Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

29. siječnja 2015.

1. Koji je razlomak veći,

$$\frac{22222221}{22222223} \text{ ili } \frac{33333331}{33333334}?$$

Dokažite.

2. Rastavite na linearne faktore $(x-1)(x-2)(x-3)+(x-1)(x-2)+1-x$.

3. Svaki od 28 učenika posjetio je barem jednu od tri države. Broj učenika koji je posjetio samo Italiju i Španjolsku jednak je broju učenika koji su posjetili samo Italiju. Niti jedan učenik nije posjetio samo Španjolsku i niti jedan samo Grčku. Šest je učenika posjetilo Grčku i Italiju, ali ne i Španjolsku. Broj učenika koji je posjetio samo Grčku i Španjolsku je pet puta veći od onih koji su posjetili sve tri zemlje. Ako je broj učenika koji su posjetili sve tri zemlje paran i različit od nule, koliko je učenika posjetilo samo Italiju?

4. Točke F, G i H pripadaju stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC. Točka F je između točaka A i G, a točka H između točaka G i B. Mjera kuta CAB iznosi $5°$, a $|BH| = |BC|, |HG| = |HC|, |GF| = |GC|, |FA| = |FC|$. Kolika je mjera kuta ABC?

5. Ivo i Ana oboje su pili limunadu u kinu i gledali film. Ivo je uzeo srednju veličinu, a Ana veliku koja je za 50% veća od srednje. Nakon što su oboje popili $\frac{3}{4}$ svoje limunade, Ana je dala Ivi jednu trećinu od onog što je njoj ostalo i još 0.5 dl. Nakon što je film završio i svu su limunadu popili, ustanovili su da su oboje popili istu količinu limunade. Koliko su decilitara limunade zajedno popili?

* * *

6. Zbroj znamenaka troznamenkastog broja je 17. Znamenka desetica je 9. Ako znamenke stotica i jedinica zamijene mjesta, novi je broj za 100 veći od dvostrukog prvog broja. Koji je prvi broj?

7. Dokažite da je izraz $n^4 + 7(7 + 2n^2)$ djeljiv sa 64 za svaki neparni broj n.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

29. siječnja 2015.

1. Odredite za koju vrijednost varijable x izraz $(3ax+2015)^2+(2ax+2015)^2$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ima najmanju vrijednost i koliko iznosi ta najmanja vrijednost?

2. Svima je poznato da Pinokiu raste nos kada laže. Što dulje i brže Pinokio laže, to mu nos više raste. Jednog dana Pinokio Piko je toliko dugo lagao da mu je nos narastao 54 mm. Pinokio Niko je lagao toliko dugo da mu je nos narastao 6 mm. Piko je lagao 4 minute dulje nego Niko. Da je Piko lagao koliko Niko, a Niko koliko i Piko nosovi bi im jednako narasli. Odredite koliko bi dugo svaki od njih trebao lagati da im jednako narastu nosovi te koliko bi im u tom slučaju narasli nosovi.

3. Neka je

$$x=\frac{2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt[4]{3}+1)(\sqrt[8]{3}+1)(\sqrt[16]{3}+1)}.$$

Odredite $(x+1)^{64}$.

4. Dokažite da jednadžba $5x^2-4y^2=2015$ nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

5. U trokutu ABC na stranici $\overline{AB}$ nalazi se točka D tako da je $|AD|:|DB|=3:4$. Na dužini $\overline{CD}$ nalazi se točka E tako da je $|CE|:|ED|=3:4$. Paralela s pravcem AE prolazi točkom D i siječe $\overline{BC}$ u točki G. Odredite omjer $|CG|:|GB|$.

* * *

6. Jednadžbe $|z-2a|=|z-a|$ i $|z-3ai|=|z-ai|$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, određuju skupove točaka u Gaussovoj ravnini koji s koordinatnim osima zatvaraju lik površine 75 kvadratnih jedinica. Izračunajte opseg tog lika.

7. Odredite vrijednost realnog parametra m tako da rješenja jednadžbe

$$(mx-1)\cdot x=mx-2$$

predstavljaju duljine kateta pravokutnog trokuta s hipotenuzom duljine $\frac{5}{6}$.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

29. siječnja 2015.

1. Odredite vrijednost izraza $A = 1 + \operatorname{tg} 35^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 10^\circ$.

2. Prva znamenka nekog četveroznamenkastog broja za jedan je veća od njegove treće znamenke, a druga znamenka jednaka je zbroju preostalih znamenaka. Zadnja znamenka tog broja je za pet manja od prve znamenke. Odredite taj četveroznamenkasti broj.

3. Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije

$$f(x) = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}.$$

4. Riješite jednadžbu

$$\frac{\sin(x - \frac{2015\pi}{2}) - \cos^3 x}{\sin(2x + 2015\pi)} = \frac{1}{2}.$$

5. Koji od pravokutnih trokuta s cjelobrojnim stranicama i jednom katetom duljine 1000 cm ima najveći mogući opseg?

* * *

6. Odredite sve vrijednosti parametra $m \in \mathbb{R}$ tako da jednadžba

$$\log_{x+m}(x^3 - 9x + 8) \cdot \log_{x-1}(x + m) = 3$$

ima jedinstveno rješenje.

7. Osnovka uspravne piramide je trokut sa stranicama duljine 25 cm, 29 cm, 36 cm. Sve pobočke piramide zatvaraju s ravninom osnovke kut od 75°. Obujam piramide iznosi $k + l\sqrt{m}\,\mathrm{cm}^3$. Odredite prirodne brojeve k, l i m.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

29. siječnja 2015.

1. Riješite jednadžbu

$$\binom{n}{n-2}+2\binom{n-1}{n-3}=\binom{n+1}{n-1}+\binom{n-2}{n-3}.$$

2. Odredite prirodan broj n, tako da omjer sedmog člana brojeći od početka, prema sedmom članu brojeći od kraja, u razvoju binoma $\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$ bude jednak $\frac{1}{6}$.

3. Odredite sve troznamenkaste brojeve koji u sustavu s bazom 9 imaju prikaz $\overline{xyz}_9$, a u sustavu s bazom 11 prikaz $\overline{zyx}_{11}$.

4. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi jednakost

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n-1)2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}=2^n.$$

5. U trokutu ABC visina iz vrha A dijeli nasuprotnu stranicu na dijelove duljina 2 cm i 10 cm, a $\operatorname{tg}\sphericalangle CAB=\frac{9}{2}$. Izračunajte površinu trokuta ABC.

* * *

6. Elipsi $x^2+4y^2=4$ upisan je romb kojemu je jedan vrh u točki $A(\sqrt{2}, y>0)$. Odredite koordinate preostalih vrhova te izračunajte površinu romba.

7. Odredite sve kompleksne brojeve $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$ takve da je točka (x,y) u četvrtom kvadrantu i da vrijedi

$$|z+iz|=2,\qquad \operatorname{Re}(z^4)=-2.$$

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.