ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
27. veljače 2015.

4. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Ako 30 poruka u mreži *Mobi x* košta 18 kn, onda 10 poruka košta $18 : 3 = 6$ kuna. 4 BODA

Ako 40 poruka u mreži *Mobi y* košta 28 kn, onda 10 poruka košta $28 : 4 = 7$ kuna. 4 BODA

Kako je $6 < 7$, povoljnije su cijene SMS poruka u mreži *Mobi x*. 2 BODA

………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Ako 30 poruka u mreži *Mobi x* košta 18 kn, onda 120 poruka košta $18 \cdot 4 = 72$ kune. 4 BODA

Ako 40 poruka u mreži *Mobi y* košta 28 kn, onda 120 poruka košta $28 \cdot 3 = 84$ kune. 4 BODA

Kako je $72 < 84$, povoljnije su cijene SMS poruka u mreži *Mobi x*. 2 BODA

………………………………………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Ako 30 poruka u mreži *Mobi x* košta 1800 lp, onda 1 poruka košta $1800 : 30 = 60$ lp. 4 BODA

Ako 40 poruka u mreži *Mobi y* košta 2800 lp, onda 1 poruka košta $2800 : 40 = 70$ lp. 4 BODA

Kako je $60 < 70$, povoljnije su cijene SMS poruka u mreži *Mobi x*. 2 BODA

………………………………………………………...……………..…… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Točan odgovor bez obrazloženja donosi 2 boda.

2. Troznamenkasti brojevi čiji je umnožak znamenaka jednak broju 2 mogu biti brojevi 112, 211 i 121. 2 BODA

Samo je broj 121 palindrom. 1 BOD

Broj 121 je dobiven dijeljenjem nekog broja s 3 odnosno dobiven je od broja $121 \cdot 3 = 363$.

2 BODA

Broj 363 je dobiven oduzimanjem broja 129 pa je dobiven od broja $363 + 129 = 492$. 2 BODA

Broj 492 je dobiven množenjem zamišljenog broja s 4, a to znači da je zamišljeni broj

$492 : 4 = 123$. Dakle, Ivo je zamislio broj 123. 3 BODA

………………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

3. Prvi način:

Markov račun je iznosio 19 kuna i 60 lipa. 1 BOD

Da nije kupio niti jednu bilježnicu, mogao bi kupiti 11 olovaka za što bi platio 18 kn i 70 lp, ali bi mu ostalo još 90 lp. 1 BOD

Ako je kupio 1 bilježnicu i platio 5 kn i 40 lp, za olovke je preostalo 14 kn i 20 lp. Za taj bi novac mogao kupiti 8 olovaka, no još bi mu ostalo 60 lp. 2 BODA

Da je kupio 2 bilježnice i platio 10 kn i 80 lp, za olovke bi preostalo 8 kn i 80 lp. Za taj novac može kupiti 5 olovaka, ali bi mu ostalo još 30 lipa. 2 BODA

Pretpostavimo da je kupio 3 bilježnice i platio 16 kn i 20 lp. Ostatkom novca od 3 kune i 40 lipa može kupiti točno 2 olovke. 2 BODA

Za 4 bilježnice bi mu bila potrebna 21 kn i 60 lp, a toliko nije potrošio. 1 BOD

Marko je kupio 3 bilježnice i 2 olovke. 1 BOD

………………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Markov račun je iznosio 19 kuna i 60 lipa odnosno 1960 lipa. 1 BOD

Da nije kupio niti jednu bilježnicu, mogao bi kupiti 11 olovaka za što bi platio 1870 lp, ali bi mu ostalo još 90 lp. 1 BOD

Ako je kupio 1 bilježnicu i platio 540 lp, za olovke je preostalo 1420 lp. Za taj bi novac mogao kupiti 8 olovaka, no još bi mu ostalo 60 lp. 2 BODA

Da je kupio 2 bilježnice i platio 1080 lp, za olovke bi preostalo 880 lp. Za taj novac može kupiti 5 olovaka, ali bi mu ostalo još 30 lipa. 2 BODA

Pretpostavimo da je kupio 3 bilježnice i platio 1620 lp. Ostatkom novca od 340 lipa može kupiti točno 2 olovke. 2 BODA

Za 4 bilježnice bi mu bilo potrebno 2160 lp, a toliko nije potrošio. 1 BOD

Marko je kupio 3 bilježnice i 2 olovke. 1 BOD

…………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Potrebno je razmatrati sve slučajeve, a ako to nije učinjeno, umanjiti broj bodova za odgovarajući iznos ovisno o tome koji se slučajevi nisu razmatrali.

4. U troznamenkastom broju zbroj znamenaka može biti 7 ako zbrojimo 7, 0 i 0 što daje broj 700.

1 BOD

Zbroj 7 možemo dobiti ako zbrojimo 6, 1 i 0 što daje brojeve 610, 601, 106, 160. 1 BOD

Zbroj 7 možemo dobiti ako zbrojimo 5, 2 i 0 što daje brojeve 520, 502, 205, 250. 1 BOD

Zbroj 7 možemo dobiti ako zbrojimo 5, 1 i 1 što daje brojeve 511, 151, 115. 1 BOD

Zbroj 7 možemo dobiti ako zbrojimo 4, 3 i 0 što daje brojeve 430, 403, 304, 340. 1 BOD

Zbroj 7 možemo dobiti ako zbrojimo 4, 2 i 1 što daje brojeve 421, 412, 142, 124, 241, 214. 1 BOD

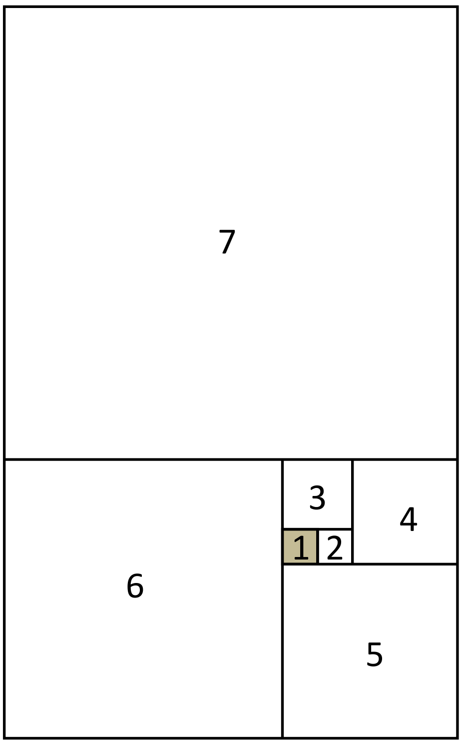
Zbroj 7 možemo dobiti ako zbrojimo 3, 3 i 1 što daje brojeve 331, 313, 133. 1 BOD

Zbroj 7 možemo dobiti ako zbrojimo 3, 2 i 2 što daje brojeve 322, 232, 223. 1 BOD

Traženih brojeva ima ukupno 28. 2 BODA

…………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

5. Označimo kvadrate brojevima od 1 do 7.



Kvadrat 2 ima zajedničku stranicu s kvadratom 1 što znači da mu je stranica duljine 1 cm. 1 BOD

Kvadrat 3 ima stranicu duljine $1 + 1 = 2$ cm. 1 BOD

Kvadrat 4 ima stranicu duljine $1 + 2 = 3$ cm. 1 BOD

Kvadrat 5 ima stranicu duljine $1 + 1 + 3 = 5$ cm. 1 BOD

Kvadrat 6 ima stranicu duljine $2 + 1 + 5 = 8$ cm. 1 BOD

Kvadrat 7 ima stranicu duljine $3 + 2 + 8 = 13$ cm. 1 BOD

Pravokutnik ima stranice duljina 13 cm i $8 + 13 = 21$ cm. 1 BOD

Opseg pravokutnika je $2 \cdot 13 + 2 \cdot 21 = 26 + 42 = 68$ cm. 1 BOD

Površina pravokutnika je $13 \cdot 21 = 273$ cm^2. 2 BODA

……………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
27. veljače 2015.

5. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Vrijednost Petrove i Markove nagrade je jednaka odnosno 1 bombonjera i 20 kn vrijedi kao 1 čokolada i 30 kn. To znači da 1 bombonjera vrijedi kao 1 čokolada i 10 kn. 3 BODA

Ako 1 bombonjera košta kao 3 čokolade, onda zaključujemo da 3 čokolade imaju jednaku vrijednost kao 1 čokolada i 10 kn. Iz toga slijedi da 2 čokolade koštaju 10 kn. 3 BODA

Dakle, cijena 1 čokolade je 5 kuna, a onda je vrijednost 1 bombonjere 15 kuna. 2 BODA

Marko je dobio nagradu u vrijednosti od 35 kuna. 2 BODA

…………………………………………………………………..……….. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Vrijednost Petrove i Markove nagrade je jednaka odnosno 1 bombonjera i 20 kn vrijedi kao 1 čokolada i 30 kn. Kako 1 bombonjera košta kao 3 čokolade, onda to znači da 3 čokolade i 20 kn imaju jednaku vrijednost kao 1 čokolada i 30 kn. 3 BODA

Iz toga slijedi da 2 čokolade koštaju 10 kn. 3 BODA

Dakle, cijena 1 čokolade je 5 kuna, a onda je vrijednost 1 bombonjere 15 kuna. 2 BODA

Marko je dobio nagradu u vrijednosti od 35 kuna. 2 BODA

…………………………………………………………………..……….. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Rješavanje pomoću jednadžbe treba u cijelosti prihvatiti.

2. Ako je traženi broj $\overline{abc}$, tada mora vrijediti $a + b = 13$.

Sve mogućnosti traženih znamenaka a i b su:

a	9	8	7	6	5	4
b	4	5	6	7	8	9

2 BODA

Da bi broj $\overline{abc}$ bio djeljiv s 4, njegov dvoznamenkasti završetak $\overline{bc}$ mora biti djeljiv s 4. 1 BOD

Za $a = 9$, $b = 4$ traženi brojevi su 940, 944, 948. 1 BOD

Za $a = 8$, $b = 5$ traženi brojevi su 852, 856. 1 BOD

Za $a = 7$, $b = 6$ traženi brojevi su 760, 764, 768. 1 BOD

Za $a = 6$, $b = 7$ traženi brojevi su 672, 676. 1 BOD

Za $a = 5$, $b = 8$ traženi brojevi su 580, 584, 588. 1 BOD

Za $a = 4$, $b = 9$ traženi brojevi su 492 i 496. 1 BOD

Traženih brojeva ima ukupno 15. 1 BOD

……………………………………………………………………...……….. UKUPNO 10 BODOVA

3. Kako je $m \cdot n = 2016$, $V(m,n) = 504$ i $D(m,n) \cdot V(m,n) = m \cdot n$, onda je $D(m,n) \cdot 504 = 2016$

odnosno $D(m,n) = 4$. 1 BOD

S obzirom da je $V(m,n) = 504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$, $D(m,n) = 4 = 2 \cdot 2$ i $m > n$, 1 BOD

postoje sljedeće mogućnosti:

a) $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 504$, $n = 2 \cdot 2 = 4$, 2 BODA

b) $m = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 252$, $n = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, 2 BODA

c) $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 56$, $n = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$, 2 BODA

d) $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$, $n = 2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$. 2 BODA

………………………...……………………………………...……….. UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Kako je 207 neparan broj, a višekratnik broja 2 paran, broj kovanica od 5 kn mora biti neparan.

2 BODA

Kako je $207 - 50 \cdot 2 = 207 - 100 = 107$ i $21 \cdot 5 = 105$, broj kovanica od 5 kn mora biti veći od 21.

2 BODA

Broj kovanica od 5 kn	23	25	27	29	31
Broj kovanica od 2 kn	46	41	36	31	26
Ukupni iznos	115 + 92	125 + 82	135 + 72	145 + 62	155 + 52

5 BODOVA

Ukupno postoji 5 različitih načina plaćanja poklona. 1 BOD

………………………....…………………………………...……….. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Kako je 207 neparan broj, a višekratnik broja 2 paran, broj kovanica od 5 kn mora biti neparan.

2 BODA

Neparan broj kovanica od 5 kn ima vrijednost kojoj je znamenka jedinica 5 pa broj kovanica od 2 kn ima vrijednost kojoj znamenka jedinica mora biti 2.

Znamenka jedinica broja kovanica od 2 kn	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Znamenka jedinica vrijednosti kovanica od 2 kn	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8

Dakle, broj kovanica od 2 kn ima znamenku jedinica 1 ili 6. 1 BOD

Kako je $207 - 32 \cdot 5 = 207 - 160 = 47$ i $23 \cdot 2 = 46$, broj kovanica od 2 kn mora biti veći od 23.

1 BOD

Broj kovanica od 2 kn	26	31	36	41	46
Broj kovanica od 5 kn	31	29	27	25	23
Ukupni iznos	52 + 155	62 + 145	72 + 135	82 + 125	92 + 115

5 BODOVA

Ukupno postoji 5 različitih načina plaćanja poklona. 1 BOD

………………………....…………………………………...……….. UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Kako je 207 neparan broj, a višekratnik broja 2 paran, broj kovanica od 5 kn mora biti neparan.

2 BODA

Marinela ima $50 \cdot 2 + 32 \cdot 5 = 100 + 160 = 260$ kuna.

Ako uzme najveći mogući neparni broj kovanica od 5 kuna, a to je 31, onda joj nedostaju još $207 - 31 \cdot 5 = 207 - 155 = 52$ kune. Njih će nadopuniti s 26 kovanica od 2 kune. 1 BOD

Ako uzme 29 kovanica od 5 kuna, trebat će joj još $207 - 29 \cdot 5 = 207 - 145 = 62$ kune. Dakle, 31 kovanica po 2 kune. 1 BOD

Ako uzme 27 kovanica od 5 kuna, trebat će joj još $207 - 27 \cdot 5 = 207 - 135 = 72$ kune. Dakle, 36 kovanica po 2 kune. 1 BOD

Ako uzme 25 kovanica od 5 kuna, trebat će joj još $207 - 25 \cdot 5 = 207 - 125 = 82$ kune. Dakle, 41 kovanica po 2 kune. 1 BOD

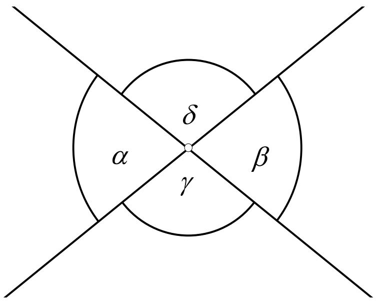
Ako uzme 23 kovanica od 5 kuna, trebat će joj još $207 - 23 \cdot 5 = 207 - 115 = 92$ kune. Dakle, 46 kovanica po 2 kune. 1 BOD

Ako uzme 21 kovanicu od 5 kuna, trebat će joj još $207 - 21 \cdot 5 = 207 - 105 = 102$ kune. Kako Marinela ima samo 100 kuna u kovanicama od 2 kune, ovaj slučaj je nemoguć. Također je nemoguće uzeti manje od 21 kovanice od 5 kuna. 2 BODA

Ukupno postoji 5 različitih načina plaćanja poklona. 1 BOD

…………………………...…………………………………………..……….. UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način:



1 BOD

Vrijedi $\alpha = \beta$ i $\gamma = \delta$ (vršni kutovi) . 1 BOD

$3 \cdot (\alpha + \beta) = 2 \cdot (\gamma + \delta)$

$3 \cdot (\alpha + \alpha) = 2 \cdot (\gamma + \gamma)$ 1 BOD

$3 \cdot 2\alpha = 2 \cdot 2\gamma$

$3 \cdot \alpha = 2 \cdot \gamma$ 1 BOD

Vrijedi $\alpha + \gamma = 180°$ (susjedni kutovi) . 1 BOD

$2 \cdot \alpha + 2 \cdot \gamma = 2 \cdot 180°$

$2 \cdot \alpha + 3 \cdot \alpha = 360°$ 1 BOD

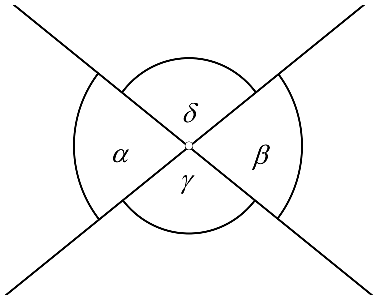
$5 \cdot \alpha = 360°$

$\alpha = 360° : 5 = 72°$ 1 BOD

Slijedi $\beta = 72°$, $\gamma = 180° - 72° = 108°$ i $\delta = 108°$. 3 BODA

…………………………...……………………………………...……….. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:



1 BOD

Vrijedi $\alpha = \beta$ i $\gamma = \delta$ (vršni kutovi) . 1 BOD

$3 \cdot (\alpha + \beta) = 2 \cdot (\gamma + \delta)$

$3 \cdot 2\alpha = 2 \cdot (\gamma + \delta)$

$3 \cdot \alpha = \gamma + \delta$ 1 BOD

Kako je $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$, slijedi 1 BOD

$\alpha + \alpha + 3 \cdot \alpha = 360°$ 1 BOD

$5 \cdot \alpha = 360°$

$\alpha = 360° : 5 = 72°$ 1 BOD

Vrijedi $\alpha + \gamma = 180°$ (susjedni kutovi) . 1 BOD

Slijedi $\beta = 72°$, $\gamma = 180° - 72° = 108°$ i $\delta = 108°$. 3 BODA

…………………………...……………………………………...……….. UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
27. veljače 2015.

6. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. $\left[\left(3\frac{1}{2}-2:1\frac{2}{3}+2\frac{1}{3}\right)\cdot 10-6\frac{1}{3}\right]:\left(\frac{3}{4}:0.1\right)-3.5=$

$=\left[\left(\frac{7}{2}-2:\frac{5}{3}+\frac{7}{3}\right)\cdot 10-\frac{19}{3}\right]:\left(\frac{3}{4}:\frac{1}{10}\right)-3.5=$

$=\left[\left(\frac{7}{2}-2\cdot\frac{3}{5}+\frac{7}{3}\right)\cdot 10-\frac{19}{3}\right]:\left(\frac{3}{4}\cdot 10\right)-3.5=$

$=\left[\left(\frac{7}{2}-\frac{6}{5}+\frac{7}{3}\right)\cdot 10-\frac{19}{3}\right]:\frac{15}{2}-3.5=$ 2 BODA

$=\left[\frac{105-36+70}{30}\cdot 10-\frac{19}{3}\right]:\frac{15}{2}-3.5=$

$=\left[\frac{139}{30}\cdot 10-\frac{19}{3}\right]:\frac{15}{2}-3.5=$ 1 BOD

$=\left[\frac{139}{3}-\frac{19}{3}\right]:\frac{15}{2}-3.5=$ 1 BOD

$=\frac{120}{3}:\frac{15}{2}-\frac{35}{10}=$ 1 BOD

$=40\cdot\frac{2}{15}-\frac{35}{10}=$

$=\frac{16}{3}-\frac{7}{2}=$ 1 BOD

$=\frac{32-21}{6}=\frac{11}{6}=1\frac{5}{6}.$ 1 BOD

Traženi cijeli brojevi su -1, 0 i 1. 3 BODA

…………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

2. Prvi način:

Josip mora podijeliti bombone na trećine, četvrtine, šestine i osmine pa ukupan broj bombona mora biti višekratnik brojeva 3, 4, 6 i 8. 1 BOD

Najmanji zajednički višekratnik je $V(3, 4, 6, 8) = 24$. 1 BOD

Budući da je ukupan broj bombona u vrećici dvoznamenkast, može ih biti 24, 48, 72 ili 96. 1 BOD

Najmanji broj bombona je dobio otac (osminu). Dakle, otac je mogao dobiti 3, 6, 9 ili 12 bombona.

Broj bombona, koje je dobio otac, mora biti dvoznamenkast pa se može zaključiti da je otac dobio 12 bombona odnosno da je ukupan broj bombona 96. 2 BODA

Sestra je dobila 32, brat 24, majka 16 i otac 12 bombona. 3 BODA

To je ukupno 84 bombona pa je Josipu ostalo još 12 bombona. 2 BODA

……………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Nakon podjele Josipu će ostati $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{24-8-6-4-3}{24}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$ ukupnog broja bombona. 2 BODA

Ukupan broj bombona mora biti višekratnik brojeva 3, 4, 6 i 8. 1 BOD

Najmanji zajednički višekratnik je $V(3, 4, 6, 8) = 24$. 1 BOD

Ukupan broj bombona u vrećici je dvoznamenkast, tj. može ih biti 24, 48, 72 ili 96. 1 BOD

Najmanji broj bombona (po osminu) dobivaju otac i Josip. Dakle, oni mogu dobiti po 3, 6, 9 ili 12 bombona. Broj bombona koje dobivaju mora biti dvoznamenkast pa se može zaključiti da su otac i Josip dobili po 12 bombona odnosno da je ukupan broj bombona 96. 2 BODA

Sestra je dobila 32, brat 24, majka 16, a otac i Josip po 12 bombona. 3 BODA

……………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Rješavanje pomoću jednadžbe treba u cijelosti prihvatiti.

3. Neka je b znamenka koja se ponavlja u zadanom zbroju.

Iz uvjeta zadatka vrijedi da je $a + 2a + 3a + \ldots + 9a = \overline{bbbb...b}$. 2 BODA

$a + 2 \cdot a + 3 \cdot a + \ldots + 9 \cdot a = a \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 9) = 45 \cdot a$ 2 BODA odnosno vrijedi $45 \cdot a = \overline{bbbb...b}$. 1 BOD

Dakle, $\overline{bbbb...b}$ mora biti djeljiv s 45, tj. s 5 i s 9. 1 BOD

Iz djeljivosti s 5 slijedi da znamenka b mora biti 5. 1 BOD

Iz djeljivosti s 9 i zahtjeva da se odredi najmanji broj slijedi da je $\overline{bbbb...b}$ = 555 555 555. 1 BOD

Na kraju je najmanji prirodan broj a za koji vrijedi tvrdnja a = 555 555 555 : 45 = 12 345 679.

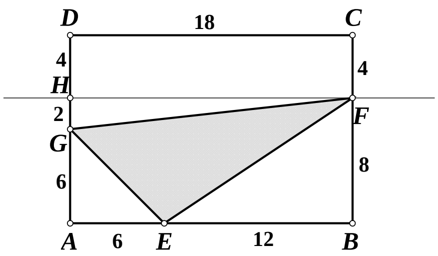
2 BODA

………………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka je $|AB| = a$ i $|BC| = b$. Iz uvjeta zadatka vrijedi da je $2a + 2b = 60$ i $b = \frac{2}{3}a$ odnosno

$2a + 2 \cdot \frac{2}{3} a = 60$. Dalje slijedi da je $2a + \frac{4}{3} \cdot a = 60$ te $\frac{10}{3} \cdot a = 60$ i onda

$a = 18$ cm i $b = 12$ cm. 2 BODA



1 BOD

$P_{EFG} = P_{ABCD} - (P_{AEG} + P_{BFE} + P_{CDGF})$

Vrijedi da je $P_{ABCD} = 18 \cdot 12 = 216$ cm^2,

$P_{AEG} = (6 \cdot 6) : 2 = 18$ cm^2,

$P_{BFE} = (12 \cdot 8) : 2 = 48$ cm^2. 3 BODA

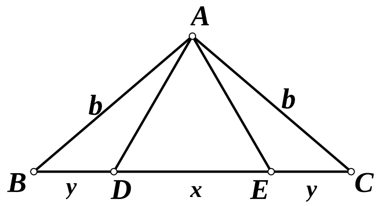
Površinu četverokuta $CDGF$ možemo izračunati tako da točkom F nacrtamo pravac koji je usporedan s dužinom $\overline{CD}$. Tada je

$P_{CDGF} = P_{CDHF} + P_{HGF} = 18 \cdot 4 + (18 \cdot 2) : 2 = 72 + 18 = 90$ cm^2. 2 BODA

$P_{EFG} = 216 - (18 + 48 + 90) = 216 - 156 = 60$ cm^2. 2 BODA

………………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

5.



1 BOD

Trokut ABC je jednakokračan trokut s osnovicom $\overline{BC}$ pa vrijedi da je $|AB| = |AC|$ i

$|\measuredangle CBA| = |\measuredangle ACB|$ odnosno $|\measuredangle DBA| = |\measuredangle ACE|$. Budući je iz uvjeta zadatka $|BD| = |EC| = y$,

prema poučku S-K-S o sukladnosti zaključujemo da su trokuti ABD i ACE sukladni. 2 BODA

Posljedica te sukladnosti jest da je $|AD| = |AE|$. 1 BOD

Budući da u trokutu nasuprot stranica jednakih duljina leže sukladni kutovi, može se zaključiti da u trokutu ADE vrijedi $|\measuredangle EDA| = |\measuredangle AED|$. 1 BOD

Nadalje, za kutove trokuta ADE vrijedi

$$|\measuredangle EDA| + |\measuredangle AED| + 60° = 180° \Rightarrow |\measuredangle EDA| + |\measuredangle AED| = 120° \Rightarrow |\measuredangle EDA| = |\measuredangle AED| = 60°$$

što znači da je trokut ADE jednakostraničan. 1 BOD

Označimo duljinu stranice trokuta ADE s x. Opseg tog trokuta je 15 cm pa slijedi da je $3 \cdot x = 15$ odnosno $x = 5$ cm. 1 BOD

Za zbroj opsega trokuta ABD i trokuta AEC vrijedi

$2x + 2y + 2b = 30 \Rightarrow 2y + 2b = 30 - 2 \cdot 5 = 20$ cm. 1 BOD

Traženi opseg trokuta ABC jednak je $x + 2y + 2b = 5 + 2y + 2b = 5 + 20 = 25$ cm. 2 BODA

……………………………………………...………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Budući da je $|AD| = |AE|$, trokut ADE je jednakokračan s osnovicom $\overline{DE}$, a krakovi tog trokuta prema uvjetu zadatka zatvaraju kut od 60°. Kutovi uz osnovicu su sukladni i veličina im je (180° – 60°) : 2 = 60°. Dakle, trokut ADE je jednakostraničan sa stranicom duljine x. Taj način zaključivanja treba jednako vrednovati kao u ponuđenom rješenju s 1+1 odnosno 2 boda.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
27. veljače 2015.

7. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Ako drugi mnogokut ima x stranica, onda prvi ima $x+0.4x=1.4x$ stranica. 2 BODA

Budući da je zbroj veličina svih unutarnjih kutova drugog mnogokuta za 1080° manji od zbroja veličina svih unutarnjih kutova prvog mnogokuta, može se pisati

$(1.4x - 2) \cdot 180° = (x - 2) \cdot 180° + 1080°$ / :180° 3 BODA

$1.4x - 2 = x - 2 + 6$ 1 BOD

$0.4x = 6$ 1 BOD

$x = 15$ 1 BOD

$1.4x = 21.$ 1 BOD

Riječ je o mnogokutima s 21 i 15 vrhova. 1 BOD

………………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Ako prvi mnogokut ima x stranica, a drugi y stranica, onda vrijedi $x = 1.4y$. 2 BODA

Budući da je zbroj veličina svih unutarnjih kutova drugog mnogokuta za 1080° manji od zbroja veličina svih unutarnjih kutova prvog mnogokuta, može se pisati

$(x - 2) \cdot 180° = (y - 2) \cdot 180° + 1080°$ / :180° 3 BODA

$x - 2 = y - 2 + 6$ 1 BOD

$x = y + 6$

$1.4y = y + 6$ 1 BOD

$0.4y = 6$

$y = 15$ 1 BOD

$x = 21.$ 1 BOD

Riječ je o mnogokutima s 21 i 15 vrhova. 1 BOD

………………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Točan odgovor bez obrazloženja donosi 4 boda.

2. Prvi način:

Neka je traženi broj $\overline{xyz}$.

Vrijedi $100x + 10y + z + 10 \cdot (x + y + z) = 496$ odnosno $110x + 20y + 11z = 496$. 2 BODA

Kako su prva dva pribrojnika višekratnici broja 10 (završavaju s nulom), da bi ukupan zbroj mogao imati znamenku jedinica 6, znamenka z nužno mora biti 6. 2 BODA

$110x + 20y + 66 = 496$

$110x + 20y = 430$ / :10

$11x + 2y = 43$. 1 BOD

Znamenka x može biti samo 1, 2 ili 3, jer će inače zbroj biti veći od 43. 1 BOD

Za $x = 1$ dobije se $y = 16$ (znamenka y ne može biti dvoznamenkasti broj). 1 BOD

Za $x = 2$, dobije se $y = 10.5$ (što također nema smisla). 1 BOD

Za $x = 3$ dobije se $y = 5$. 1 BOD

Traženi broj je 356. 1 BOD

………………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Neka je traženi broj $\overline{xyz}$.

Vrijedi $100x + 10y + z + 10 \cdot (x + y + z) = 496$ odnosno $110x + 20y + 11z = 496$. 2 BODA

Dalje je $11 \cdot (10x + z) = 496 - 20y$ što znači da $496 - 20y$ mora biti djeljivo s 11. 2 BODA

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$496-20y$	496	476	456	436	416	396	376	356	336	316

2 BODA

Samo je broj 396 djeljiv s 11 pa slijedi 1 BOD

$11 \cdot (10x + z) = 396$

$10x + z = 36$. 1 BOD

Dakle, $x = 3$ i $z = 6$. 1 BOD

Traženi broj je 356. 1 BOD

………………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Točan odgovor bez obrazloženja donosi 4 boda.

3. Prvi način:

Među prvih 2015 prirodnih brojeva ima 1008 neparnih i 1007 parnih. 1 BOD

Zbroj dva prirodna broja je paran ako su oba parna ili oba neparna. 2 BODA

Parove parnih brojeva možemo izabrati na $\frac{1007 \cdot 1006}{2} = 1007 \cdot 503 = 506521$ načina. 3 BODA

Parove neparnih brojeva možemo izabrati na $\frac{1008 \cdot 1007}{2} = 504 \cdot 1007 = 507528$ načina. 3 BODA

Ukupan broj načina je 506 521 + 507 528 = 1 014 049. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Među prvih 2015 prirodnih brojeva ima 1008 neparnih i 1007 parnih. 1 BOD

Zbroj dva prirodna broja je paran ako su oba parna ili oba neparna. 2 BODA

Parove parnih brojeva možemo izabrati na $\frac{1007 \cdot 1006}{2}$ načina. 1 BOD

Parove neparnih brojeva možemo izabrati na $\frac{1008 \cdot 1007}{2}$ načina. 1 BOD

Ukupan broj načina je $\frac{1008 \cdot 1007}{2} + \frac{1007 \cdot 1006}{2} = \frac{1007}{2} \cdot (1008 + 1006) =$ 2 BODA

$= \frac{1007}{2} \cdot 2014 = 1007 \cdot 1007 =$ 2 BODA

= 1 014 049. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Između 25 igrača kluba moguće je izabrati par igrača na $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$ načina. 3 BODA

Dakle, slučajan događaj ima 300 elementarnih događaja. 1 BOD

Među tri sestre moguće je formirati $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ različita para. 3 BODA

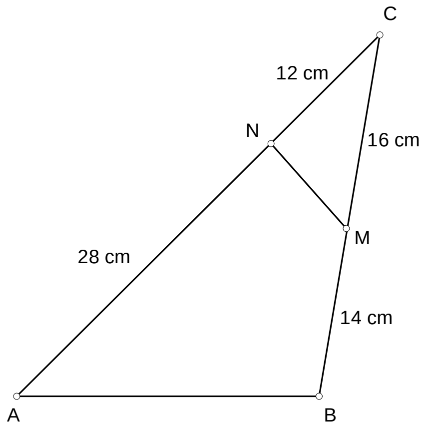
Dakle, broj povoljnih elementarnih događaja je 3. 1 BOD

Vjerojatnost da će biti izabran par sestara je $P=\frac{3}{300}=\frac{1}{100}=0.01=1\%$. 2 BODA

…………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Kao ispravan odgovor ravnopravno prihvatiti 1 %, 0.01 ili $\frac{1}{100}$.

5. Skica



1 BOD

$\frac{|AC|}{|MC|}=\frac{40}{16}=\frac{5}{2}$, $\frac{|BC|}{|NC|}=\frac{30}{12}=\frac{5}{2}$. 2 BODA

Dakle, $\frac{|AC|}{|MC|}=\frac{|BC|}{|NC|}$ i zajednički kut pri vrhu C pa prema poučku S-K-S o sličnosti slijedi

$\Delta MNC \sim \Delta ABC$. 2 BODA

$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta MNC}}=\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}$ 1 BOD

$\frac{P_{\Delta MNC}+252}{P_{\Delta MNC}}=\frac{25}{4}$ 1 BOD

$4\cdot P_{\Delta MNC}+1008=25\cdot P_{\Delta MNC}$ 1 BOD

$21\cdot P_{\Delta MNC}=1008$ 1 BOD

$P_{\Delta MNC}=1008:21=48\,\text{cm}^2$.

Površina trokuta MNC je $48\ \text{cm}^2$. 1 BOD

…………………………………………...………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

27. veljače 2015.

8. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Izraz $x^2 - 1 = y^2 + 2014$ možemo pisati u obliku $x^2 - y^2 = 2015$ odnosno $(x - y) \cdot (x + y) = 2015$.

Kako su $x, y \in \mathbb{N}$, onda je $x - y < x + y$. 2 BODA

Broj $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ pa ga možemo napisati u obliku umnoška kao

$2015 = 1 \cdot 2015$, 1 BOD

$2015 = 5 \cdot 403$, 1 BOD

$2015 = 13 \cdot 155$, 1 BOD

$2015 = 31 \cdot 65$. 1 BOD

Iz $x - y = 1$ i $x + y = 2015$ dobivamo da je $x = 1008$, $y = 1007$. 1 BOD

Iz $x - y = 5$ i $x + y = 403$ dobivamo da je $x = 204$, $y = 199$. 1 BOD

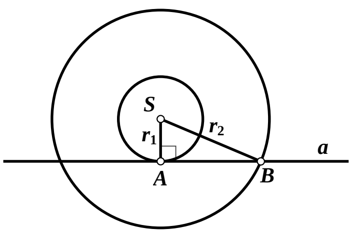
Iz $x - y = 13$ i $x + y = 155$ dobivamo da je $x = 84$, $y = 71$. 1 BOD

Iz $x - y = 31$ i $x + y = 65$ dobivamo da je $x = 48$, $y = 17$. 1 BOD

…………………………………………………………………..……….. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako nije utvrđen uvjet $x - y < x + y$, potrebno je razmotriti svih 8 mogućnosti, a ako se to ne učini bodovati s najviše 6 bodova.

2.



Tangenta kružnice je okomita na polumjer u diralištu A pa je trokut SAB pravokutan. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut SAB dobivamo $|AB|^2 = r_2^2 - r_1^2$, 1 BOD

$100 = r_2^2 - r_1^2$. 1 BOD

Površina unutarnjeg kruga jednaka je $P_1 = r_1^2\pi$, 1 BOD

a površina vanjskog kruga jednaka je $P_2 = r_2^2\pi$ 1 BOD

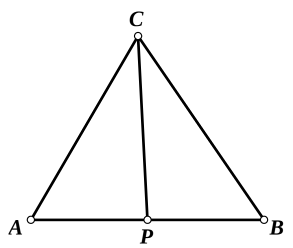
pa je površina kružnog vijenca jednaka $P = P_2 - P_1 = r_2^2\pi - r_1^2\pi$ 2 BODA

$P = (r_2^2 - r_1^2)\pi = 100\pi$ 2 BODA

$P \approx 314 \text{ cm}^2$. 1 BOD

……………………………………………………………………...……….. UKUPNO 10 BODOVA

3.



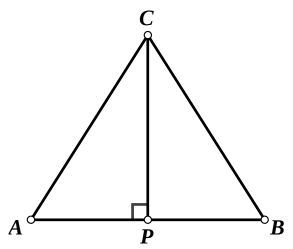
Promatramo trokut *APC*. Njegove stranice imaju duljine $|AP| = 24$ cm, $|PC| = 18$ cm i $|CA| = 30$ cm.
1 BOD

Zbroj površina kvadrata konstruiranih nad dvjema kraćim stranicama je

$18^2 + 24^2 = 324 + 576 = 900$. 1 BOD

Površina kvadrata nad njegovom najduljom stranicom je $30^2 = 900$. 1 BOD

Budući da je $18^2 + 24^2 = 30^2$, prema obratu Pitagorinog poučka zaključujemo da je trokut *APC* pravokutan s pravim kutom pri vrhu *P*. 2 BODA



Trokuti ΔAPC i ΔBPC su pravokutni i imaju zajedničku katetu $\overline{CP}$, a prema uvjetu zadatka vrijedi $|AP| = |BP|$.

Prema poučku S-K-S o sukladnosti slijedi da je $\Delta APC \cong \Delta BPC$ 1 BOD pa je $|AC| = |BC| = 30$ cm, tj. trokut *ABC* je jednakokračan s osnovicom $\overline{AB}$. 1 BOD

Opseg trokuta *ABC* jednak je $O = 48 + 2 \cdot 30 = 108$ cm. 1 BOD

Budući da je $\overline{CP} \perp \overline{AB}$, težišnica $\overline{CP}$ ujedno je i visina iz vrha *C*.

Površina trokuta *ABC* jednaka je $P_{ABC} = \dfrac{|AB| \cdot |CP|}{2} = \dfrac{48 \cdot 18}{2} = 432$ cm^2. 2 BODA

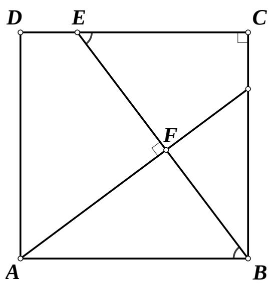
…………………………………………………………………..……….. UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:

Trokut *ABF* je pravokutan, a hipotenuza tog trokuta je stranica kvadrata *ABCD*. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut *ABF* dobivamo $|AB|^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, tj. duljina stranice

kvadrata je $|AB| = 5$ cm. 1 BOD



Pravac *EB* je presječnica paralelnih pravaca *AB* i *CD* pa je $\measuredangle FBA \cong \measuredangle BEC$. 2 BODA

Pravokutni trokuti ΔABF i ΔBEC imaju dva para sukladnih kutova ($\measuredangle FBA \cong \measuredangle BEC$ i

$\measuredangle AFB \cong \measuredangle ECB$) pa su prema poučku K-K o sličnosti ta dva trokuta slična. 3 BODA

Duljine odgovarajućih stranica trokuta ΔABF i ΔBEC su proporcionalne, tj. vrijedi

$|BF| : |EC| = |AF| : |BC|$. 1 BOD

Uvrštavanjem poznatih podataka nalazimo $3 : |EC| = 4 : 5$, 1 BOD

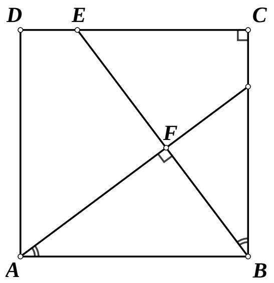
a onda slijedi $|EC| = 15 : 4 = 3.75$ cm. 1 BOD

…………………………………………………………………..……….. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Trokut *ABF* je pravokutan, a hipotenuza tog trokuta je stranica kvadrata *ABCD*. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut *ABF* dobivamo $|AB|^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, tj. duljina stranice kvadrata je $|AB| = 5$ cm. 1 BOD



Budući da je $AF \perp BF$ i $AB \perp CB$, šiljasti kutovi $\measuredangle BAF$ i $\measuredangle CBE$ imaju međusobno okomite krakove, tj. kutovi $\measuredangle BAF$ i $\measuredangle CBE$ su sukladni. 2 BODA

Pravokutni trokuti ΔABF i ΔBEC imaju dva para sukladnih kutova ($\measuredangle BAF \cong \measuredangle CBE$ i $\measuredangle AFB \cong \measuredangle ECB$) pa su prema poučku K-K o sličnosti ta dva trokuta slična. 3 BODA

Duljine odgovarajućih stranica trokuta ΔABF i ΔBEC su proporcionalne, tj. vrijedi

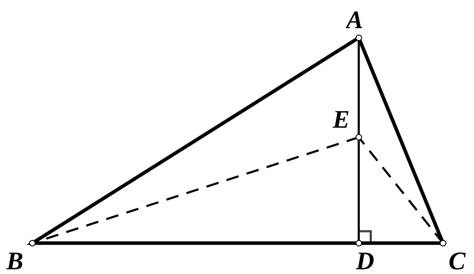
$|BF| : |EC| = |AF| : |BC|$. 1 BOD

Uvrštavanjem poznatih podataka nalazimo $3 : |EC| = 4 : 5$, 1 BOD

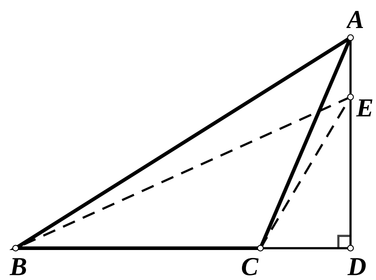
a onda slijedi $|EC| = 15 : 4 = 3.75$ cm. 1 BOD

…………………………………………………………………..……….. UKUPNO 10 BODOVA

5. Na slici je moguće uočiti četiri pravokutna trokuta *BDE*, *EDC*, *BDA* i *ADC*.



ili



1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na trokute *BDA* i *BDE* dobivamo

$|AB|^2 = |AD|^2 + |BD|^2$, 1 BOD

$|EB|^2 = |ED|^2 + |BD|^2$ 1 BOD

pa je $|AB|^2 - |EB|^2 = |AD|^2 - |ED|^2$. 2 BODA

Primjenom Pitagorinog poučka na trokute *ADC* i *EDC* dobivamo

$|AC|^2 = |AD|^2 + |DC|^2$, 1 BOD

$|EC|^2 = |ED|^2 + |DC|^2$ 1 BOD

pa je $|AC|^2 - |EC|^2 = |AD|^2 - |ED|^2$. 2 BODA

Iz $|AB|^2 - |EB|^2 = |AD|^2 - |ED|^2$ i $|AC|^2 - |EC|^2 = |AD|^2 - |ED|^2$ slijedi tvrdnja, tj.

$|AB|^2 - |EB|^2 = |AC|^2 - |EC|^2$. 1 BOD

……………………………………………………………………..……….. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako nisu skicirani ili spomenuti i šiljastokutni i tupokutni trokut, nego samo jedan od njih, bodovati s najviše 8 bodova.