**Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske**
**Agencija za odgoj i obrazovanje**
**Hrvatsko matematičko društvo**

# ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

## 1. razred – srednja škola – A varijanta

## 27. veljače 2015.

**1.** Neka su $x$ i $y$ različiti realni brojevi takvi da je $2xy + 1 \neq 0$ i neka su

$$A = \frac{6x^2y^2 + xy - 1}{2xy + 1} \quad \text{i} \quad B = \frac{x(x^2 - 1) - y(y^2 - 1)}{x - y}.$$

Odredi koji je broj veći, $A$ ili $B$.

**2.** Za prirodne brojeve $a$, $b$ i prost broj $p$ vrijedi $a^2 + p^2 = b^2$.

Dokaži da je $2(b + p)$ kvadrat nekog prirodnog broja.

**3.** Odredi koliko ima šesteroznamenkastih prirodnih brojeva takvih da uklanjanjem prve dvije, odnosno zadnje dvije znamenke dobivamo dva četveroznamenkasta broja koja daju isti ostatak pri dijeljenju s 99.

**4.** Neka je $\overline{AC}$ promjer kružnice $k_1$ kojoj je središte u točki $B$. Kružnica $k_2$ dira pravac $AC$ u točki $B$ i kružnicu $k_1$ u točki $D$. Tangenta iz $A$ (različita od $AC$) na kružnicu $k_2$ dira tu kružnicu u točki $E$ i siječe pravac $BD$ u točki $F$. Odredi omjer $|AF| : |AB|$.

**5.** Za prirodni broj $n$ kažemo da je tablica s tri retka i $n$ stupaca *čarobna* ako postoji prirodni broj $k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, takav da se

- u prvom retku nalaze redom brojevi $1, 2, \ldots, n$,
- u drugom retku nalaze redom brojevi $k, k + 1, \ldots, n, 1, 2, \ldots, k - 1$,
- u trećem retku nalaze brojevi od 1 do $n$ u takvom poretku da su zbrojevi triju brojeva u svakom stupcu međusobno jednaki.

Odredi sve prirodne brojeve $n$ za koje postoji čarobna tablica i za svaki takav $n$ odredi koliko ima čarobnih tablica.

**Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.**

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

# ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

**2. razred – srednja škola – A varijanta**

**27. veljače 2015.**

**1.** Odredi sve parove $(a, b)$ cijelih brojeva takve da površina trokuta čiji su vrhovi točke u kojima parabola $y = x^2 + ax + b$ siječe koordinatne osi iznosi 3.

**2.** Odredi sve trojke $(a, b, c)$ realnih brojeva za koje vrijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad \text{i} \quad (2b - 2a - c)a \geqslant \frac{1}{2}.$$

**3.** Odredi sve četvorke $(a, b, c, d)$ prirodnih brojeva takve da je

$$a^3 = b^2, \quad c^5 = d^4 \quad \text{i} \quad a - c = 9.$$

**4.** Neka je $O$ središte opisane kružnice, a $H$ ortocentar trokuta $ABC$. Pravac $AO$ siječe opisanu kružnicu u točki $D$. Dokaži da pravac $HD$ prolazi polovištem stranice $\overline{BC}$.

**5.** Na matematičkom natjecanju zadana su 4 teška i 8 laganih zadataka. Na natjecanju sudjeluje $n$ učenika, a svaki je učenik ispravno riješio točno 11 od 12 zadataka.

Za svaki par teškog i laganog zadatka određen je broj učenika koji su ispravno riješili oba zadatka i zbroj svih tih 32 brojeva je 256. Odredi $n$.

**Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.**

**Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske**
**Agencija za odgoj i obrazovanje**
**Hrvatsko matematičko društvo**

# ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

**3. razred – srednja škola – A varijanta**

**27. veljače 2015.**

**1.** Neka je $I$ središte upisane kružnice trokuta $ABC$.
Ako je $|AI| = |BC|$ i $\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle BAC$, odredi kutove trokuta $ABC$.

**2.** Za realni broj $x$, neka $\lfloor x \rfloor$ označava najveći cijeli broj koji nije veći od $x$.
Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$11\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \tfrac{1}{2} \right\rfloor = 9x.$$

**3.** Neka je $n$ prirodni broj veći od 1 takav da su $2n-1$ i $3n-2$ kvadrati prirodnih brojeva.
Dokaži da je broj $10n-7$ složen.

**4.** U konveksnom četverokutu $ABCD$ vrijedi $\sphericalangle BAD = 50^\circ$, $\sphericalangle ADB = 80^\circ$ i $\sphericalangle ACB = 40^\circ$.
Ako je $\sphericalangle DBC = 30^\circ + \sphericalangle BDC$, izračunaj $\sphericalangle BDC$.

**5.** Marko ima $2n$ kartica ($n \in \mathbb{N}$), po dvije kartice sa svakim od brojeva $1, 2, \ldots, n$. Kada ih je promiješao i složio jednu do druge u niz, primijetio je da se za svaki $k$ iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ između dviju kartica s brojem $k$ nalazi točno $k$ drugih kartica.
Dokaži da je broj $n^2 + n$ djeljiv s 4.

**Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.**

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

# ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

**4. razred – srednja škola – A varijanta**

**27. veljače 2015.**

**1.** Neka je $a = \sqrt[2015]{2015}$ i neka je $(a_n)$ niz takav da je $a_1 = a$ i $a_{n+1} = a^{a_n}$ za $n \geqslant 1$.

Postoji li prirodni broj $n$ takav da je $a_n \geqslant 2015$?

**2.** Jedna stranica kvadrata leži na pravcu $y = 2x - 17$, a preostala dva vrha leže na paraboli $y = x^2$. Odredi površinu tog kvadrata.

**3.** Neka je $n$ prirodni broj i neka su $a_0, a_1, \ldots, a_{2n} \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ realni brojevi takvi da je

$$\operatorname{tg} a_k = 2^{k-n} \quad \text{za} \quad k = 0, 1, \ldots, 2n.$$

Izračunaj zbroj $a_0 + a_1 + \cdots + a_{2n}$.

**4.** Za prirodan broj kažemo da je *zvrkast* ako u dekadskom zapisu ima 100 znamenaka i ako uklanjanjem bilo koje njegove znamenke nastaje 99-znamenkasti broj djeljiv sa 7.

Koliko ima zvrkastih prirodnih brojeva?

**5.** Ukrug je poredano konačno mnogo realnih brojeva. Svaki broj je obojan u crveno, bijelo ili plavo. Svaki crveni broj dvaput je manji od zbroja dvaju njemu susjednih brojeva, svaki bijeli broj jednak je zbroju dvaju njemu susjednih brojeva, a svaki plavi broj je dvaput veći od zbroja dvaju njemu susjednih brojeva. Neka je $b$ zbroj svih bijelih brojeva, a $p$ zbroj svih plavih brojeva, pri čemu su oba zbroja različita od 0.

Odredi omjer $\frac{b}{p}$.

**Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.**