Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

Dubrovnik, 3. travnja 2013.

1. Odredi sva realna rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} x^2 - y &= z^2 \\ y^2 - z &= x^2 \\ z^2 - x &= y^2. \end{aligned}$$

2. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi k i n takvi da vrijedi

$$k(k+1)(k+2)(k+3) = n(n+1).$$

3. Neka su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta.

Dokaži da vrijedi

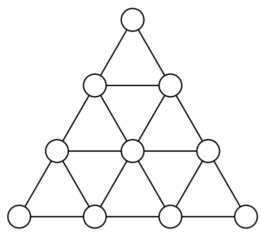
$$\left(1 + \frac{c}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right) \geqslant 3 + 2\sqrt{2}.$$

4. Dan je šesterokut $ABCDEF$ čije se dijagonale $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ sijeku u jednoj točki koja je ujedno polovište svake od tih dijagonala.

Dokaži da je površina danog šesterokuta dvostruko veća od površine trokuta ACE.

5. Brojevi $1, 2, \ldots, 10$ raspoređeni su u kružiće na slici, a zatim je u svaki od devet malih trokuta upisan zbroj brojeva upisanih u njegove vrhove.

Dokaži da među brojevima upisanim u trokute postoje tri čiji je zbroj barem 48.



Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

Dubrovnik, 3. travnja 2013.

1. Neka je a kompleksni broj takav da vrijedi

$$a^5 + a + 1 = 0.$$

Koje vrijednosti može poprimiti izraz $a^2(a-1)$?

2. Ako za realne brojeve x i y vrijedi

$$\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = 1,$$

dokaži da je $x + y = 0$.

3. Odredi sve parove (x, y) cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednakost

$$y^2 = x^3 + 3x^2 + 2x.$$

4. Dan je trapez $ABCD$ kojem su kutovi uz osnovicu $\overline{AB}$ šiljasti, a dijagonale su mu međusobno okomite i sijeku se u točki O. Polupravac OA siječe kružnicu s promjerom $\overline{BD}$ u točki M, a polupravac OB siječe kružnicu s promjerom $\overline{AC}$ u točki N.

Dokaži da točke M, N, C i D leže na jednoj kružnici.

5. Dana je tablica 6×6.

a) Ako je označeno bilo kojih 9 polja tablice, dokaži da je moguće odabrati tri retka i tri stupca koji sadrže sva označena polja.

b) Označi 10 polja tablice tako da koja god tri retka i tri stupca odaberemo, uvijek postoji bar jedno označeno polje koje nije u odabranim stupcima niti recima.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

Dubrovnik, 3. travnja 2013.

1. Odredi nenegativni realni broj a tako da vrijednost izraza

$$a^3 - a^2 - 2\sqrt{a}$$

bude najmanja moguća.

2. Odredi sve proste brojeve p za koje postoje prirodni brojevi x i y takvi da vrijedi

$$\begin{cases} p+1 &= 2x^2 \\ p^2+1 &= 2y^2. \end{cases}$$

3. Dokaži da je među bilo koja četiri broja iz intervala $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ moguće odabrati dva broja, nazovimo ih x i y, tako da vrijedi

$$8\cos x \cos y \cos(x-y) + 1 > 4\left(\cos^2 x + \cos^2 y\right).$$

4. Neka je ABC šiljastokutni trokut i H njegov ortocentar. Pravac kroz točku A okomit na $\overline{AC}$ i pravac kroz točku B okomit na $\overline{BC}$ sijeku se u točki D. Kružnica sa središtem u točki C koja prolazi točkom H siječe kružnicu opisanu trokutu ABC u točkama E i F.

Dokaži da vrijedi $|DE| = |DF| = |AB|$.

5. Na natjecanju je sudjelovalo n učenika i svaki učenik je riješio točno tri zadatka. Za svaka dva učenika postoji točno jedan zadatak koji su obojica riješila, a svaki zadatak je riješilo točno k učenika. Za koje vrijednosti prirodnih brojeva n i k je to moguće?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

Dubrovnik, 3. travnja 2013.

1. Odredi sve prirodne brojeve n takve da je umnožak svih pozitivnih djelitelja broja n jednak n^3. Prikaži ih u kanonskom obliku, tj. pomoću rastava na proste faktore.

2. Niz (a_n) zadan je rekurzivno: $a_1 = 2$, $a_n = 2\,(n + a_{n-1})$ za $n \geqslant 2$.

Dokaži da je $a_n < 2^{n+2}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

3. Neka su a i b realni brojevi. Poznato je da parabola $y = ax^2 + b$ siječe krivulju $y = x + \dfrac{1}{x}$ u točno tri točke. Dokaži da vrijedi $3ab < 1$.

4. Neka su k_1 i k_2 kružnice s promjerima $\overline{AP}$ i $\overline{AQ}$. Neka je T drugo sjecište kružnica k_1 i k_2. Neka je Q' drugo sjecište kružnice k_1 i pravca AQ, a P' drugo sjecište kružnice k_2 i pravca AP. Kružnica k_3 prolazi točkama T, P i P', a kružnica k_4 točkama T, Q i Q'.

Dokaži da pravac na kojem leži zajednička tetiva kružnica k_3 i k_4 prolazi točkom A.

5. Dokaži da bilo koji 2001-člani podskup skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 3000\}$ sadrži tri elementa od kojih su svaka dva međusobno relativno prosta.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.