DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Dubrovnik, 2.travnja-4.travnja 2013.

5. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. 50 jaja po novoj cijeni plaćeno je $50 \cdot 30 = 1500$ lp više nego da su kupljeni po staroj cijeni.
   Za taj iznos se po staroj cijeni moglo kupiti još $60 - 50 = 10$ jaja.
   Dakle, $1500 : 10 = 150$ lp je stara cijena jednog jajeta,
   a $150 + 30 = 180$ lp je nova cijena jednog jajeta.

2. Ako Ana sada ima x godina, onda Lana ima $2x$ godina.

   Za godinu dana Ana će imati $x + 1$ godinu, Lana $2x + 1$ godinu, a Jelena će imati $3x + 3$ godine.

   Sve tri zajedno će imati 29 godina pa je

$$x + 1 + 2x + 1 + 3x + 3 = 29$$

$$6x + 5 = 29$$

$$6x = 24$$

$$x = 4.$$

   Dakle, Ana sada ima 4, Lana 8, a Jelena 14 godina.

   Za y godina će tri sestre zajedno imati 4 puta više godina od Ane. Ana će imati $4 + y$ godina, a sve tri sestre zajedno $26 + 3y$ godina. Tada će vrijediti

$$4 \cdot (4 + y) = 26 + 3y.$$

   Slijedi da je $y = 10$.

   Za 10 godina će tri sestre zajedno imati 4 puta više godina nego što će imati Ana.

3. Traži se koliko ima brojeva oblika $\overline{abc}$ za koje je $a = b + c$.

To su sljedeći brojevi:

101, 110

211, 202, 220

312, 321, 330, 303

413, 431, 422, 404, 440

....

Traženih brojeva ima 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 54.

4. Kako je od tri uzastopna broja jedan djeljiv s 3, onda je i umnožak djeljiv s 3 te znamenka a može biti 2, 5 ili 8.
Vrijedi $2124=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot59$, $2154=2\cdot3\cdot359$ i $2184=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot7\cdot13$.
Samo se broj 2184 može prikazati kao umnožak tri uzastopna broja i to
$2184 =2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot7\cdot13 =12\cdot13\cdot14$.
Dakle, $a =8$.

5. Kako je D(825,605) = 5 · 11 = 55, zaključujemo da je najveća moguća duljina stranice kvadratne pločice 55 cm.

Budući da je 825 : 55 = 15 (broj pločica po dužini dna bazena) i 605 : 55 = 11 (broj pločica po širini dna bazena), zaključujemo da je ukupni broj traženih kvadratnih pločica 15 · 11 = 165.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Dubrovnik, 2.travnja-4.travnja 2013.

6. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Od rođenja do današnjeg dana svi su ostarili jednak broj godina pa su onda

$(100-50):3=50:3=16\frac{2}{3}$ moje godine starosti.

Do 17. rođendana nedostaje $\frac{1}{3}$ godine odnosno 4 mjeseca.

2. Iz $\frac{4}{9}<\frac{a}{7}\Rightarrow a>\frac{28}{9}$.

Iz $\frac{b}{5}<\frac{4}{9}\Rightarrow b<\frac{20}{9}$.

Dakle, $b\in\{1,2\}$.

Za $b=1$ vrijedi $\frac{a+1}{16}<\frac{1}{5}$ odnosno $a<\frac{11}{5}$ što je nemoguće jer je $a>\frac{28}{9}$.

Za $b=2$ vrijedi $\frac{a+2}{16}<\frac{2}{5}$ odnosno $a<\frac{22}{5}$. Dakle, $\frac{28}{9}<a<\frac{22}{5}$ pa je $a=4$.

Na kraju, $a+b=6$.

3. Neka su to brojevi $\frac{a}{b}$ i $\frac{b}{a}$ i $\frac{a}{b}>\frac{b}{a}$. Kako je njihova razlika pozitivna, vrijedi

$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=3\frac{29}{90}$ odnosno $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{299}{90}=\frac{-299}{-90}$.

Zajednički je nazivnik je $a\cdot b=90$ ili $a\cdot b=-90$.

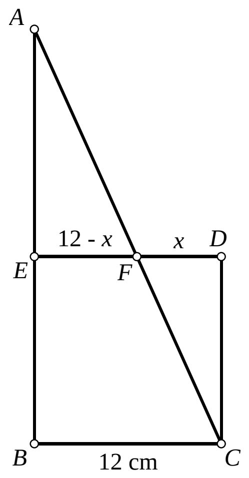
Vrijedi $90=90\cdot 1=45\cdot 2=30\cdot 3=18\cdot 5=15\cdot 6=10\cdot 9$

i $-90=-1\cdot 90=-2\cdot 45=-3\cdot 30=-5\cdot 18=-6\cdot 15=-9\cdot 10$.

Ispitivanjem svakog od navedenih slučajeva dolazimo do rješenja.

To su brojevi $\frac{18}{5}$ i $\frac{5}{18}$ te $-\frac{5}{18}$ i $-\frac{18}{5}$.

4.



Površina kvadrata $BCDE$ jednaka je $P_{\square BCDE} = 12 \cdot 12 = 144$ cm^2.

Budući da je površina trokuta ABC dvostruko veća od površine kvadrata $BCDE$, vrijedi da je

površina trokuta ABC jednaka $P_{\Delta ABC} = 2 \cdot 144 = 288$ cm^2.

Trokut ABC je pravokutan pa je njegova površina jednaka $P_{\Delta ABC} = \frac{|AB| \cdot |BC|}{2}$ odakle slijedi

$|AB| = 48$ cm.

Ali, $|AB| = |AE| + |EB|$ pa je $|AE| = 36$ cm.

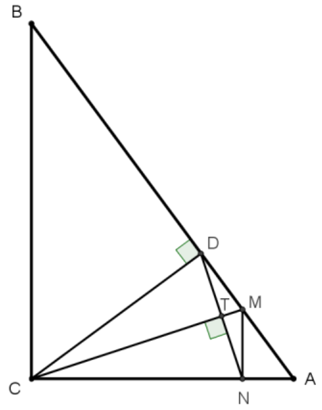
Vrijedi $P_{\square BCFE} = P_{\square BCDE} - P_{\Delta CDF} = 144 - 12 \cdot x : 2 = 144 - 6x$,

ali vrijedi i $P_{\square BCFE} = P_{\Delta ABC} - P_{\Delta AEF} = 288 - 36 \cdot (12 - x) : 2 = 72 + 18x$.

Slijedi $144 - 6x = 72 + 18x$ odnosno $x = 3$ cm.

Na kraju, $P_{\square BCFE} = 144 - 6x = 144 - 18 = 126$ cm^2.

5.



Iz zadanih uvjeta $|CD| = |CN|$ i $|\sphericalangle DTC| = |\sphericalangle CTN|$=90° te $\overline{CT}$ zajednička stranica prema

poučku S-S-K> o sukladnosti slijedi $\Delta CTD \cong \Delta CTN$.

Iz sukladnosti slijedi $|\sphericalangle TCD| = |\sphericalangle NCT|$.

Dakle, $|\sphericalangle MCD| = |\sphericalangle NCM|$, $|CD| = |CN|$ i $\overline{CM}$ zajednička stranica pa prema

poučku S-K-S o sukladnosti slijedi $\Delta CMD \cong \Delta CMN$.

Iz sukladnosti slijedi $|\sphericalangle CNM| = |\sphericalangle CDM| = 90°$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Dubrovnik, 2.travnja-4.travnja 2013.

7. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je x dio zarade trećeg, četvrtog i petog radnika.

Tada je $\frac{2}{5}x$ dio zarade prvog i drugog radnika te vrijedi

$$\frac{2}{5}x + x = 21000$$

$$\frac{7}{5}x = 21000$$

$$x = 15000$$

$$\frac{2}{5}x = 6000.$$

Označimo li zarade radnika redom a, b, c, d, e, onda iz $a : b = 3 : 2$ slijedi $a = 3k$, $b = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.

Kako je $a + b = 6000$, onda je $3k + 2k = 6000$ te je $k = 1200$.

Prvi je radnik zaradio $a = 3 \cdot 1200 = 3600$ kn, a drugi je radnik zaradio $b = 2 \cdot 1200 = 2400$ kn.

Slično tome, za preostalu trojicu radnika iz $c : d : e = 3 : 5 : 4$ slijedi $c = 3l$, $d = 5l$, $e = 4l$, $l \in \mathbb{N}$.

Kako je $c + d + e = 15000$, onda je $3l + 5l + 4l = 15000$ te je $l = 1250$.

Prema tome, treći je radnik zaradio $c = 3 \cdot 1250 = 3750$ kn, četvrti je radnik zaradio

$d = 5 \cdot 1250 = 6250$ kn i peti je radnik zaradio $e = 4 \cdot 1250 = 5000$ kn.

2. Vrijedi $\frac{149}{33} = \frac{m}{3} + \frac{n}{11}$, pri čemu su m i n prosti brojevi.

Dalje je $11m + 3n = 149$

$$3n = 149 - 11m$$

$$n = \frac{149 - 11m}{3} = \frac{147 - 12m + 2 + m}{3} = 49 - 4m + \frac{2 + m}{3}$$

$$n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2+m}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2+m = 3k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m = 3k-2, k \in \mathbb{Z}$$

$$n = 49 - 12k + 8 + k = 57 - 11k, k \in \mathbb{Z}.$$

S obzirom da su m i n prirodni brojevi, onda je $3k - 2 > 0$ i $57 - 11k > 0$.

Slijedi $k > \frac{2}{3}$ i $k < \frac{57}{11}$ što znači $k \in \{1,2,3,4,5\}$.

Za $k = 1$ je $m = 1$, $n = 46$ što nisu prosti brojevi.

Za $k = 2$ je $m = 4$, $n = 35$ što nisu prosti brojevi.

Za $k = 3$ je $m = 7$, $n = 24$, a broj 24 nije prost broj.

Za $k = 4$ je $m = 10$, $n = 13$, a broj 10 nije prost broj.

Za $k = 5$ je $m = 13$, $n = 2$.

Traženi zapis je $\frac{149}{33} = \frac{13}{3} + \frac{2}{11}$.

3. Za površinu P trokuta ABC vrijedi $P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$.

Dakle, $v_a = \frac{2P}{a}$ i $v_b = \frac{2P}{b}$.

Kako je $a < b$, onda je $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ pa je $v_a > v_b$ odnosno $v_a - v_b > 0$.

Također, vrijedi $a = \frac{2P}{v_a}$, $b = \frac{2P}{v_b}$, $c = \frac{2P}{v_c}$.

Prema nejednakosti trokuta slijedi $c + a > b$ odnosno $c > b - a$.

Dalje je $\frac{2P}{v_c} > \frac{2P}{v_b} - \frac{2P}{v_a}$

$$\frac{1}{v_c} > \frac{1}{v_b} - \frac{1}{v_a}$$

$$\frac{1}{v_c} > \frac{v_a - v_b}{v_a \cdot v_b}$$

$$v_c < \frac{v_a \cdot v_b}{v_a - v_b}$$

4. Broj je djeljiv s 1000 ako je njegov troznamenkasti završetak 000.

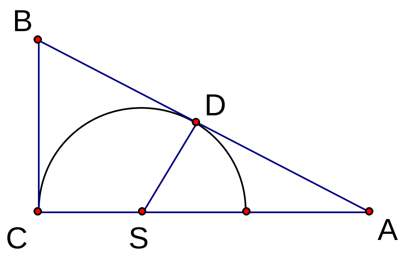
U 1. mogućem slučaju među ova 502 broja postoje dva s jednakim troznamenkastim završetkom. Tada je njihova razlika djeljiva s 1000 i time smo utvrdili postojanje traženih brojeva.

U 2. mogućem slučaju među ova 502 broja ne postoje dva s jednakim troznamenkastim završetkom. Primijetimo da ima 499 parova troznamenkastih završetaka čiji je zbroj 1000 i to su (001,999), (002,998), (003,997), …, (498,502), (499,501) i još 2 troznamenkasta završetka 000 i 500.

Ako su među ova 502 broja jedan broj sa završetkom 000 i jedan broj sa završetkom 500, preostane još 500 brojeva s nekim drugačijim završetkom. Tada postoje dva broja koji pripadaju istom paru čiji je zbroj 1000 te smo time utvrdili postojanje traženih brojeva.

Ako među ova 502 broja samo jedan broj ima završetak ili 000 ili 500 ili niti jedan, analogno slijedi da postoje dva broja koji pripadaju istom paru čiji je zbroj 1000 te smo time utvrdili postojanje traženih brojeva.

5.



Neka je $|CS| = |SD| = r$.

Tada je $|AS| = b - r$.

Kako je *AB* tangenta polukružnice u točki *D*, onda je $\overline{SD} \perp \overline{AB}$.

Dakle, vrijedi $|\sphericalangle SDA| = 90° = |\sphericalangle ACB|$ i $|\sphericalangle DAS| = |\sphericalangle BAC|$ pa prema poučku K-K o sličnosti slijedi $\Delta DAS \sim \Delta CAB$.

Iz sličnosti slijedi $|AS| : |AB| = |SD| : |BC|$ odnosno $(b - r) : c = r : a$ pa je

$c \cdot r = (b - r) \cdot a$ i na kraju $r = \dfrac{ab}{a + c}$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Dubrovnik, 2.travnja-4.travnja 2013.

8. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Vrijedi:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{25}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2013^2}\right)=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2013^2}\right)=$$

$$=\left(1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\cdot\left(1^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)\cdot\left(1^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)\cdot\left(1^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(1^2-\left(\frac{1}{2013}\right)^2\right)=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2013}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2013}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2012}{2013}\cdot\frac{2014}{2013}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2014}{2013}=$$

$$=\frac{1007}{2013}.$$

2. Neka je zadan niz brojeva $1, 2, 3, \ldots, m-1, m, m+1, \ldots, n-1, n$ te neka je m najmanji, a n najveći broj iz niza koji zadovoljava uvjet iz zadatka.

Vrijedi $\dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{(m-1)m}{2}=2012$ odnosno $\dfrac{(n+m)(n-m+1)}{2}=2012$

pa je $(n+m)\cdot(n-m+1)=4024=2\cdot 2\cdot 2\cdot 503$.

Kako je zbroj $(n+m)+(n-m+1)=2n+1$ odnosno neparan, a umnožak tih istih brojeva je paran broj, ti brojevi su suprotne parnosti.

Iz $m+n > n-m+1$ slijedi:

a) $m+n=4024$ i $n-m+1=1$

pa je $2n = 4024$ odnosno $n = 2012$, $m = 2012$

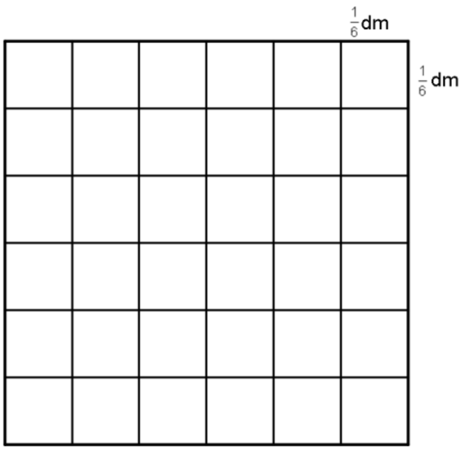
što nije rješenje jer je to samo jedan broj.

b) $m + n = 503$ i $n - m + 1 = 8$

pa je $2n + 1 = 511$ odnosno $n = 255$, $m = 248$

te je traženo rješenje 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255.

3. Razdijelimo kvadrat na sljedeći način:



Tako se dobije 36 kvadrata sa stranicama duljine $\frac{1}{6}$ dm.

Kako je $110 = 36 \cdot 3 + 2$, onda postoji kvadrat stranice duljine $\frac{1}{6}$ dm unutar kojeg se nalaze barem 4 točke.

Neka je d duljina dijagonale kvadrata unutar kojeg se nalaze barem 4 točke.

Tada vrijedi $d^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2$ odnosno $d = \frac{\sqrt{2}}{6}$ dm.

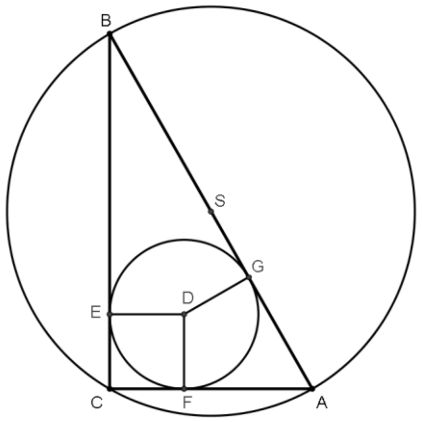
To znači da opisana kružnica kvadrata unutar kojeg se nalaze barem 4 točke ima polumjer

$r = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}$ dm.

S obzirom da je $\frac{\sqrt{2}}{12} < \frac{1}{8}$, jer je $\frac{2}{144} < \frac{1}{64}$, onda koncentrična kružnica s opisanom kružnicom, a

čiji je polumjer $\frac{1}{8}$ dm, omeđuje krug u kojem se nalaze barem 4 točke.

4.



Prema oznakama na slici vrijedi

$|AC| = b, |BC| = a, |AB| = c = 20$ cm,

$|CF| = |CE| = |ED| = |DF| = r$, $|AF| = |AG| = b - r$, $|BE| = |BG| = a - r$.

Iz svojstva pravokutnog trokuta slijedi $R = \frac{c}{2} = 10$ cm.

Iz omjera $r : R = 2 : 5$ slijedi $r = 4$cm.

Nadalje je $|AB| = |AG| + |GB| = b - r + a - r = 20$ pa je $a + b = 20 + 2r = 28$ cm.

Za opseg O trokuta ABC vrijedi $O = (a + b) + c = 28 + 20 = 48$ cm.

Kako je $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ i $a^2 + b^2 = c^2$ vrijedi

$2ab = (a+b)^2 - c^2$ odnosno $2ab = 384$ pa je $ab = 192$.

Za površinu P trokuta ABC vrijedi $P = \frac{ab}{2} = 96\,\text{cm}^2$.

5. Površina peterokuta *ABNMD'* može se izračunati tako da se od površine pravokutnika *ABCD* oduzme površina trokuta *ANM*.

Kako su točke D i D' osnosimetrične s obzirom na MN, vrijedi $|D'M| = |MD|$.

Neka je $x = |MD|$.

Tada je $|AM| = 16 - x$ i $|D'M| = x$.

Budući da je $\Delta AMD'$ pravokutan, prema Pitagorinom poučku slijedi $(16-x)^2 = 4^2 + x^2$

odnosno $x = 7.5$ cm.

Dakle, $|AM| = 8.5$ cm.

Vrijedi $P_{\Delta ANM} = \frac{|AM|\cdot|AB|}{2} = \frac{8.5\cdot 4}{2} = 17\text{ cm}^2$ i $P_{\square ABCD} = |AB|\cdot|BC| = 4\cdot 16 = 64\text{ cm}^2$

pa je $P_{ABNMD'} = P_{\square ABCD} - P_{\Delta ANM} = 64 - 17 = 47\text{ cm}^2$.