ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

29. siječnja 2015.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Koji je razlomak veći,

$$\frac{22222221}{22222223} \text{ ili } \frac{33333331}{33333334}?$$

Dokažite.

Prvo rješenje.

Zapišimo razlomke u sljedećem obliku:

$$\frac{22222221}{22222223} = \frac{22222222-1}{22222222+1}$$ 1 bod

$$\frac{33333331}{33333334} = \frac{33333333-2}{33333333+1}$$ 1 bod

Neka je $11111111 = x$. 1 bod

Početni razlomci sada postaju $\frac{2x-1}{2x+1}$ i $\frac{3x-2}{3x+1}$. Izračunat ćemo njihovu razliku.

$$\frac{2x-1}{2x+1} - \frac{3x-2}{3x+1} = \frac{(2x-1)(3x+1)-(3x-2)(2x+1)}{(2x+1)(3x+1)}$$ 1 bod

Nakon sređivanja brojnika slijedi

$$\frac{2x-1}{2x+1} - \frac{3x-2}{3x+1} = \frac{1}{(2x+1)(3x+1)}.$$ 1 bod

Dobili smo pozitivan broj, a to znači da je prvi razlomak veći od drugoga. 1 bod

Drugo rješenje.

$$\frac{22222221}{22222223} = \frac{22222223-2}{22222223} = 1-\frac{2}{22222223} = 1-\frac{2}{22222223}\cdot\frac{3}{3} = 1-\frac{6}{66666669}$$ 2 boda

$$\frac{33333331}{33333334} = \frac{33333334-3}{33333334} = 1-\frac{3}{33333334} = 1-\frac{3}{33333334}\cdot\frac{2}{2} = 1-\frac{6}{66666668}$$ 2 boda

Kako je nazivnik prvog razlomka veći od nazivnika drugog razlomka, zaključujemo da je prvi razlomak veći od drugoga. 2 boda

Napomena: Ako učenik zaključak donese na temelju provedenog postupka dijeljenja, dati sve bodove.

Zadatak B-1.2.

Rastavite na linearne faktore $(x-1)(x-2)(x-3)+(x-1)(x-2)+1-x$.

Prvo rješenje.

Nakon izlučivanja zajedničkog člana $(x-1)$ dobijemo redom

$$(x-1)\left((x-2)(x-3)+(x-2)-1\right)= \quad \text{1 bod}$$
$$(x-1)(x^2-5x+6+x-2-1)=$$
$$(x-1)(x^2-4x+3)= \quad \text{1 bod}$$
$$(x-1)(x^2-3x-x+3)= \quad \text{1 bod}$$
$$(x-1)\left(x(x-3)-(x-3)\right)= \quad \text{1 bod}$$

Daljnjim izlučivanjem slijedi

$$(x-1)(x-3)(x-1)=(x-1)^2(x-3). \quad \text{2 boda}$$

Drugo rješenje.

Iz prva dva pribrojnika izlučimo zajednički član, a iz zadnja dva člana izlučimo minus:

$(x-1)(x-2)(x-3)+(x-1)(x-2)+1-x=(x-1)(x-2)(x-3+1)-(x-1)=$ 2 boda

$(x-1)(x-2)(x-2)-(x-1)=$

$(x-1)\left((x-2)^2-1\right)=$ 2 boda

(rastavimo razliku kvadrata)

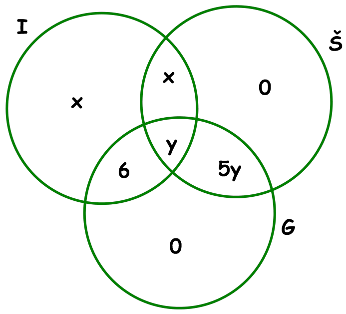
$(x-1)(x-2-1)(x-2+1)=(x-1)^2(x-3)$ 2 boda

Zadatak B-1.3.

Svaki od 28 učenika posjetio je barem jednu od tri države. Broj učenika koji je posjetio samo Italiju i Španjolsku jednak je broju učenika koji su posjetili samo Italiju. Niti jedan učenik nije posjetio samo Španjolsku i niti jedan samo Grčku. Šest je učenika posjetilo Grčku i Italiju, ali ne i Španjolsku. Broj učenika koji je posjetio samo Grčku i Španjolsku je pet puta veći od onih koji su posjetili sve tri zemlje. Ako je broj učenika koji su posjetili sve tri zemlje paran i različit od nule, koliko je učenika posjetilo samo Italiju?

Rješenje.

Zadatak rješavamo koristeći Vennove dijagrame. Neka je x traženi broj učenika koji su posjetili samo Italiju, a y broj učenika koji su posjetili sve tri zemlje.



U skupu I su svi koji su posjetili Italiju, u skupu $\check{S}$ svi koji su posjetili Španjolsku, a u skupu G svi koji su posjetili Grčku. Prema uvjetima u zadatku popunimo dijagram. 2 boda

Vrijedi

$$\begin{aligned}
&x + x + 6 + y + 5y = 28 && \text{1 bod}\\
&2x + 6y = 22,\\
&x + 3y = 11,\\
&x = 11 - 3y && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

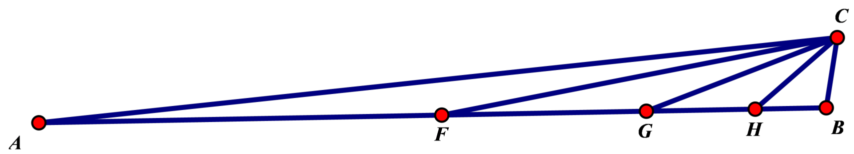
Kako je y paran i različit od 0, te $x \geqslant 0$, jedina je mogućnost $y = 2$. 1 bod
Tada je $x = 11 - 6 = 5$. Dakle, 5 učenika je posjetilo samo Italiju. 1 bod

Zadatak B-1.4.

Točke F, G i H pripadaju stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC. Točka F je između točaka A i G, a točka H između točaka G i B. Mjera kuta CAB iznosi $5°$, a $|BH| = |BC|, |HG| = |HC|, |GF| = |GC|, |FA| = |FC|$. Kolika je mjera kuta ABC?

Rješenje.

Nacrtajmo trokut ABC i promotrimo trokut AFC.



1 bod

Iz uvjeta zadatka ($|FA| = |FC|$), trokut AFC je jednakokračan. Jedan je kut $5°$, pa je kut $\sphericalangle AFC = 170°$. 1 bod
Tada je $\sphericalangle BFC = 10°$, a u jednakokračnom trokutu FGC je $\sphericalangle FGC = 160°$. 1 bod
U jednakokračnom trokutu GHC vrijedi $\sphericalangle CGH = 20°$, tj. $\sphericalangle GHC = 140°$ 1 bod
i $\sphericalangle CHB = 40°$. 1 bod

Konačno, trokut CHB je jednakokračan, a traženi kut je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle HBC = 100°$. 1 bod

Zadatak B-1.5.

Ivo i Ana oboje su pili limunadu u kinu i gledali film. Ivo je uzeo srednju veličinu, a Ana veliku koja je za 50% veća od srednje. Nakon što su oboje popili $\frac{3}{4}$ svoje limunade, Ana je dala Ivi jednu trećinu od onog što je njoj ostalo i još 0.5 dl. Nakon što je film završio i svu su limunadu popili, ustanovili su da su oboje popili istu količinu limunade. Koliko su decilitara limunade zajedno popili?

Rješenje.

Neka je x srednja količina limunade koju je Ivo uzeo na početku. Ana je uzela $1.5x$.

Ivo je od Ane dobio $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1.5x + 0.5 = \frac{1}{8}x + 0.5$, 1 bod

što znači da je ukupno popio $x + \frac{1}{8}x + 0.5 = \frac{9}{8}x + 0.5$ dl limunade. 1 bod

Ana je popila ukupno $1.5x - \left(\frac{1}{8}x + 0.5\right) = \frac{11}{8}x - 0.5$. 1 bod

Tada je $\frac{11}{8}x - 0.5 = \frac{9}{8}x + 0.5$, 1 bod

$\frac{2}{8}x = 1, x = 4$. 1 bod

Srednja količina limunade je 4 dl, a ukupno su popili $x + 1.5x = 2.5x$, što iznosi 10 dl limunade. 1 bod

Zadatak B-1.6.

Zbroj znamenaka troznamenkastog broja je 17. Znamenka desetica je 9. Ako znamenke stotica i jedinica zamijene mjesta, novi je broj za 100 veći od dvostrukog prvog broja. Koji je prvi broj?

Prvo rješenje.

Traženi broj zapisujemo u obliku $\overline{a9b}$. Vrijedi $a + 9 + b = 17, a + b = 8$. 2 boda

Novi broj je $\overline{b9a}$, a prema uvjetu zadatka vrijedi $\overline{b9a} = 100 + 2 \cdot \overline{a9b}$. 1 bod

Dakle $100b + 90 + a = 100 + 2(100a + 90 + b)$. 1 bod

Slijedi $100b - 2b = 200a - a + 280 - 90, 98b = 199a + 190$. 1 bod

Kako je $a + b = 8, b = 8 - a$, slijedi

$$98(8 - a) = 199a + 190 \qquad \text{1 bod}$$
$$784 - 98a = 199a + 190$$
$$-297a = -594 / : (-297). \qquad \text{1 bod}$$

Dakle $a = 2$, odnosno $b = 8 - a = 6$. 2 boda

Traženi broj je $\overline{a9b} = 296$. 1 bod

Drugo rješenje.

Traženi broj zapisujemo u obliku $\overline{a9b}$. Vrijedi $a+9+b=17, a+b=8$. 2 boda

Novi broj je $\overline{b9a}$, a prema uvjetu zadatka vrijedi $\overline{b9a}=100+2\cdot\overline{a9b}$ (*).

Brojevi a i b ne mogu biti jednaki 0, a kako je $a+b=8$, 2 boda
tada za znamenke vrijedi $a, b \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$. 2 boda
Raspisivanjem kombinacija dobivamo $a=2, b=6$, odnosno riječ je o broju 296. 2 boda

Za ostale kombinacije ne vrijedi uvjet (*): 2 boda

$$(a,b)=(1,7) \Rightarrow 197,791, \quad (a,b)=(3,5) \Rightarrow 395,593, \quad (a,b)=(4,4) \Rightarrow 494,494$$

$$(a,b)=(5,3) \Rightarrow 593,395 \quad (a,b)=(6,2) \Rightarrow 692,296 \text{ i } \quad (a,b)=(7,1), \Rightarrow 791,197$$

Zadatak B-1.7.

Dokažite da je izraz $n^4+7(7+2n^2)$ djeljiv sa 64 za svaki neparni broj n.

Rješenje.

Izraz $n^4+7(7+2n^2)$ možemo zapisati u sljedećem obliku:
$n^4+7(7+2n^2)=n^4+49+14n^2=(n^2+7)^2$. 1 bod

Kako je n neparan broj, možemo pisati $n=2k+1$. 1 bod

$(n^2+7)^2=\left((2k+1)^2+7\right)^2=(4k^2+4k+8)^2$. 1 bod

Nakon izlučivanja broja 4 slijedi:
$(4k^2+4k+8)^2=\left(4(k^2+k+2)\right)^2=16(k^2+k+2)^2$. 1 bod

Dobiveni je izraz djeljiv sa 16. 1 bod
Pogledajmo izraz u zagradi: $k^2+k+2=k(k+1)+2$. 1 bod
$k(k+1)$ je umnožak dva uzastopna broja, pa je to sigurno paran broj. 1 bod
Kako je i 2 paran broj, to je i njihov zbroj paran. 1 bod
Dakle, izraz k^2+k+2 je djeljiv s 2, a kvadrat tog izraza je djeljiv sa 4. 1 bod
Time je $16(k^2+k+2)^2$ djeljivo sa $16\cdot 4=64$, pa smo dokazali tvrdnju. 1 bod

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

29. siječnja 2015.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Odredite za koju vrijednost varijable x izraz $(3ax+2015)^2+(2ax+2015)^2$, $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ ima najmanju vrijednost i koliko iznosi ta najmanja vrijednost?

Rješenje.

Nakon kvadriranja dobivamo

$$\begin{aligned}&9a^2x^2+6a\cdot 2015x+2015^2+4a^2x^2+4a\cdot 2015x+2015^2=\\&=13a^2x^2+10\cdot 2015ax+2\cdot 2015^2\end{aligned}$$ 2 boda

Ako dobiveni izraz promatramo kao kvadratnu funkciju u varijabli x, on ima najmanju vrijednost za $x=-\frac{10\cdot 2015a}{2\cdot 13a^2}=-\frac{775}{a}$. 2 boda

Najmanja vrijednost danog izraza je

$$\frac{4\cdot 13a^2\cdot 2\cdot 2015^2-(10\cdot 2015a)^2}{4\cdot 13a^2}=\frac{4a^2\cdot 2015^2}{4\cdot 13a^2}=\frac{2015^2}{13}=155\cdot 2015=312325.$$ 2 boda

Napomena: Ako učenik ostavi rješenje u obliku $\dfrac{2015^2}{13}$ dati sve bodove.

Zadatak B-2.2.

Svima je poznato da Pinokiu raste nos kada laže. Što dulje i brže Pinokio laže, to mu nos više raste. Jednog dana Pinokio Piko je toliko dugo lagao da mu je nos narastao 54 mm. Pinokio Niko je lagao toliko dugo da mu je nos narastao 6 mm. Piko je lagao 4 minute dulje nego Niko. Da je Piko lagao koliko Niko, a Niko koliko i Piko nosovi bi im jednako narasli. Odredite koliko bi dugo svaki od njih trebao lagati da im jednako narastu nosovi te koliko bi im u tom slučaju narasli nosovi.

Rješenje.

Neka je Piko lagao $t+4$ minute, a Niko t minuta

Piko: $\begin{cases}54\text{ mm}\ldots & t+4\\ x\text{ mm}\ldots & t\end{cases}\Rightarrow x=\frac{54t}{t+4}.$ 1 bod

Niko: $\begin{cases}6\text{ mm}\ldots & t\\ x\text{ mm}\ldots & t+4\end{cases}\Rightarrow x=\frac{6(t+4)}{t}.$ 1 bod

$$\Rightarrow\frac{54t}{t+4}=\frac{6(t+4)}{t}$$ 1 bod

$$\Rightarrow t^2 - t - 2 = 0.$$ 1 bod

Rješenja jednadžbe su $t_1 = -1$, $t_2 = 2$ pa je $t = 2$ minute. 1 bod

Da je Piko lagao 2 minute, a Niko 6 minuta obojici bi nosovi narasli 18 mm. 1 bod

Zadatak B-2.3.

Neka je

$$x = \frac{2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt[4]{3}+1)(\sqrt[8]{3}+1)(\sqrt[16]{3}+1)}.$$

Odredite $(x+1)^{64}$.

Rješenje.

Pomnožimo brojnik i nazivnik s $\sqrt[16]{3} - 1$.

$$\begin{aligned}
x &= \frac{2(\sqrt[16]{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt[4]{3}+1)(\sqrt[8]{3}+1)(\sqrt[16]{3}+1)(\sqrt[16]{3}-1)} = \\
&= \frac{2(\sqrt[16]{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt[4]{3}+1)(\sqrt[8]{3}+1)(\sqrt[8]{3}-1)} = && \text{1 bod} \\
&= \frac{2(\sqrt[16]{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt[4]{3}+1)(\sqrt[4]{3}-1)} = && \text{1 bod} \\
&= \frac{2(\sqrt[16]{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = && \text{1 bod} \\
&= \frac{2(\sqrt[16]{3}-1)}{3-1} \\
&= \sqrt[16]{3} - 1 && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Tada je $(x+1)^{64} = (\sqrt[16]{3} - 1 + 1)^{64} = (\sqrt[16]{3})^{64} = 3^4 = 81$. 2 boda

Zadatak B-2.4.

Dokažite da jednadžba $5x^2 - 4y^2 = 2015$ nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

Prvo rješenje.

Ako je x paran broj, lijeva je strana jednakosti parna, a desna neparna pa jednadžba nema rješenja. Ako je x neparan broj, $x = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, tada mora vrijediti 2 boda

$$5x^2 - 4y^2 = 5 \cdot (2k+1)^2 - 4y^2 = 20k^2 + 20k + 5 - 4y^2 = 2015.$$

Dana jednadžba prelazi u jednadžbu

$$20k^2 + 20k - 4y^2 = 2010$$ 2 boda

kojoj je lijeva strana djeljiva s 4, a desna nije. Zato jednadžba nema rješenja u skupu cijelih brojeva. 2 boda

Drugo rješenje.

Zapišimo danu jednadžbu u sljedećem obliku:

$$5x^2 - 4y^2 = 2015$$
$$5x^2 - 5 - 4y^2 = 2010$$
$$5(x^2 - 1) - 4y^2 = 2010 \qquad \text{2 boda}$$

Izraz $4y^2$ je paran pa i $5 \cdot (x^2 - 1)$ mora biti paran. To znači da je x neparan broj. 2 boda

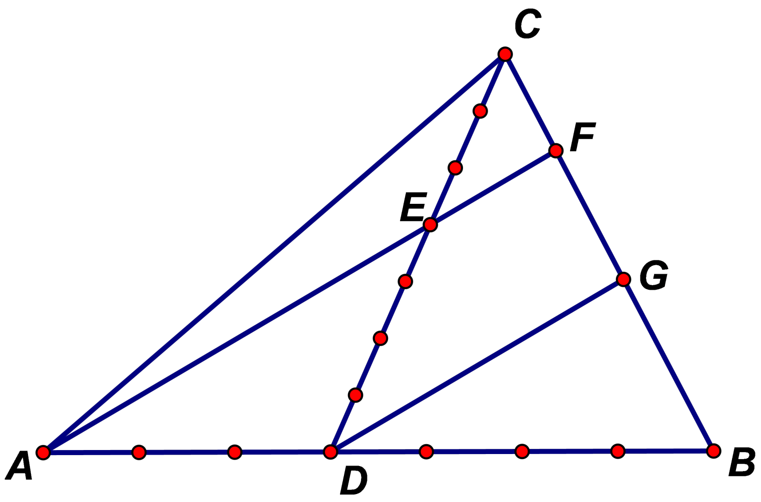
Tada je i $(x^2 - 1)$ i $4y^2$ djeljivo s 4, pa bi i 2010 moralo također biti djeljivo s 4. Kako to nije točno, početna jednadžba nema rješenja. 2 boda

Zadatak B-2.5.

U trokutu ABC na stranici $\overline{AB}$ nalazi se točka D tako da je $|AD| : |DB| = 3 : 4$. Na dužini $\overline{CD}$ nalazi se točka E tako da je $|CE| : |ED| = 3 : 4$. Paralela s pravcem AE prolazi točkom D i siječe $\overline{BC}$ u točki G. Odredite omjer $|CG| : |GB|$.

Rješenje.

Nacrtajmo sliku. 1 bod



Neka pravac AE siječe stranicu $\overline{BC}$ u F i neka je DG paralela s EF. Po Talesovom poučku vrijedi

$$\frac{|CF|}{|FG|} = \frac{3}{4} = \frac{9}{12}. \qquad \text{1 bod}$$

Također vrijedi: $\dfrac{|FG|}{|GB|} = \dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{3}{4} = \dfrac{12}{16}$. Slijedi 1 bod

$$|CF| : |FG| : |GB| = 9 : 12 : 16 \qquad \text{1 bod}$$
$$|CF| = 9k,\ |FG| = 12k,\ |GB| = 16k \qquad \text{1 bod}$$
$$\Rightarrow \frac{|CG|}{|GB|} = \frac{|CF| + |FG|}{|GB|} = \frac{9k + 12k}{16k} = \frac{21}{16}. \qquad \text{1 bod}$$

Zadatak B-2.6.

Jednadžbe $|z-2a|=|z-a|$ i $|z-3ai|=|z-ai|$, $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, $z\in\mathbb{C}$, određuju skupove točaka u Gaussovoj ravnini koji s koordinatnim osima zatvaraju lik površine 75 kvadratnih jedinica. Izračunajte opseg tog lika.

Rješenje.

Ako je $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$, jednadžba $|z-2a|=|z-a|$ prelazi u

$$\sqrt{(x-2a)^2+y^2}=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$$ 1 bod

$$(x-2a)^2+y^2=(x-a)^2+y^2$$

$$x^2-4ax+4a^2=x^2-2ax+a^2$$

$$2ax=3a^2$$

$$x=\frac{3}{2}a$$ 1 bod

Dakle, prvi skup točaka je pravac okomit na os x, $x=\frac{3}{2}a$. 1 bod

Analognim postupkom druga jednadžba $|z-3ai|=|z-ai|$ prelazi u

$$\sqrt{x^2+(y-3a)^2}=\sqrt{x^2+(y-a)^2},$$

što nakon sređivanja daje $y=2a$, pravac okomit na os y. 3 boda

Dobiveni pravci s koordinatnim osima zatvaraju pravokutnik sa stranicama duljina $\frac{3}{2}|a|$ i $2|a|$. 1 bod

Slijedi $P=\dfrac{3}{2}\cdot 2a^2=75\Rightarrow a=5$ ili $a=-5$. 2 boda

Opseg dobivenog lika je $O=2\cdot\frac{3}{2}a+2\cdot 2a=7a=35$ mjernih jedinica. 1 bod

Napomena: Ako učenik prepozna da su sa $|z-2a|=|z-a|$ i $|z-3ai|=|z-ai|$ dane simetrale dužina, treba priznati i dati sve predviđene bodove za taj dio zadatka.

Zadatak B-2.7.

Odredite vrijednost realnog parametra m tako da rješenja jednadžbe

$$(mx-1)\cdot x=mx-2$$

predstavljaju duljine kateta pravokutnog trokuta s hipotenuzom duljine $\frac{5}{6}$.

Rješenje.

Danu jednadžbu možemo pisati u obliku $mx^2-(m+1)x+2=0$. 1 bod

Rješenja moraju biti realna pa diskriminanta jednadžbe mora biti veća ili jednaka nuli,

$$(m+1)^2-8m\geqslant 0,$$ 1 bod

$$m^2-6m+1\geqslant 0,$$

$$m\in\langle-\infty,3-2\sqrt{2}]\cup[3+2\sqrt{2},\infty\rangle.$$ 1 bod

Ako su rješenja duljine kateta pravokutnog trokuta tada vrijedi Pitagorin poučak:

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2, \qquad \text{1 bod}$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{25}{36}. \qquad \text{1 bod}$$

Prema Vieteovim formulama slijedi

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{m+1}{m} \qquad \text{1 bod}$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{m} \qquad \text{1 bod}$$

pa iz prethodne jednakosti slijedi kvadratna jednadžba

$$11m^2 - 72m + 36 \qquad \text{1 bod}$$

čija su rješenja $m_1 = 6$ i $m_2 = \frac{6}{11}$. 1 bod

Kako m_2 nije iz intervala $\langle -\infty, 3 - 2\sqrt{2}] \cup [3 + 2\sqrt{2}, \infty\rangle$, rješenje zadatka je samo $m_1 = 6$. 1 bod

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

29. siječnja 2015.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Odredite vrijednost izraza $A = 1 + \operatorname{tg} 35^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 10^\circ$.

Rješenje.

Iz $35^\circ + 10^\circ = 45^\circ$ slijedi:

$$1 = \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg}(35^\circ + 10^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 35^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ}{1 - \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 10^\circ}$$

$\Rightarrow \operatorname{tg} 35^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ = 1 - \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 10^\circ$ 4 boda

$\Rightarrow A = 1 + \operatorname{tg} 35^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 10^\circ = 1 + 1 - \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 10^\circ = 2.$ 2 boda

Zadatak B-3.2.

Prva znamenka nekog četveroznamenkastog broja za jedan je veća od njegove treće znamenke, a druga znamenka jednaka je zbroju preostalih znamenaka. Zadnja znamenka tog broja je za pet manja od prve znamenke. Odredite taj četveroznamenkasti broj.

Rješenje.

Neka je $\overline{abcd}$ traženi četveroznamenkasti broj. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
&a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\},\ a \neq 0\\
&a = c + 1,\\
&b = a + c + d,\\
&d = a - 5.
\end{aligned}$$

1 bod

Iz prve jednakosti slijedi $c = a - 1$. Tada iz druge jednakosti (uvrštavanjem izraza za c i d) slijedi

$$b = a + a - 1 + a - 5 = 3a - 6.$$

1 bod

Kako znamenke b, c, d moraju biti iz skupa $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$ slijedi

$$\begin{aligned}
&a - 5 \geqslant 0 \Rightarrow a \geqslant 5\\
&3a - 6 \leqslant 9 \Rightarrow a \leqslant 5.
\end{aligned}$$

2 boda

Zaključujemo da je jedina mogućnost $a = 5$. 1 bod

Tada je $b = 3 \cdot 5 - 6 = 9$, $c = 5 - 1 = 4$, $d = 5 - 5 = 0$. Traženi četveroznamenkasti broj je 5940. 1 bod

Zadatak B-3.3.

Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije

$$f(x)=\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}-\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sqrt{(1-\cos^2 x)^2+4\cos^2 x}-\sqrt{(1-\sin^2 x)^2+4\sin^2 x}= && \text{1 bod}\\
&=\sqrt{\cos^4 x+2\cos^2 x+1}-\sqrt{\sin^4 x+2\sin^2 x+1}= && \text{1 bod}\\
&=\sqrt{(1+\cos^2 x)^2}-\sqrt{(1+\sin^2 x)^2}= && \text{1 bod}\\
&=1+\cos^2 x-1-\sin^2 x=\cos 2x. && \text{1 bod}
\end{aligned}$$

Najveća vrijednost funkcije f je 1, a najmanja vrijednost je -1. 2 boda

Zadatak B-3.4.

Riješite jednadžbu

$$\frac{\sin(x-\frac{2015\pi}{2})-\cos^3 x}{\sin(2x+2015\pi)}=\frac{1}{2}.$$

Rješenje.

Pojednostavnimo lijevu stranu jednadžbe:

$$\frac{\sin(x-\frac{2015\pi}{2})-\cos^3 x}{\sin(2x+2015\pi)}=\frac{-\sin(x-\frac{\pi}{2})-\cos^3 x}{\sin(2x+\pi)}= \qquad \text{1 bod}$$

$$\frac{\cos x-\cos^3 x}{-\sin 2x}= \qquad \text{1 bod}$$

$$\frac{\cos x(1-\cos^2 x)}{-2\sin x\cdot\cos x}=\frac{\sin^2 x}{-2\sin x}=-\frac{1}{2}\sin x \qquad \text{1 bod}$$

Sada rješavamo jednadžbu $-\frac{1}{2}\sin x=\frac{1}{2}$, tj. $\sin x=-1$. 1 bod

Rješenja su $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. 1 bod

Međutim, to je nultočka nazivnika, pa zadatak nema rješenja. 1 bod

Zadatak B-3.5.

Koji od pravokutnih trokuta s cjelobrojnim stranicama i jednom katetom duljine 1000 cm ima najveći mogući opseg?

Rješenje.

Neka je c hipotenuza te a, b katete pravokutnog trokuta. Pretpostavimo da je duljina katete $a = 1000$ cm. Tada vrijedi

$$c^2 - b^2 = 1000^2, \text{ odnosno } (c-b)(c+b) = 10^6.$$ 1 bod

Ako opseg trokuta $O = a + b + c$ ima najveću vrijednost tada $b + c$ mora biti najveći faktor broja 10^6. 1 bod

Tada je

$$\begin{aligned} c + b &= 10^6, \\ c - b &= 1, \end{aligned}$$

ali rješenje ovog sustava $c = \frac{10^6+1}{2}$ nije cijeli broj. 2 boda

Da bi opseg bio najveći mogući, sljedeća mogućnost za $c + b$ i $c - b$ je

$$\begin{aligned} c + b &= 5 \cdot 10^5, \\ c - b &= 2, \end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih jednadžbi dobivamo

$$2c = 5 \cdot 10^5 + 2$$

te je $c = 250001$ cm, a $b = 249999$ cm. 2 boda

Zadatak B-3.6.

Odredite sve vrijednosti parametra $m \in \mathbb{R}$ tako da jednadžba

$$\log_{x+m}(x^3 - 9x + 8) \cdot \log_{x-1}(x + m) = 3$$

ima jedinstveno rješenje.

Rješenje.

Postavimo uvjete zadatka:

$$\begin{aligned} &x + m > 0,\ x + m \neq 1, \\ &x - 1 > 0,\ x - 1 \neq 1, \\ &x^3 - 9x + 8 > 0. \end{aligned}$$ 3 boda

Zadanu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\frac{\log(x^3 - 9x + 8)}{\log(x+m)} \cdot \frac{\log(x+m)}{\log(x-1)} = 3.$$ 1 bod

Nadalje vrijedi

$$\begin{aligned} \log(x^3 - 9x + 8) &= 3 \cdot \log(x-1), \\ \log(x^3 - 9x + 8) &= \log(x-1)^3, \end{aligned}$$ 1 bod

$$\begin{aligned} x^3 - 9x + 8 &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1, \\ 3x^2 - 12x + 9 &= 0, \\ x^2 - 4x + 3 &= 0. \end{aligned}$$ 1 bod

Rješenja posljednje jednadžbe su $x = 3$ i $x = 1$. 1 bod
Rješenje $x = 1$ ne zadovoljava drugi i treći uvjet zadatka pa ne može biti rješenje. 1 bod

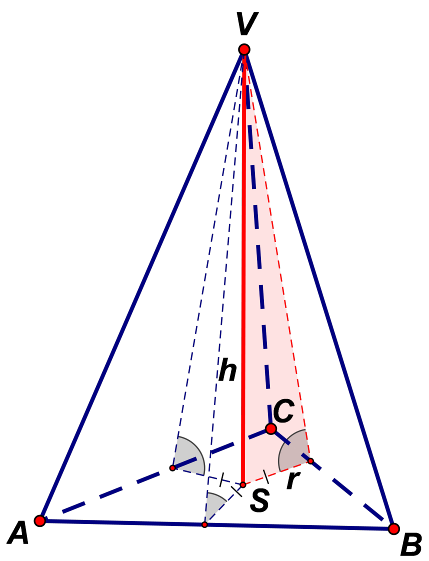
Rješenje $x = 3$ zadovoljava drugi i treći uvjet pa da bi to bilo jedino rješenje treba vrijediti $3 + m > 0$ i $3 + m \neq 1$, 1 bod
odnosno $m > -3$ i $m \neq -2$. 1 bod

Zadatak B-3.7.

Osnovka uspravne piramide je trokut sa stranicama duljine 25 cm, 29 cm, 36 cm. Sve pobočke piramide zatvaraju s ravninom osnovke kut od 75°. Obujam piramide iznosi $k + l\sqrt{m}\,\mathrm{cm}^3$. Odredite prirodne brojeve k, l i m.

Rješenje.

Ako sve pobočke zatvaraju s ravninom osnovke isti kut, ortogonalna projekcija vrha piramide je središte upisane kružnice osnovke. (ili slika) 2 boda



Označimo stranice trokuta s $a = 25$ cm, $b = 29$ cm, $c = 36$ cm.

Tada je poluopseg $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{25+29+36}{2} = 45$ cm.

Površina osnovke je

$$B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{45 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 9} = 30 \cdot 4 \cdot 3 = 360 \text{ cm}^2.$$ 2 boda

Polumjer osnovki upisane kružnice je

$$r = \frac{B}{s} = 8 \text{ cm}.$$ 1 bod

Iz osjenčanog trokuta sa slike slijedi

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{h}{r}$$ 1 bod

pa slijedi

$$h = r\,\mathrm{tg}(30^\circ + 45^\circ) = 8 \cdot \frac{\mathrm{tg}\,30^\circ + \mathrm{tg}\,45^\circ}{1 - \mathrm{tg}\,30^\circ \cdot \mathrm{tg}\,45^\circ} = 8 \cdot (2 + \sqrt{3}).$$

2 boda

Tada je obujam

$$V = \frac{1}{3} \cdot 360 \cdot 8 \cdot (2 + \sqrt{3}) = 960 \cdot (2 + \sqrt{3}) = 1920 + 960 \cdot \sqrt{3}\mathrm{cm}^3.$$

1 bod

Slijedi $k = 1920$, $l = 960$, $m = 3$. 1 bod

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

29. siječnja 2015.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

Riješite jednadžbu

$$\binom{n}{n-2} + 2\binom{n-1}{n-3} = \binom{n+1}{n-1} + \binom{n-2}{n-3}.$$

Rješenje.

Iz simetrije binomnih koeficijenata slijedi

$$\binom{n}{2} + 2\binom{n-1}{2} = \binom{n+1}{2} + \binom{n-2}{1}. \qquad \text{1 bod}$$

Rješenje može biti prirodan broj $n \geqslant 3$. 1 bod

Raspisivanjem binomnih koeficijenata dobivamo:

$$\frac{n(n-1)}{2} + 2 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{(n+1)n}{2} + (n-2) \quad / \cdot 2 \qquad \text{1 bod}$$

$$n^2 - n + 2(n^2 - 2n - n + 2) = n^2 + n + 2n - 4$$

$$n^2 - 5n + 4 = 0. \qquad \text{1 bod}$$

Moguća rješenja jednadžbe su $n_1 = 4$ i $n_2 = 1$. 1 bod

Zbog uvjeta, jedino rješenje je $n = 4$. 1 bod

Zadatak B-4.2.

Odredite prirodan broj n, tako da omjer sedmog člana brojeći od početka, prema sedmom članu brojeći od kraja, u razvoju binoma $\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$ bude jednak $\frac{1}{6}$.

Rješenje.

U razvoju binoma $\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n = \left(2^{\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{1}{3}}\right)^n$ sedmi član od početka je

$$\binom{n}{6}\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{n-6}\left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^{6}, \qquad \text{1 bod}$$

a sedmi član od kraja je

$$\binom{n}{6}\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{6}\left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^{n-6}. \qquad \text{1 bod}$$

Tada je

$$\frac{\binom{n}{6}\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{n-6}\left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^{6}}{\binom{n}{6}\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{6}\left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^{n-6}}=\frac{1}{6} \qquad \text{1 bod}$$

$$2^{\frac{n-12}{3}} \cdot 3^{\frac{n-12}{3}}=\frac{1}{6} \qquad \text{1 bod}$$

$$6^{\frac{n-12}{3}}=6^{-1} \qquad \text{1 bod}$$

$$n=9. \qquad \text{1 bod}$$

Zadatak B-4.3.

Odredite sve troznamenkaste brojeve koji u sustavu s bazom 9 imaju prikaz $\overline{xyz}_9$, a u sustavu s bazom 11 prikaz $\overline{zyx}_{11}$.

Rješenje.

Znamenke x, y, z mogu poprimati vrijednosti iz skupa $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ i $x, z \neq 0$.

1 bod

Raspisivanjem po bazi imamo:

$$81x+9y+z=121z+11y+x \qquad \text{1 bod}$$

$$2y=80x-120z$$

$$y=40x-60z=20(2x-3z). \qquad \text{1 bod}$$

Jedina mogućnost (jer su to znamenke) je $y=0$, 1 bod

i $2x=3z$ iz čega slijedi

$$1^\circ \qquad x=3, z=2 \Longrightarrow 302_9=203_{11} \qquad \text{1 bod}$$

$$2^\circ \qquad x=6, z=4 \Longrightarrow 604_9=406_{11}. \qquad \text{1 bod}$$

Zadatak B-4.4.

Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi jednakost

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n-1)2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}=2^n.$$

Prvo rješenje.

Brojnik i nazivnik lijeve strane pomnožimo umnoškom svih parnih brojeva koji nisu veći od $2n$:

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n-1)2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 2n}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 2n} \qquad \text{3 boda}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n-1)2n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n\cdot 2^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot 2n} \qquad \text{2 boda}$$

$$=\frac{(2n)!}{(2n)!}\cdot 2^n=2^n. \qquad \text{1 bod}$$

Drugo rješenje.

Zadanu jednakost dokažimo matematičkom indukcijom.
Provjerimo prvo tvrdnju za $n = 1$.

$$\frac{2}{1} = 2^1,$$

dakle tvrdnja vrijedi. 1 bod

Pretpostavimo da zadana jednakost vrijedi za neki proizvoljan prirodan broj n i dokažimo da vrijedi i za njegovog sljedbenika $n + 1$. 1 bod

Treba dokazati da je

$$\frac{((n+1)+1)\,((n+2)+1)\cdots(2(n+1)-1)\,2(n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\,(2(n+1)-1)} = 2^{n+1}.$$ 1 bod

Koristeći pretpostavku indukcije, lijevu strane posljednje jednakosti možemo pisati u obliku

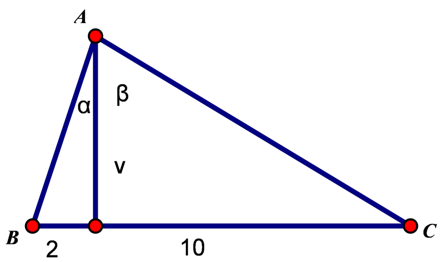
$$\begin{aligned}
&\frac{(n+2)(n+3)\cdots(2n-1)2n(2n+1)2(n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}\\
&=\frac{[(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n-1)2n]2(2n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}\\
&=2^n\cdot\frac{2(2n+1)}{2n+1}=2^{n+1}.
\end{aligned}$$ 2 boda

Kako iz pretpostavke da tvrdnja vrijedi za n slijedi da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$, dana tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n. 1 bod

Zadatak B-4.5.

U trokutu ABC visina iz vrha A dijeli nasuprotnu stranicu na dijelove duljina 2 cm i 10 cm, a $\operatorname{tg}\sphericalangle CAB = \frac{9}{2}$. Izračunajte površinu trokuta ABC.

Rješenje.



Označimo s α i β dijelove na koje visina iz vrha A dijeli kut CAB.
Vrijedi

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{v}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{10}{v}$$ 1 bod

$$\text{i} \qquad \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{9}{2}.$$ 1 bod

Koristeći formulu za tangens zbroja dobivamo

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{9}{2}, \qquad \text{1 bod}$$

$$\frac{\frac{2}{v} + \frac{10}{v}}{1 - \frac{2}{v} \cdot \frac{10}{v}} = \frac{12v}{v^2 - 20} = \frac{9}{2},$$

$$9v^2 - 24v - 180 = 0,$$

$$3v^2 - 8v - 60 = 0. \qquad \text{1 bod}$$

Pozitivno rješenje ove jednadžbe $v = 6$ je visina trokuta ABC. 1 bod

Tražena površina tada iznosi

$$P = \frac{(2 + 10) \cdot 6}{2} = 36\,\mathrm{cm}^2. \qquad \text{1 bod}$$

Zadatak B-4.6.

Elipsi $x^2 + 4y^2 = 4$ upisan je romb kojemu je jedan vrh u točki $A(\sqrt{2}, y > 0)$. Odredite koordinate preostalih vrhova te izračunajte površinu romba.

Rješenje.

Dani je vrh $A(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, a simetrično u odnosu na ishodište je vrh $C(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. 1 bod

Pravac AC je dijagonala romba, prolazi kroz ishodište te ima jednadžbu $y = kx$, gdje je

$$k = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}. \qquad \text{1 bod}$$

Druga dijagonala tada ima jednadžbu $y = -\frac{1}{k}x$, tj. $y = -2x$. 1 bod

Vrhove B i D dobit ćemo kao presjek pravca $y = -2x$ i elipse.

$$x^2 + 4(-2x)^2 = 4 \implies 17x^2 = 4 \implies x^2 = \frac{4}{17}, \qquad \text{1 bod}$$

iz čega slijedi

$$x = \pm\frac{2}{\sqrt{17}}, \qquad y = -2\left(\pm\frac{2}{\sqrt{17}}\right) = \mp\frac{4}{\sqrt{17}}, \qquad \text{1 bod}$$

odnosno

$$B\left(-\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right) \quad \text{i} \quad D\left(\frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}\right). \qquad \text{2 boda}$$

Površina romba je $P = \frac{e \cdot f}{2}$, gdje su e i f dijagonale romba. Sada imamo

$$e = |\overline{AC}| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + \left(2\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{10}, \qquad \text{1 bod}$$

$$f = |\overline{BD}| = \sqrt{\left(2\frac{2}{\sqrt{17}}\right)^2 + \left(2\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2} = \sqrt{\frac{80}{17}}, \qquad \text{1 bod}$$

$$P = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{\frac{80}{17}}}{2} = 10\sqrt{\frac{2}{17}} = \frac{10\sqrt{34}}{17}. \qquad \text{1 bod}$$

Zadatak B-4.7.

Odredite sve kompleksne brojeve $z = x+yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ takve da je točka (x, y) u četvrtom kvadrantu i da vrijedi

$$|z + iz| = 2, \qquad \mathrm{Re}(z^4) = -2.$$

Prvo rješenje.

Neka je $z = x + yi$, $x > 0$, $y < 0$. 1 bod

Tada iz $|z + iz| = 2$ slijedi $|x + yi + xi - y| = 2$, tj.

$$\sqrt{(x-y)^2 + (x+y)^2} = 2$$
$$(x-y)^2 + (x+y)^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 2. \quad \text{1 bod}$$

Po binomnoj formuli je $z^4 = x^4 + 4x^3yi - 6x^2y^2 - 4xy^3i + y^4$. 1 bod

Tako smo dobili sljedeći sustav jednadžbi

$$x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = -2$$
$$x^2 + y^2 = 2. \quad \text{1 bod}$$

Iz druge jednadžbe je $y^2 = 2 - x^2$, pa nakon uvrštavanja u prvu jednadžbu 1 bod

dobijemo bikvadratnu jednadžbu $4x^4 - 8x^2 + 3 = 0$ kojoj su rješenja 1 bod

$x^2 = \frac{3}{2}$ i $x^2 = \frac{1}{2}$. Tada je $y^2 = \frac{1}{2}$ i $y^2 = \frac{3}{2}$, tj. 1 bod

$$x, y \in \left\{ \pm\frac{\sqrt{6}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}. \quad \text{1 bod}$$

Konačno je zbog $x > 0$ i $y < 0$:

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}, \quad z_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \text{2 boda}$$

Drugo rješenje.

Neka je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r = |z|$, $\varphi \in \langle \frac{3\pi}{2}, 2\pi \rangle$. 1 bod

Tada je $z^4 = r^4(\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi)$, odnosno 1 bod

$\mathrm{Re}(z^4) = r^4 \cos 4\varphi$. 1 bod

Vrijedi:

$$|z + iz| = |z(1+i)| = |z| \cdot |1 + i| = r \cdot \sqrt{2}, \text{odnosno} \quad \text{1 bod}$$
$$r\sqrt{2} = 2 \implies r = \sqrt{2}. \quad \text{1 bod}$$

Uvrštavanjem u zadanu jednakost dobivamo

$$(\sqrt{2})^4 \cos 4\varphi = -2 \quad / : 4$$
$$\cos 4\varphi = -\frac{1}{2}, \quad \text{1 bod}$$
$$4\varphi = \pm\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \quad \text{1 bod}$$
$$\varphi = \pm\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \text{1 bod}$$

Kako je z u četvrtom kvadrantu slijedi

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}, \qquad \text{1 bod}$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad \text{1 bod}$$