos 2x \sin x \sin(2y - x) = \sin x \cos x \sin(2y - 2x), \\
\sin x\,[\cos 2x \sin(2y - x) - \cos x \sin(2y - 2x)] = 0, \\
\sin x\,[\sin(x + 2y) - \sin(2y - x)] = 0, \\
2\sin x \cos 2y \sin x = 0, \\
\sin^2 x \cos 2y = 0.
\end{gathered}$$

Budući da je $0° < 2x < 90°$, odnosno $0° < x < 45°$, ne može biti $\sin x = 0$.

Preostaje $\cos 2y = 0$, odakle zbog $0° < y < 90°$, odnosno $0° < 2y < 180°$ slijedi $2y = 90°$.

Dakle, $\sphericalangle DBA = y = 45°$.