Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

29. siječnja 2015.

1. Odredi prirodni broj n takav da mu je zbroj najmanja dva djelitelja 6, a zbroj najveća dva djelitelja 1122.

2. Neka su a i b pozitivni realni brojevi takvi da je $a^3 + b^3 = 2ab(a+b)$. Odredi $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2}$.

3. Površina presjeka većeg i manjeg kvadrata iznosi dvije trećine površine manjeg kvadrata, a također i jednu petinu površine njihove unije. Odredi omjer duljina stranica većeg i manjeg kvadrata.

4. U ravnini je nacrtano sto kružnica s istim središtem polumjera $1, 2, \ldots, 100$. Najmanji krug obojan je crvenom bojom, a svaki od 99 kružnih vijenaca omeđenih dvjema kružnicama crvenom ili zelenom bojom tako da su susjedna područja različitih boja.

Odredi ukupnu površinu zeleno obojanih područja.

5. Neka je I središte upisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC i neka je $|AC| > |BC|$. Simetrala kuta i visina iz vrha C sijeku se pod kutom od 10°. Ako je $\sphericalangle AIB = 120^\circ$, odredi kutove trokuta ABC.

* * *

6. Postoji li prirodan broj n takav da je $n^2 + 2n + 2015$ kvadrat nekog prirodnog broja?

7. Na nogometnom turniru sudjeluje pet ekipa koje igraju svaka sa svakom točno jednom. Pobjeda donosi 3 boda, poraz 0 bodova, a neriješeno 1 bod. Može li se dogoditi da na kraju turnira, u ukupnom poretku, svaka ekipa osim posljednje ima točno dva boda više od sljedeće?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

29. siječnja 2015.

1. Dokaži sljedeću tvrdnju: ako je z kompleksni broj za koji je $\operatorname{Re}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)=0$, onda je $|z|=1$.

2. Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC, te neka je N nožište visine iz vrha A. Dokaži da je $\sphericalangle BAN = \sphericalangle CAO$.

3. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 1 000 000 koji su kvadrati prirodnih brojeva, a daju ostatak 4 pri dijeljenju sa 8?

4. Zbroj kvadrata svih rješenja jednadžbe $x^4+ax^2+b=0$ jednak je 32, a umnožak svih rješenja te jednadžbe je 4. Odredi a i b.

5. U četverokutu $ABCD$ zadano je $|AB|=6$, $|BC|=9$, $|CD|=18$ i $|AD|=5$. Odredi duljinu dijagonale $\overline{AC}$ ako je poznato da je ta duljina prirodni broj.

* * *

6. Žicom duljine d treba ograditi zemljište u obliku kružnog isječka tako da površina tog zemljišta bude najveća moguća. Kolika je površina tako ograđenog zemljišta?

7. Na košarkaškom turniru svaka od ekipa igra točno dva puta sa svakom od ostalih ekipa. Pobjeda donosi 2 boda, poraz 0 bodova, a neriješenog rezultata nema. Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoji košarkaški turnir s n ekipa na kojem je jedna ekipa, pobjednik turnira, imala 26 bodova, a točno dvije ekipe najmanji broj bodova, i to 20 bodova.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

29. siječnja 2015.

1. Dokaži da za sve pozitivne realne brojeve x i y vrijedi

$$\log^2(xy) \geqslant \log(x^2)\log(y^2).$$

2. Odredi sve vrijednosti koje može poprimiti izraz

$$\frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x},$$

pri čemu je x realni broj.

3. Odredi najveći prirodni broj n takav da

$$n+5 \mid n^4 + 1395.$$

4. Neka je $ABCD$ tetraedar u kojem je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle DAB = 90°$, $|AD| = 2\sqrt{2}$ te $|AB| = |AC| = 3$. Odredi polumjer sfere upisane tom tetraedru.

5. Odredi najmanji prirodni broj n takav da u svakom skupu koji se sastoji od n cijelih brojeva postoje tri međusobno različita elementa a, b i c takva da je $ab+bc+ca$ djeljivo sa 3.

* * *

6. Neka je ABC trokut u kojem je $\operatorname{tg}\sphericalangle BAC = 1$ i $\operatorname{tg}\sphericalangle ABC = 2$. Odredi omjer $|BC| : |AB|$.

7. Imamo deset bijelih, te po jednu crvenu, plavu, zelenu, žutu i ljubičastu karticu. Bijele kartice međusobno ne razlikujemo. Na točno jednoj strani svake kartice je znak X. Na koliko načina možemo složiti te kartice jednu na drugu tako da nikoje dvije kartice nisu okrenute jedna prema drugoj stranom na kojoj je X?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

29. siječnja 2015.

1. Neka su a, b i c realni brojevi i $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija zadana formulom

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + c\sin x - 1.$$

Ako je $f(-2015) = 2015$, odredi $f(2015)$.

2. Koliki je koeficijent uz x^9 u polinomu $(1 + x^3 + x^6)^{10}$?

3. Neka je n prirodni broj i neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} k!(k^2 + k + 1)$. Izračunaj $\dfrac{S_n + 1}{(n+1)!}$.

4. U kutiji se nalazi jedna crvena i pet bijelih kuglica označenih brojevima 1, 2, 3, 4, 5. Ne gledajući, Domagoj izvlači jednu po jednu kuglicu sve dok ne izvuče crvenu kuglicu, nakon čega prekida izvlačenje. Izvučene kuglice se ne vraćaju u kutiju. Kolika je vjerojatnost da je zbroj brojeva na izvučenim bijelim kuglicama barem 10?

5. Za prirodni broj n označimo s R_n broj čiji se dekadski zapis sastoji od n znamenki 1. Dokaži tvrdnju: ako je R_n prost broj, onda je i n prost broj.

$* \quad * \quad *$

6. Neka su M i N redom nožišta visina iz vrhova A i B šiljastokutnog trokuta ABC. Neka je Q polovište dužine $\overline{MN}$, a P polovište stranice $\overline{AB}$. Ako je $|MN| = 10$ i $|AB| = 26$, odredi duljinu $|PQ|$.

7. Neka je n prirodni broj. Svaki od brojeva $n, n+1, n+2, \ldots, 2n-1$ ima najveći neparni djelitelj. Odredi zbroj tih najvećih neparnih djelitelja.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.