ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
29. siječnja 2015.

4. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$2015-5\cdot(25\cdot13+13+3\cdot25-10)=2015-5\cdot(325+13+75-10)=$ 1 BOD

$=2015-5\cdot(338+75-10)=$ 1 BOD

$=2015-5\cdot(413-10)=$ 1 BOD

$=2015-5\cdot403=$ 1 BOD

$=2015-2015=$ 1 BOD

$=0$ 1 BOD

…………………………………………………………………….…. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

$2015-5\cdot(25\cdot13+13+3\cdot25-10)=$

$=2015-5\cdot(25\cdot13+13+75-10)=2015-5\cdot(25\cdot13+13+65)=$ 1 BOD

$=2015-5\cdot(25\cdot13+1\cdot13+5\cdot13)=$ 1 BOD

$=2015-5\cdot13\cdot(25+1+5)=$ 1 BOD

$=2015-5\cdot13\cdot31=$ 1 BOD

$=2015-2015=$ 1 BOD

$=0$ 1 BOD

…………………………………………………………………….…. UKUPNO 6 BODOVA

2. Traženi umnožak je $2367\cdot357=845019$. 2 BODA

U umnošku je 5 znamenki širine po 6 mm i 1 znamenka širine 2 mm pa je njihova širina $5\cdot6+1\cdot2=32$ mm. 2 BODA

Između 6 znamenaka je 5 razmaka čija je ukupna širina $5\cdot1=5$ mm. 1 BOD

Ukupna širina umnoška 845019 iznosi $32+5=37$ mm. 1 BOD

…………………………………………...…………………………… UKUPNO 6 BODOVA

3. Iz 3. jednakosti slijedi ♥ + 7 + 7 + 7 = 30 pa je ♥= 9. 1 BOD

Iz 2. jednakosti slijedi ☆ + 7 + ☆ + 7 = 20 pa je ☆= 3. 2 BODA

Iz 1. jednakosti slijedi 9 + 3 + 9 + 7 =☐ pa je ☐=28. 1 BOD

Iz 4. jednakosti slijedi ♦ + 3 + ♦ + 9 = 24 pa je ♦= 6. 2 BODA

……………………………………………………………………..…… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Točni odgovori bez obrazloženja donose po 1 bod.

4. Prvi način:

Ako bi svaki broj imao po 40 listova, komplet bi imao $6\cdot40=240$ listova. 2 BODA

Da bi ukupan broj listova u kompletu bio 260 listova, morali bi dodati $260-240=20$ listova. 2 BODA

Kako je $44-40=4$ i $20:4=5$, godišnji komplet će imati 260 listova ako je 5 brojeva s po 44 lista i 1 broj s 40 listova. 2 BODA

……………………………………………………………………..…… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Ako bi svaki broj imao po 44 lista, komplet bi imao $6\cdot44=264$ lista. 2 BODA

Da bi ukupan broj listova u kompletu bio 260 listova, morali bi oduzeti $264-260=4$ lista.

2 BODA

Kako je $44 - 40 = 4$ i $4 : 4 = 1$, godišnji komplet će imati 260 listova ako je 1 broj s 40 listova i 5 brojeva s po 44 lista. 2 BODA

……………………………………………………………………………..…… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Točan odgovor bez obrazloženja vrijedi 2 boda.

5. Broj 62 se dobije zamjenom znamenaka što znači da je dobiven od broja 26. 1 BOD
   Broj 26 je dobiven prepolavljanjem pa je dobiven od broja $26 \cdot 2 = 52$. 2 BODA
   Broj 52 je dobiven dodavanjem broja 15 pa je dobiven od broja $52 - 15 = 37$. 2 BODA
   Broj 37 je dobiven od zamišljenog zamjenom znamenaka, a to znači da je zamišljeni broj 73. 1 BOD

   ……………………………………………………………………………..…… UKUPNO 6 BODOVA

   Napomena: Točan odgovor bez obrazloženja vrijedi 2 boda.

6. Pravokutnici su: $ABNO$, $ACMO$, $ADLO$, $AEKO$,
   $BCMN$, $BDLN$, $BEKN$
   $CDLM$, $CEKM$
   $DEKL$ po 1 BOD za svaki pravokutnik

   ……………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:
   Ukupna vrijednost kovanica od 2 kune je $248 \cdot 2 = 496$ kuna, 1 BOD
   kovanica od 1 kune je $189 \cdot 1 = 189$ kuna, 1 BOD
   kovanica od 50 lipa je $87 \cdot 50 = 4350$ lipa odnosno 43 kune i 50 lipa, 1 BOD
   kovanica od 20 lipa je $45 \cdot 20 = 900$ lipa odnosno 9 kuna 1 BOD
   i kovanica od 10 lipa je $35 \cdot 10 = 350$ lipa odnosno 3 kune i 50 lipa. 1 BOD
   Ukupno to iznosi 741 kunu. 3 BODA
   Kako je $741 : 3 = 247$, prodano je 247 šalica čokolade. 2 BODA

   ……………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

   Drugi način:
   Ukupna vrijednost kovanica od 2 kune je $248 \cdot 2 = 496$ kn $=49600$ lp, 1 BOD
   kovanica od 1 kune je $189 \cdot 1 = 189$ kn $= 18900$ lp, 1 BOD
   kovanica od 50 lipa je $87 \cdot 50 = 4350$ lp, 1 BOD
   kovanica od 20 lipa je $45 \cdot 20 = 900$ lp 1 BOD
   i kovanica od 10 lipa je $35 \cdot 10 = 350$ lp. 1 BOD
   Ukupno to iznosi 74100 lipa. 3 BODA
   Kako je 3 kn = 300 lp i $74100 : 300 = 247$, prodano je 247 šalica čokolade. 2 BODA

   ……………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
29. siječnja 2015.

5. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$149 \cdot 76 - (55 - 5 \cdot 3) \cdot (100 - 6 \cdot 4) + 76 \cdot 291 =$

$=149 \cdot 76 - (55 - 15) \cdot (100 - 24) + 76 \cdot 291 =$ 1 BOD

$=149 \cdot 76 - 40 \cdot 76 + 76 \cdot 291 =$ 1 BOD

$=76 \cdot (149 - 40 + 291) =$ 1 BOD

$=76 \cdot (109 + 291) =$ 1 BOD

$=76 \cdot 400 =$ 1 BOD

$=30\,400$ 1 BOD

……………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

$149 \cdot 76 - (55 - 5 \cdot 3) \cdot (100 - 6 \cdot 4) + 76 \cdot 291 =$

$=149 \cdot 76 - (55 - 15) \cdot (100 - 24) + 76 \cdot 291 =$ 1 BOD

$=149 \cdot 76 - 40 \cdot 76 + 76 \cdot 291 =$ 1 BOD

$=11324 - 3040 + 22116=$ 2 BODA

$=8284 + 22116=$ 1 BOD

$=30400$ 1 BOD

……………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

2. Prirodni broj je neparan ako mu je znamenka jedinice 1, 3, 5, 7 ili 9. 1 BOD

Da bi broj bio najmanji mogući znamenke mu trebaju biti 1 i 0, a da bi bio najveći mogući znamenke mu trebaju biti 9 i 8. 1 BOD

Najmanji peteroznamenkasti neparni prirodni broj kojemu su 3 znamenke neparne, a 2 parne je broj 10011. 2 BODA

Najveći peteroznamenkasti neparni prirodni broj kojemu su 3 znamenke neparne, a 2 parne je broj 99889. 2 BODA

………………………………………………………...…………… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Točni odgovori bez obrazloženja donose po 2 boda.

3. Prvi način:

Ako podijelimo umnožak sva tri broja s umnoškom prvog i trećeg broja, dobit ćemo drugi broj.

Drugi broj je 13600 : 544 = 25. 2 BODA

Ako podijelimo umnožak sva tri broja s umnoškom drugog i trećeg broja, dobit ćemo prvi broj.

Prvi broj je 13600 : 425 = 32. 2 BODA

Traženi umnožak prvog i drugog broja je $32 \cdot 25 = 800$. 2 BODA

………………………………………………………...………… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Ako je a prvi broj, b drugi broj, a c treći broj, onda vrijedi

$a \cdot b \cdot c = 13600$

$a \cdot c = 544$ 1 BOD

$b \cdot c = 425.$

Iz 1. i 2. jednakosti slijedi $544 \cdot b = 13600$ odnosno $b = 13600 : 544 = 25$. 2 BODA

Iz 1. i 3. jednakosti slijedi $425 \cdot a = 13600$ odnosno $a = 13600 : 425 = 32$. 2 BODA

Traženi umnožak prvog i drugog broja je $a \cdot b = 32 \cdot 25 = 800$. 1 BOD

………………………………………………………...………… UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:
Ako je a prvi broj, b drugi broj, a c treći broj, onda vrijedi

$a \cdot b \cdot c = 13600$

$a \cdot c = 544$ 1 BOD

$b \cdot c = 425.$

Kako je 13600 = 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 5 · 5 · 17, 544 = 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 17 i 425 = 5 · 5 · 17, 2 BODA
onda vrijedi

$a \cdot b \cdot c = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 17$

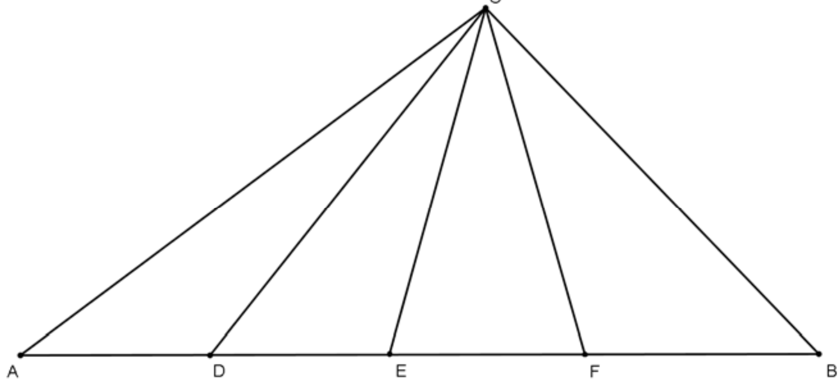
$a \cdot c = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 17$

$b \cdot c = 5 \cdot 5 \cdot 17.$

Slijedi $b = 5 \cdot 5 = 25$ i $a = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$. 2 BODA
Traženi umnožak prvog i drugog broja je $a \cdot b = 32 \cdot 25 = 800$. 1 BOD
…………………………………………………………………...………… UKUPNO 6 BODOVA

4. Broj je djeljiv s 3 ako je zbroj njegovih znamenaka djeljiv s 3 pa je
zbroj $9 + a + 6 + b + 9 = 24 + a + b$ djeljiv s 3. 1 BOD
Kako su a i b prosti brojevi, onda su $a,b \in \{2,3,5,7\}$.
Za $a = 2$ imamo da je $26 + b$ djeljiv s 3 pa je $b = 7$. 1 BOD
Za $a = 3$ imamo da je $27 + b$ djeljiv s 3 pa je $b = 3$. 1 BOD
Za $a = 5$ imamo da je $29 + b$ djeljiv s 3 pa je $b = 7$. 1 BOD
Za $a = 7$ imamo da je $31 + b$ djeljiv s 3 pa je $b \in \{2,5\}$. 1 BOD
Traženi brojevi su 92679, 93639, 95679, 97629, 97659. 1 BOD
……………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA
Napomena: Točni odgovori bez obrazloženja donose 4 boda.

5. Prvi način:
Na dužini $\overline{AB}$ istaknuto je pet točaka koje određuju (5 · 4) : 2 = 10 dužina. 2 BODA
Postoji još 5 dužina kojima je jedna krajnja točka na dužini $\overline{AB}$, a druga je točka C. 1 BOD
Dakle, na slici je ukupno 15 dužina. 1 BOD
Kako svaka istaknuta dužina s dužine $\overline{AB}$ s točkom C određuje jedan trokut, na slici je ukupno
10 trokuta. 2 BODA
………………………………………………………………………..………. UKUPNO 6 BODOVA
Drugi način:



Dužine su $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{AF}$, $\overline{AB}$, $\overline{DE}$, $\overline{DF}$, $\overline{DB}$, $\overline{EF}$, $\overline{EB}$, $\overline{FB}$, $\overline{CA}$, $\overline{CD}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$, $\overline{CB}$ te ih ima
ukupno 15. 4 BODA
Trokuti su $\Delta ADC, \Delta AEC, \Delta AFC, \Delta ABC, \Delta DEC, \Delta DFC, \Delta DBC, \Delta EFC, \Delta EBC, \Delta FBC$ te ih ima
ukupno 10. 2 BODA

…………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Točni odgovori bez obrazloženja donose po 1 bod.

6. Prvi način:

Ako su stranice kvadrata duljine a cm, onda je opseg jednak $4 \cdot a$.

Duljine stranica trokuta uzastopni su brojevi, npr. b, $b+1$ i $b+2$ te je onda opseg
$3 \cdot b + 3 = 3 \cdot (b + 1)$.

Duljine susjednih stranica pravokutnika razlikuju se za 2 cm pa su njihove duljine c i $c + 2$, a opseg je $4 \cdot c + 4$. 1 BOD

Budući da su opsezi jednaki, vrijedi $4 \cdot a = 3 \cdot (b + 1)$ što znači da je a višekratnik od 3. 1 BOD

Ispituju se slučajevi: $a = 3, 6, 9, 12,.....$

Za $a = 3$ cm je $O = 4 \cdot 3 = 12$ cm te je $3 \cdot (b + 1) = 12$ odnosno $b = 3$ cm i
$4 \cdot c + 4 = 12$ odnosno $c = 2$ cm.

Duljine stranica trokuta su 3 cm, 4 cm i 5 cm, a duljine susjednih stranica pravokutnika su 2 cm i 4 cm. 2 BODA

Za $a = 6$ cm je $O = 4 \cdot 6 = 24$ cm te je $3 \cdot (b + 1) = 24$ odnosno $b = 7$ cm i
$4 \cdot c + 4 = 24$ odnosno $c = 5$ cm.

Duljine stranica trokuta su 7 cm, 8 cm i 9 cm, a duljine susjednih stranica pravokutnika su 5 cm i 7 cm. 2 BODA

Za $a = 9$ cm je $O = 4 \cdot 9 = 36$ cm te je $3 \cdot (b + 1) = 36$ odnosno $b = 11$ cm i
$4 \cdot c + 4 = 36$ odnosno $c = 8$ cm.

Duljine stranica trokuta su 11 cm, 12 cm i 13 cm, a duljine susjednih stranica pravokutnika su 8 cm i 10 cm. 2 BODA

Za $a = 12$ cm je $O = 4 \cdot 12 = 48$ cm te je $3 \cdot (b + 1) = 48$ odnosno $b = 15$ cm. Tada bi $b + 1 = 16$ cm bilo veće od 15 cm što nije moguće, a isto tako niti za još veće višekratnike broja 3. 2 BODA

………………………………………………………………………..…. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Kako su duljine stranica trokuta tri uzastopna prirodna broja, ispitujemo moguće slučajeve.

Za 1 cm, 2 cm, 3 cm ne dobije se trokut.

Za 2 cm, 3 cm, 4 cm opseg bi bio 9 cm što nije djeljivo s 4. 1 BOD

Za 3 cm, 4 cm, 5 cm opseg bi bio 12 cm pa bi stranice kvadrata bile duljine 3 cm. Tada je zbroj duljina susjednih stranica pravokutnika 6 cm, a duljine susjednih stranica pravokutnika su 2 cm i 4 cm. 2 BODA

Za 4 cm, 5 cm, 6 cm opseg bi bio 15 cm što nije djeljivo s 4.

Za 5 cm, 6 cm, 7 cm opseg bi bio 18 cm što nije djeljivo s 4.

Za 6 cm, 7 cm, 8 cm opseg bi bio 21 cm što nije djeljivo s 4. 1 BOD

Za 7 cm, 8 cm, 9 cm opseg bi bio 24 cm pa bi stranice kvadrata bile duljine 6 cm. Tada je zbroj duljina susjednih stranica pravokutnika 12 cm, a duljine susjednih stranica pravokutnika su 5 cm i 7 cm. 2 BODA

Za 8 cm, 9 cm, 10 cm opseg bi bio 27 cm što nije djeljivo s 4.

Za 9 cm, 10 cm, 11 cm opseg bi bio 30 cm što nije djeljivo s 4.

Za 10 cm, 11 cm, 12 cm opseg bi bio 33 cm što nije djeljivo s 4. 1 BOD

Za 11 cm, 12 cm, 13 cm opseg bi bio 36 cm pa bi stranice kvadrata bile duljine 9 cm. Tada je zbroj duljina susjednih stranica pravokutnika 18 cm, a duljine susjednih stranica pravokutnika su 8 cm i 10 cm. 2 BODA

Za 12 cm, 13 cm, 14 cm opseg bi bio 39 cm što nije djeljivo s 4.

Za 13 cm, 14 cm, 15 cm opseg bi bio 42 cm što nije djeljivo s 4.

Za 14 cm, 15 cm, 16 cm bi stranica imala duljinu veću od dopuštenih 15 cm. 1 BOD

………………………………………………………………………..…. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Točni odgovori bez obrazloženja donose po 2 boda.

7. Kako je zbroj $m + 13$ djeljiv s 13, a i pribrojnik 13 je djeljiv s 13, onda i m mora biti djeljiv s 13. 2 BODA

S obzirom da je razlika $m - 17$ djeljiva sa 17, a i umanjitelj 17 je djeljiv sa 17, onda i m mora biti djeljiv sa 17. 2 BODA

Budući da kada se m podijeli s 2 dobijemo količnik djeljiv s 2, onda je m djeljiv s 4. 2 BODA
Dakle, m je troznamenkasti broj djeljiv s 13, 17 i 4. 1 BOD
Kako je V(13,17,4) = 884, onda je m = 884. 3 BODA
………………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA
Napomena: Točan odgovor bez obrazloženja donosi 4 boda.

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
29. siječnja 2015.

6. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1.

$\frac{1}{4}+1\frac{1}{8}+0.5=\frac{2}{8}+1\frac{1}{8}+\frac{4}{8}=1\frac{7}{8}$ 1 BOD

$1\frac{7}{8}-0.75-0.5=\frac{15}{8}-\frac{6}{8}-\frac{4}{8}=\frac{5}{8}$ 1 BOD

$1\frac{7}{8}-\frac{1}{4}-0.75=\frac{15}{8}-\frac{2}{8}-\frac{6}{8}=\frac{7}{8}$ 1 BOD

$1\frac{7}{8}-\frac{7}{8}-\frac{5}{8}=\frac{15}{8}-\frac{7}{8}-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$ 1 BOD

$1\frac{7}{8}-\frac{3}{8}-0.5=\frac{15}{8}-\frac{3}{8}-\frac{4}{8}=1$ 1 BOD

$1\frac{7}{8}-1-0.75=\frac{15}{8}-\frac{8}{8}-\frac{6}{8}=\frac{1}{8}$ 1 BOD

0.75	$\frac{7}{8}$ = 0.875	$\mathbf{\frac{1}{4}}$
$\frac{1}{8}$ = 0.125	$\frac{5}{8}$ = =0.625	$\mathbf{1\frac{1}{8}}$
1	$\frac{3}{8}$ = 0.375	**0.5**

…………………………………………………………………………….…. UKUPNO 6 BODOVA

2. Prvi način:

Vlado je skupio $\frac{2}{3}\cdot 72=48$ boca. 1 BOD

Petar je skupio $\frac{4}{3}\cdot 48=64$ boca. 1 BOD

Marko, Vlado i Petar su zajedno skupili $72 \cdot 2 = 144$ boce. 1 BOD

Kako je $144 - (48 + 64) = 144 - 112 = 32$, 2 BODA

to znači da je Marko skupio 32 plastične boce. 1 BOD

……………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Vlado je skupio $72-\frac{1}{3}\cdot 72=72-24=48$ boca. 1 BOD

Petar je skupio $48+\frac{1}{3}\cdot 48=48+16=64$ boca. 1 BOD

Marko, Vlado i Petar su zajedno skupili $72 \cdot 2 = 144$ boce. 1 BOD

Kako je $144 - (48 + 64) = 144 - 112 = 32$, 2 BODA

to znači da je Marko skupio 32 plastične boce. 1 BOD

……………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

3. Prvi način:

U školi ima određen broj grupa od $7 + 8 = 15$ učenika. 1 BOD

Takvih grupa ima $675 : 15 = 45$. 1 BOD

Dječaka ima $45 \cdot 7 = 315$. 2 BODA

Kako na 9 dječaka dolazi 1 učitelj i $315 : 9 = 35$,

u školi ima 35 učitelja. 2 BODA

……………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

U školi je $\frac{7}{15}$ dječaka i $\frac{8}{15}$ djevojčica od ukupnog broja učenika. 2 BODA

Ukupno ima 675 učenika pa dječaka ima $\frac{7}{15}\cdot 675=7\cdot 45=315$. 2 BODA

Kako na 9 dječaka dolazi 1 učitelj i $315 : 9 = 35$,

u školi ima 35 učitelja. 2 BODA

……………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

4. Ako je broj djeljiv s 15, onda je djeljiv i s 5 i s 3.

Zbog djeljivosti s 5 znamenka b zadanog broja može biti 5 ili 0. 1 BOD

Zbog djeljivosti s 3 zbroj znamenaka zadanog broja mora biti djeljiv s 3. 1 BOD

1. slučaj: $b = 0$

Zadani osmeroznamenkasti broj je oblika $\overline{aaaa0000}$. Zbroj njegovih znamenaka je $4 \cdot a$ pa vrijedi da je $a \in \{ 3, 6, 9 \}$.

Traženi brojevi su 33 330 000, 66 660 000 i 99 990 000. 2 BODA

2. slučaj $b = 5$

Zadani osmeroznamenkasti broj je oblika $\overline{aaaa5555}$. Zbroj njegovih znamenaka je $4 \cdot a + 20$ pa vrijedi da je $a \in \{ 1, 4, 7 \}$.

Traženi brojevi su 11 115 555, 44 445 555 i 77 775 555. 2 BODA

……………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

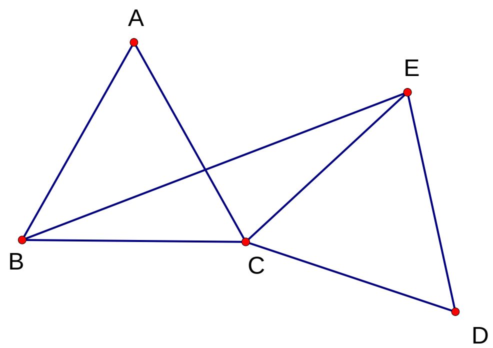
5. Razlika mase posude ispunjene do vrha vodom i mase posude do pola ispunjene vodom je polovina mase vode te iznosi $17-9.5=7.5$ kg. 2 BODA

Masa vode u punoj posudi je $2\cdot 7.5=15$ kg. 2 BODA

Masa prazne posude je $17-15=2$ kg. 2 BODA

……………………………………………………………………..…… UKUPNO 6 BODOVA

6. Prvi način:



1 BOD

Trokut BCE je jednakokračan trokut jer vrijedi da je $|BC| = |CE|$ što je posljedica sukladnosti jednakostraničnih trokuta ABC i CDE. 2 BODA

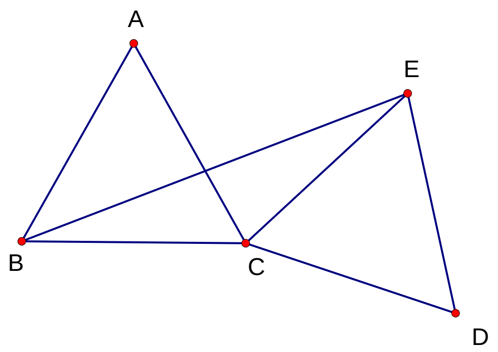
Veličina svakog unutarnjeg kuta jednakostraničnih trokuta je 60^{o} pa vrijedi da je
$|\measuredangle BCE| = |\measuredangle BCA| + |\measuredangle ACE| = 60° + 74°30' = 134°30'$. 2 BODA

$\overline{BE}$ je osnovica jednakokračnog trokuta BCE pa vrijedi da je
$|\measuredangle EBC| = |\measuredangle CEB| = (180° - 134°30') : 2 = 45°30' : 2 = 44°90' : 2 = 22°45'$. 3 BODA

Dalje slijedi da je $|\measuredangle ABE| = |\measuredangle ABC| - |\measuredangle EBC| = 60° - 22°45' = 37°15'$. 2 BODA

……………………………………………………………………………...…. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:



1 BOD

Trokut BCE je jednakokračan trokut jer vrijedi da je $|BC| = |CE|$ što je posljedica sukladnosti jednakostraničnih trokuta ABC i CDE. 2 BODA

Veličina svakog unutarnjeg kuta jednakostraničnih trokuta je 60^{o} pa vrijedi da je
$|\measuredangle BCE| = |\measuredangle BCA| + |\measuredangle ACE| = 60° + 74°30' = 134°30'$. 2 BODA

$\overline{BE}$ je osnovica jednakokračnog trokuta BCE pa vrijedi da je
$|\measuredangle EBC| = |\measuredangle CEB| = (180° - 134°30') : 2 = 45°30' : 2 = 2730' : 2 = 1365' = 22°45'$. 3 BODA

Dalje slijedi da je $|\measuredangle ABE| = |\measuredangle ABC| - |\measuredangle EBC| = 60° - 22°45' = 37°15'$. 2 BODA

……………………………………………………………………………...…. UKUPNO 10 BODOVA

7. Iz Zagreba je krenuo nepoznat broj putnika odnosno x putnika.

U Zadru ih je izišlo $\frac{1}{4}x$ pa je put prema Šibeniku nastavilo $\frac{3}{4}x$ putnika. 1 BOD

U Šibeniku je izišlo $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}x = \frac{3}{10}x$ putnika. 1 BOD

Razlika broja putnika koji su izišli u Šibeniku i onih koji su izišli u Zadru je
$\frac{3}{10}x - \frac{1}{4}x = \frac{6}{20}x - \frac{5}{20}x = \frac{1}{20}x$ odnosno 2 putnika. 2 BODA

Ako je $\frac{1}{20}$ od $x = 2$, onda je $x = 40$. Dakle, iz Zagreba je na put krenulo 40 putnika. 2 BODA

U Zadru je izišlo $\frac{1}{4} \cdot 40 = 10$ putnika, a u Šibeniku $\frac{3}{10} \cdot 40 = 12$ putnika. 2 BODA

U Split je stiglo $40 - (10 + 12) = 18$ putnika. 2 BODA

………..……………………………………………………………...……… UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
29. siječnja 2015.

7. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:
   Biciklist je za 1 sat i 24 minute odnosno 1.4 sata — 1 BOD
   prešao put duljine $1.4 \cdot 30 = 42$ km. — 1 BOD
   U povratku je putovao 1 sat i 12 minuta — 1 BOD
   odnosno 1.2 sata. — 1 BOD
   Brzina na povratku je $42 : 1.2 = 35$ km/h. — 2 BODA
   …………………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA
   Drugi način:
   Biciklist je vozio brzinom od $\frac{1}{2}$ km/min odnosno 0.5 km/min. — 1 BOD
   Za 1 sat i 24 minute odnosno za 84 minute prešao je put duljine $0.5 \cdot 84 = 42$ km. — 1 BOD
   U povratku je putovao 1 sat i 12 minuta — 1 BOD
   odnosno 72 minute. — 1 BOD
   Brzina na povratku je $42 : 72 = \frac{7}{12}$ km/min. — 2 BODA
   …………………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

2. Iz uvjeta zadatka moguće je zapisati jednakost $x_1 + x_2 ... + x_{12} = 56.4$. — 2 BODA
   Nakon dodavanja dvaju novih brojeva jednakost glasi $x_1 + x_2 ... + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 78.4$. — 2 BODA
   Oduzimanjem prve jednakosti od druge dobivamo $x_{13} + x_{14} = 22$. — 1 BOD
   Srednja vrijednost dvaju brojeva čiji je zbroj 22 jest $\overline{x}_{(x_{13}+x_{14})} = 11$. — 1 BOD
   …………………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

3. Prije 4 godine susjeda Ana je imala 32 kokoši.
   Prije 3 godine susjeda Ana je imala 125% od 32 odnosno 40 kokoši. — 2 BODA
   Prije 2 godine susjeda Ana je imala 125% od 40 odnosno 50 kokoši. — 1 BOD
   Prije godinu dana je imala 80% od 50 odnosno 40 kokoši. — 2 BODA
   Ove godine ima 80% od 40 odnosno 32 kokoši. — 1 BOD
   …………………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

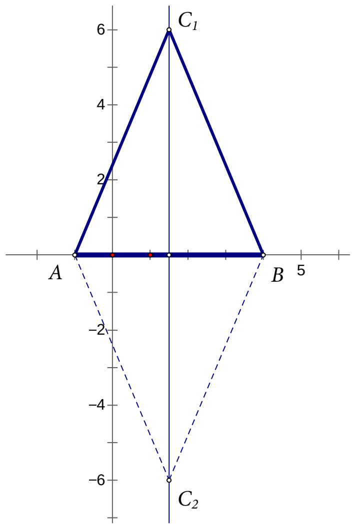
4. Prvi način:
   Troznamenkastih brojeva ima 900 pa je toliko i kuglica u bubnju. — 1 BOD
   Zbroj 2 može se dobiti izvlačenjem triju kuglica (200, 110, 101). — 1 BOD
   Zbroj 5 može se dobiti izvlačenjem 15 kuglica (500, 410, 401, 320, 302, 311, 230, 203, 221, 212, 140, 104, 131, 113, 122). — 2 BODA
   Zbroj znamenaka jednak 2 ili 5 može se ostvariti izvlačenjem jedne od 18 kuglica. Vjerojatnost da se to dogodi je $18 : 900 = 0.02 = 2\%$. — 2 BODA
   …………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA
   Drugi način:
   Skup jednostavnih događaja je S = {100, 101, 102, 103,…997, 998, 999}. — 1 BOD
   Događaj A je događaj kada je izvučena kuglica na kojoj je broj čiji je zbroj znamenaka 2 ili 5. Tada je A = {200, 110, 101, 500, 410, 401, 140, 104, 320, 302, 230, 203, 311, 131, 113, 221, 212, 122}. — 3 BODA

Tražena vjerojatnost je $P(A)=\frac{k(A)}{k(S)}=\frac{18}{900}=\frac{2}{100}=2\%$. 2 BODA

…………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Kao ispravan odgovor ravnopravno prihvatiti 2%, 0.02 ili $\frac{2}{100}$.

5. Skica:



1 BOD

Duljina osnovice je 5 jedinica. 1 BOD

Kako površina trokuta mora biti 15 kvadratnih jedinica, to znači da duljina visine na osnovicu $\overline{AB}$ mora biti 6 jedinica. 1 BOD

S obzirom da je ΔABC jednakokračan, vrh C se nalazi na simetrali osnovice koja prolazi točkom s koordinatama (1.5, 0). 1 BOD

Zadatak ima 2 rješenja: $C_1(1.5, 6)$ i $C_2(1.5, -6)$. 2 BODA

……………………………………………………………………..…… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Točni odgovori bez obrazloženja donose 3 boda.

6. Označimo s x broj kilograma trešanja po 18 kn.

Ukupna vrijednost trešanja po 18 kn je $x\cdot 18$ kn. 1 BOD

Ukupna vrijednost trešanja po 25 kn je $2012\cdot 25 = 50\,300$ kn. 1 BOD

Ukupna masa trešanja je $x + 2012$ kg. 1 BOD

Ukupna masa trešanja prodaje se za 20 kn po kilogramu pa je njena vrijednost $(x + 2012)\cdot 20$ kn. 1 BOD

S obzirom da vrijednost ukupne mase trešanja mora biti jednaka zbroju vrijednosti jeftinijih i skupljih trešanja, vrijedi

$(x + 2012)\cdot 20 = x\cdot 18 + 50300$ 2 BODA

$20x + 40240 = 18x + 50300$ 2 BODA

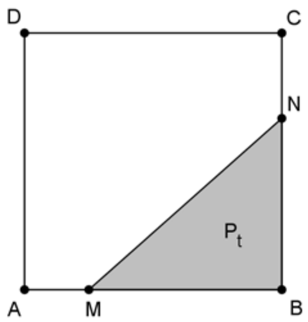
$2x = 10060$ 1 BOD

$x = 5030$ kg

Treba pomiješati 5030 kg trešanja čija je cijena 18 kn/kg. 1 BOD

…………………………………………………………..………………. UKUPNO 10 BODOVA

7. Skica:



1 BOD

Označimo duljinu stranice danog kvadrata sa *a*.

Tada je površina tog kvadrata $P_k = a^2$. 1 BOD

Iz uvjeta zadatka vrijedi $\left|\overline{BM}\right| = \frac{3}{4}a$. 1 BOD

Trokut *MBN* je pravokutan trokut s katetama $\overline{BM}$ i $\overline{BN}$. 1 BOD

Ako označimo $b = \left|\overline{BN}\right|$, onda površina pravokutnog trokuta *MBN* iznosi

$$P_t = \frac{|BM| \cdot |BN|}{2} = \frac{\frac{3}{4}a \cdot b}{2} = \frac{3}{8}a \cdot b.$$ 1 BOD

Iz uvjeta zadatka vrijedi $\frac{P_t}{P_k} = \frac{\frac{3}{8}a \cdot b}{a \cdot a} = \frac{1}{4}$ 1 BOD

pa slijedi da je $b = |BN| = \frac{2}{3}a$. 2 BODA

To znači da je $|CN| = \frac{1}{3}a$ 1 BOD

pa je $\frac{|BN|}{|CN|} = \frac{\frac{2}{3}a}{\frac{1}{3}a} = \frac{2}{1} = 2:1$.

Dakle, točka *N* dijeli dužinu $\overline{BC}$ u omjeru 2:1 (počevši od vrha *B*). 1 BOD

……………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
29. siječnja 2015.

8. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$2014 < \sqrt{x} < 2015 \;/^2$ 1 BOD

$2014^2 < x < 2015^2$ 1 BOD

$2015^2 - 2014^2 = (2015-2014)(2015+2014) = 4029$ 2 BODA

Ukupan broj prirodnih brojeva x za koje je nejednakost točna jednak je

$2015^2 - 2014^2 - 1 = 4029 - 1 = 4028$. 2 BODA

………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

$2014 < \sqrt{x} < 2015 \;/^2$ 1 BOD

$2014^2 < x < 2015^2$ 1 BOD

4 056 196 < x < 4 060 225 2 BODA

Nejednakost zadovoljavaju brojevi 4 056 197, 4 056 198, … ,4 060 224. 1 BOD

Ukupan broj prirodnih brojeva x za koje je nejednakost točna jednak je

4 060 224 – 4 056 196 = 4028. 1 BOD

………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

2. Prvi način:

Razmjer $a : b = 2 : 5$ možemo napisati u obliku $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$. 1 BOD

Podijelimo li brojnik i nazivnik zadanog izraza s b^2 i uvrstimo da je $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$, dobivamo

$$\frac{a^2}{ab+b^2} = \frac{\frac{a^2}{b^2}}{\frac{ab}{b^2} + \frac{b^2}{b^2}} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2}{\frac{a}{b} + 1} =$$ 2 BODA

$$= \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^2}{\frac{2}{5} + 1} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{7}{5}} =$$ 2 BODA

$$= \frac{4 \cdot 5}{25 \cdot 7} = \frac{4}{35}$$ 1 BOD

………………………………………………………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Razmjer $a : b = 2 : 5$ možemo napisati u obliku $a = \frac{2}{5}b$. 1 BOD

$$\frac{a^2}{ab+b^2} = \frac{\left(\frac{2}{5}b\right)^2}{\frac{2}{5}b \cdot b + b^2} = \frac{\frac{4}{25}b^2}{\frac{2}{5}b^2 + b^2} =$$ 2 BODA

$$= \frac{\frac{4}{25}b^2}{\frac{7}{5}b^2} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{7}{5}} =$$ 2 BODA

$$= \frac{4 \cdot 5}{25 \cdot 7} = \frac{4}{35}$$ 1 BOD

………………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

Razmjer $a : b = 2 : 5$ možemo napisati u obliku $b = \frac{5}{2}a$. 1 BOD

$$\frac{a^2}{ab + b^2} = \frac{a^2}{a \cdot \frac{5}{2}a + \left(\frac{5}{2}a\right)^2} = \frac{a^2}{\frac{5}{2}a^2 + \frac{25}{4}a^2} =$$ 2 BODA

$$= \frac{a^2}{\frac{35}{4}a^2} = \frac{1}{\frac{35}{4}} =$$ 2 BODA

$$= \frac{4}{35}$$ 1 BOD

………………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

Četvrti način:

Razmjer $a : b = 2 : 5$ možemo napisati u obliku $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$. 1 BOD

$$\frac{a^2}{ab + b^2} = \frac{a^2}{b(a + b)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{a + b} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b} + 1} =$$ 2 BODA

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5} + 1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{5}} =$$ 2 BODA

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{35}$$ 1 BOD

………………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

Peti način:

Budući da vrijedi $a : b = 2 : 5$, postoji racionalan broj k takav da je $a = 2k$ i $b = 5k$. 1 BOD

$$\frac{a^2}{ab + b^2} = \frac{(2k)^2}{2k \cdot 5k + (5k)^2} =$$ 2 BODA

$$= \frac{4k^2}{10k^2 + 25k^2} = \frac{4k^2}{35k^2} =$$ 2 BODA

$$= \frac{4}{35}$$ 1 BOD

………………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

3. Prvi način:

Kocka ima 8 vrhova. S tri strane obojeno je 8 jediničnih kockica koje su u vrhovima velike kocke. 2 BODA

Kocka ima 12 bridova. S dvije strane obojeno je 12 jediničnih kockica koje su uz bridove velike kocke. 2 BODA

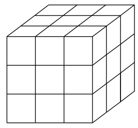
Kocka ima 6 strana. S jedne strane obojeno je 6 jediničnih kockica, po jedna na svakoj strani kocke. 1 BOD

Niti s jedne strane nije obojena 27 – 8 – 12 – 6 = 1 jedinična kockica. 1 BOD

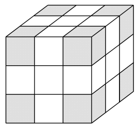
……………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Nakon lijepljenja jediničnih kockica, velika kocka izgleda kao na donjoj slici.

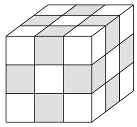


S tri strane obojeno je 8 jediničnih kockica.



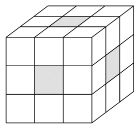
2 BODA

S dvije strane obojeno je 12 jediničnih kockica.



2 BODA

S jedne strane obojeno je 6 jediničnih kockica.



1 BOD

Niti s jedne strane nije obojena   27 – 8 – 12 – 6 = 1 jedinična kockica. 1 BOD

……………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

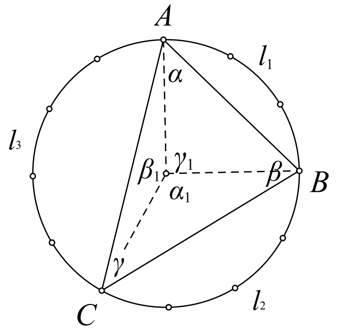
Napomena: Točni odgovori bez obrazloženja ili bez slike donose po 1 bod.

4. Neka je n broj stranica (vrhova) traženog mnogokuta.
Iz jednog vrha tog mnogokuta može se nacrtati $n - 3$ dijagonale,
a ukupan broj dijagonala tog mnogokuta jednak je $\frac{n(n-3)}{2}$. 1 BOD
U mnogokutu koji ima $n + 5$ stranica,
iz jednog vrha može se nacrtati $n + 5 - 3 = n + 2$ dijagonale,
a ukupan broj dijagonala tog mnogokuta je $\frac{(n+5)(n+2)}{2}$. 1 BOD
Prema uvjetu zadatka vrijedi: $\frac{n(n-3)}{2} + 50 = \frac{(n+5)(n+2)}{2}$ 1 BOD
Rješavanjem ove jednadžbe dobiva se redom
$n(n-3) + 100 = (n+5)(n+2)$ 1 BOD
$n^2 - 3n + 100 = n^2 + 7n + 10$ 1 BOD
$10n = 90$
i konačno $n = 9$. 1 BOD

…………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Rješenje dobiveno metodom uzastopnog približavanja (npr. ispunjavanjem tablice) može se bodovati s 10 bodova. Ako nema svih računa, nego samo točan konačan rezultat, onda se boduje s 2 boda.

5. Prvi način:



Duljine kružnih lukova $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ i $\overset{\frown}{AC}$ označimo redom l_1, l_2 i l_3, a odgovarajuće im središnje kutove γ_1, α_1 i β_1.

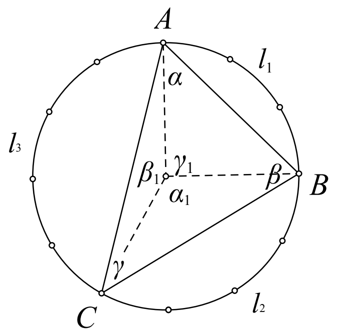
Budući da je $l_1 = \frac{3}{12} \cdot 2r\pi = \frac{1}{4} \cdot 2r\pi$ i $l_1 = \frac{r\pi}{180°} \cdot \gamma_1$, slijedi da je $\gamma_1 = \frac{r\pi}{2} \cdot \frac{180°}{r\pi} = 90°$. 2 BODA

Analogno dobivamo da je $\alpha_1 = 120°$ i $\beta_1 = 150°$. 2 BODA

Kutovi trokuta α, β i γ obodni su kutovi odgovarajućih središnjih kutova α_1, β_1 i γ_1 pa je konačno $\alpha = 60°$, $\beta = 75°$ i $\gamma = 45°$. 2 BODA

…………………………………………………………………………..…… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:



Duljine kružnih lukova iste kružnice proporcionalne su veličinama pripadnih središnjih kutova pa uz oznake kao na slici vrijedi $\gamma_1 : \alpha_1 : \beta_1 = 3 : 4 : 5$. 1 BOD

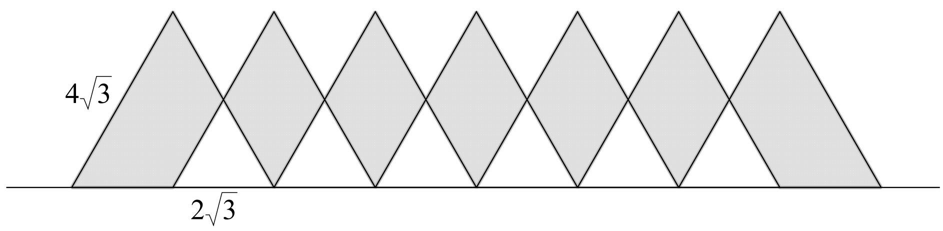
Budući da je $\gamma_1 + \alpha_1 + \beta_1 = 360°$ i $360° : (3 + 4 + 5) = 360° : 12 = 30°$, 1 BOD

zaključujemo da je $\gamma_1 = 3 \cdot 30° = 90°$, $\alpha_1 = 4 \cdot 30° = 120°$ i $\beta_1 = 5 \cdot 30° = 150°$. 2 BODA

Kutovi trokuta α, β i γ obodni su kutovi odgovarajućih središnjih kutova α_1, β_1 i γ_1 pa je konačno $\alpha = 60°$, $\beta = 75°$ i $\gamma = 45°$. 2 BODA

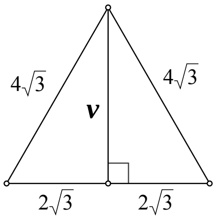
…………………………………………………………………………..…… UKUPNO 6 BODOVA

6. Prvi način:



Površina sivog dijela jednaka je zbroju površina 7 sukladnih jednakostraničnih trokuta sa stranicom duljine $4\sqrt{3}$ cm umanjenim za zbroj $2 \cdot 6 = 12$ površina (na „bijelim mjestima“ preklopljeni su i oduzeti dijelovi dvaju trokuta!) jednakostraničnih trokuta sa stranicom duljine $2\sqrt{3}$ cm. 3 BODA

Primjenom Pitagorinog poučka izračuna se duljina visine većeg trokuta.

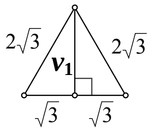


$v^2 = (4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 48 - 12 = 36$

$v = 6$ cm 2 BODA

Površina tog trokuta jednaka je $P_1 = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3}$ cm^2. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka izračuna se duljina visine manjeg trokuta.



$v_1^2 = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2 = 12 - 3 = 9$

$v_1 = 3$ cm 2 BODA

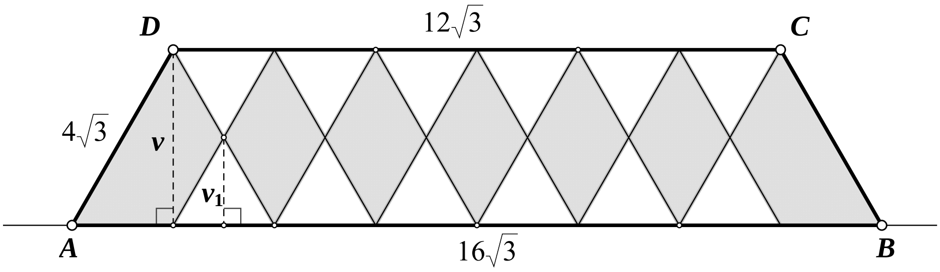
Površina tog trokuta jednaka je $P_2 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$ cm^2. 1 BOD

Površina sivog dijela lika jednaka je $7 \cdot P_1 - 12 \cdot P_2 = 7 \cdot 12\sqrt{3} - 12 \cdot 3\sqrt{3} = 84\sqrt{3} - 36\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$ cm^2.

1 BOD

…………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

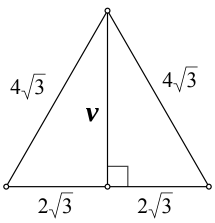
Drugi način:



Površina sivog dijela jednaka je površini trapeza $ABCD$ umanjenoj za zbroj površina 12 „bijelih“ jednakostraničnih trokuta. 2 BODA

Duljine osnovica trapeza su $|AB| = 4 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ cm i $|CD| = 3 \cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ cm 1 BOD

Duljina visine trapeza jednaka je duljini visine jednakostraničnog trokuta sa stranicom duljine $4\sqrt{3}$ cm. Određujemo je primjenom Pitagorinog poučka.



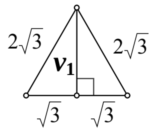
$v^2 = (4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 48 - 12 = 36$

$v = 6$ cm 2 BODA

Površina trapeza $ABCD$ jednaka je

$P_{ABCD} = \frac{16\sqrt{3} + 12\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 14\sqrt{3} \cdot 6 = 84\sqrt{3}$ cm^2. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka izračuna se duljina visine manjeg trokuta.



$v_1^2 = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2 = 12 - 3 = 9$

$v_1 = 3$ cm 2 BODA

Površina tog trokuta jednaka je $P_1 = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$ cm^2. 1 BOD

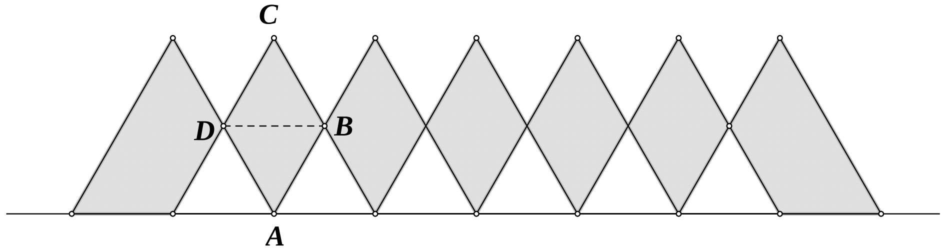
Površina sivog dijela lika jednaka je $P_{ABCD} - 12 \cdot P_1 = 84\sqrt{3} - 12 \cdot 3\sqrt{3} = 84\sqrt{3} - 36\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$ cm^2 .

1 BOD

…………………………………………………………………...……. UKUPNO 10 BODOVA

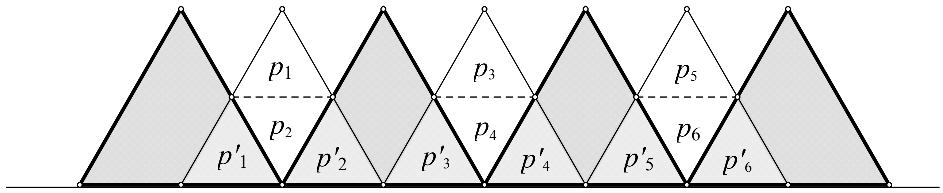
Treći način:

Romb *ABCD* na slici sastavljen je od dva sukladna jednakostranična trokuta sa stranicom duljine $2\sqrt{3}$ cm. Ti su trokuti sukladni „bijelim“ trokutima sa slike



2 BODA

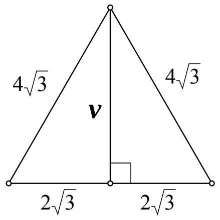
Neke od „sivih“ rombova možemo podijeliti na trokute i presložiti tako da popune bijele dijelove, kao što je prikazano na slici:



2 BODA

Dakle, površina sivih dijelova slike jednaka je površini četiriju jednakostraničnih trokuta sa stranicom duljine $4\sqrt{3}$ cm. 2 BODA

Primjenom Pitagorinog poučka izračuna se duljina visine većeg trokuta.



$v^2 = (4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 48 - 12 = 36$

$v = 6$ cm 2 BODA

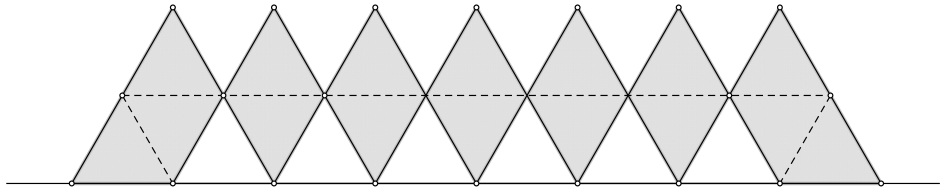
Površina tog trokuta jednaka je $P = \dfrac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3}$ cm^2. 1 BOD

Površina sivog dijela lika jednaka je $4 \cdot P = 4 \cdot 12\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$ cm^2 . 1 BOD

…………………………………………………………………...……. UKUPNO 10 BODOVA

Četvrti način:

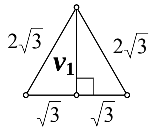
Sivi dio zadanog lika možemo podijeliti, kao što je prikazano na slici, na 16 jednakostraničnih trokuta.



3 BODA

Budući da su dužinama spajana polovišta stranica jednakostraničnih trokuta, dobiveni su trokuti slični zadanom „velikom“ trokutu, s upola kraćim stranicama. Dakle, duljina stranice tih trokuta je $2\sqrt{3}$ cm. 3 BODA

Primjenom Pitagorinog poučka izračuna se duljina visine manjeg trokuta.



$v_1^2 = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2 = 12 - 3 = 9$

$v_1 = 3$ cm 2 BODA

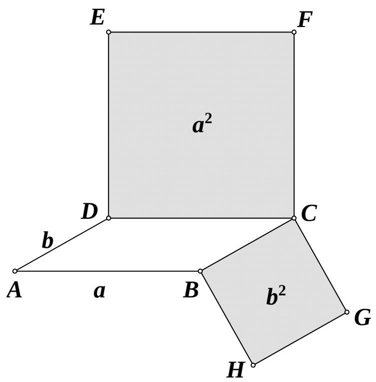
Površina tog trokuta jednaka je $P_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$ cm^2. 1 BOD

Površina sivog dijela lika jednaka je $16 \cdot P_1 = 16 \cdot 3\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$ cm^2 . 1 BOD

…………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Točno izračunata površina velikog trokuta, odnosno površina malog trokuta vrednuje se s po 3 boda (ako su ispravno izračunate obje površine, to donosi ukupno 6 bodova).

7. Prvi način:



Skica ili opis (Označimo sa a duljinu veće, a s b duljinu kraće stranice.) 1 BOD

Tada vrijedi $2a + 2b = 30$ odnosno $a + b = 15$

i $a^2 + b^2 = 113$. 1 BOD

Budući da je $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, nakon uvrštavanja dobivamo $15^2 = 113 + 2ab$ odnosno $2ab = 225 - 113 = 112$. 2 BODA

Budući da je $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, nakon uvrštavanja dobivamo

$(a-b)^2 = (a^2 + b^2) - 2ab = 113 - 112$, odnosno $(a-b)^2 = 1$. 2 BODA

Ako je $(a-b)^2 = 1$, onda (uz pretpostavku da je $a > b$ tj. da je $a - b > 0$) mora biti $a - b = 1$.

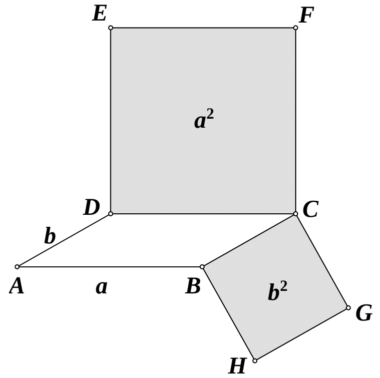
2 BODA

Duljine stranica zadovoljavaju sustav jednadžbi $\begin{cases} a + b = 15 \\ a - b = 1 \end{cases}$ 1 BOD

Rješavanjem sustava nalazimo rješenje $a = 8$ cm i $b = 7$ cm. 1 BOD

…………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:



Skica ili opis (Označimo sa a duljinu veće, a s b duljinu kraće stranice.) 1 BOD

Tada vrijedi $2a+2b=30$ odnosno $a+b=15$

i $a^2+b^2=113$. 1 BOD

Iz $a+b=15$ slijedi da je $b=15-a$ pa nakon uvrštavanja dobivamo $a^2+(15-a)^2=113$ 1 BOD

odnosno $a^2+225-30a+a^2=113$. 1 BOD

Sređivanjem jednadžbe dobivamo $2a^2-30a+112=0$, a nakon dijeljenja cijele jednadžbe s 2, dobivamo $a^2-15a+56=0$. 1 BOD

Tu jednadžbu možemo faktorizirati tj. napisati u obliku umnoška $(a-8)(a-7)=0$. 2 BODA

Umnožak dvaju brojeva jednak je nuli samo u slučaju da je jedan od tih brojeva jednak nuli, 1 BOD

tj. samo u slučaju a = 8 cm (i tada je b = 7 cm) ili a = 7 cm (i tada je b = 8 cm). 1 BOD

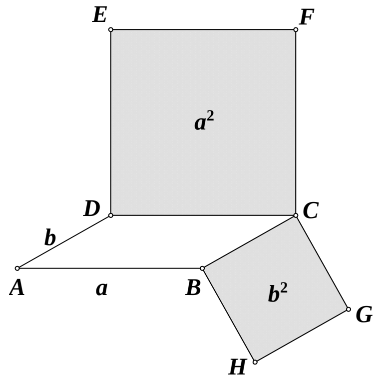
Kako smo označili sa a dulju stranicu paralelograma, drugi slučaj otpada.

Dakle, a = 8 cm i b = 7 cm. 1 BOD

……………………………………………………………………...……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Analogan postupak i bodovanje provodi se u slučaju da je korištena supstitucija $a=15-b$.

Napomena: Rješenje dobiveno metodom uzastopnog približavanja (npr. ispunjavanjem tablice) može se bodovati s 10 bodova, ali mora biti jasno navedeno značenje korištenih oznaka i vidljiv zapis postupka (račun). Dakle, tim načinima rješavanja mora prethoditi skica ili opis



(Označimo sa a duljinu veće, a s b duljinu kraće stranice.)

Tada vrijedi $2a+2b=30$ odnosno $a+b=15$

i $a^2+b^2=113$.

a	14	13	12	11	10	9	8
$b = 15 - a$	1	2	3	4	5	6	7
$a^2 + b^2$	197	173	153	127	125	117	113

U tom se slučaju rješenje može bodovati s 10 bodova. Ako oznaka, računa i objašnjenja nema, točan konačan rezultat donosi 2 boda.