Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

27. veljače 2015.

1. Za koje je vrijednosti realnog parametra a rješenje jednadžbe

$$7(a+x)-16=(a+3)(a-3)+3(x+1)$$

negativno?

2. Odredite zadnje tri znamenke broja

$$2^{2015}-2^{2013}+2^{2010}.$$

3. Ako je $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $b\neq 0$, $d\neq 0$ koliko je

$$\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}-\frac{ab}{a+b}-\frac{cd}{c+d}?$$

4. Koliko ima pravokutnih trokuta kojima su duljine kateta cijeli brojevi a, b, a duljina hipotenuze $b+1$, gdje je $b<100$?

5. Površina trokuta ABC iznosi 32 cm^2. Na stranicama AB i BC odabrane su točke M i N takve da je $|AM|:|MB|=|BN|:|NC|=3:1$. Točka G je sjecište pravaca AN i CM. Odredite omjer površina likova AGC i $MBNG$.

6. Luka i Pero odlučili su posjetiti prijatelja i krenuti iz mjesta A u 170 km udaljeno mjesto B. Luka je krenuo pješice, a Peru je poveo vozač na motociklu. Nakon nekog vremena vozač se vratio po Luku, a Pero je nastavio pješice, tako da su obojica stigla u isto vrijeme u mjesto B. Oba pješaka hodaju istom brzinom od 5 km/h, a motociklist vozi brzinom od 85 km/h. Na kojoj se udaljenosti od mjesta B i poslije koliko vremena vozač zaustavio i vratio po Luku? Koliko je vremena trebalo da Luka i Pero stignu iz mjesta A u mjesto B?

7. Izračunajte $\frac{2015A-2015B}{1008}$ ako je

$$A=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{5}+\cdots+\frac{1007^2}{2013}, \quad B=\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{5}+\frac{3^2}{7}+\cdots+\frac{1007^2}{2015}.$$

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

27. veljače 2015.

1. Za koji $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1i^1 + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \cdots + ni^n = 48 + 49i, \text{ ako je } i = \sqrt{-1}?$$

2. U pravokutnoj dvorani nalazi se tepih u obliku romba. Površina tepiha iznosi 54 m^2 , a opseg 30 m. Vrhovi romba su točno u polovištima stranica pravokutnika. Odredite dimenzije dvorane.

3. Jednadžba $y = x^2 + bx + c$ određuje skup parabola kojima su nultočke uzastopni cijeli brojevi. Kojem skupu točaka pripadaju tjemena ovih parabola? Odredite njegovu jednadžbu.

4. Opseg pravokutnog trapeza je 20 cm, a kosinus njegovog šiljastog kuta iznosi $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Koliko bi trebala iznositi visina trapeza kako bi on imao maksimalnu površinu? Kolika je maksimalna površina?

5. Zbroj dva peteroznamenkasta broja koji se podudaraju u prve tri znamenke iznosi 123422. Zadnje dvije znamenke jednog broja su 1,2, a drugog 1,0 tim redoslijedom. Odredite te brojeve .

6. Riješite jednadžbu

$$\sqrt[2015]{16 + 8x + x^2} + \sqrt[2015]{16 - x^2} = 2 \cdot \sqrt[2015]{16 - 8x + x^2}.$$

7. U skupu A nalazi se m uzastopnih cijelih brojeva kojima je zbroj $2m$, a u skupu B nalazi se $2m$ uzastopnih cijelih brojeva kojima je zbroj m. Apsolutna vrijednost razlike najvećih elemenata iz A i B iznosi 99. Odredite m, a zatim skupove A i B.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

27. veljače 2015.

1. Odredite sve cijele brojeve x za koje vrijedi

$$\log_4(x+12)\cdot\log_x 2 \geqslant 1.$$

2. Za kutove α, β i γ šiljastokutnog trokuta ABC vrijedi $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma = 1 : 3 : 12$. Izračunajte

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma.$$

3. Duljina stranice romba $ABCD$ iznosi 6 cm, a mjera kuta pri vrhu B iznosi 120°. Sve točke unutar romba koje su bliže vrhu B nego ostalim vrhovima nalaze se unutar peterokuta P. Odredite njegovu površinu.

4. Odredite zadnju znamenku umnoška prvih sto prirodnih brojeva koji pri djeljenju s 5 daju ostatak 3.

5. Neka su a, b, c duljine stranica trokuta, a α, β, γ redom nasuprotni kutovi. Ako je $a^2+b^2=2015c^2$, izračunajte $\dfrac{\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$.

6. Dva jednakokračna trokuta imaju isti opseg i površinu, a nisu sukladni. Duljine stranica jednog trokuta su $29, 29, 40$. Duljine stranica drugog trokuta su cijeli brojevi. Odredite koji su to brojevi.

7. Odredite sve cijele brojeve n za koje jednadžba $x^3-nx^2+nx-(n^2+1)=0$ ima cjelobrojno rješenje.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

27. veljače 2015.

1. Riješite nejednadžbu $\binom{n+1}{6} < \binom{n+1}{n-3}$.

2. Osnovica $\overline{AB}$ jednakokračnog trokuta ABC nalazi se na pravcu $x - 2y + 20 = 0$, a treći je vrh u točki $C(1, 8)$. Ako je površina trokuta 15, odredite duljine njegovih stranica.

3. Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{R}$ za koje su brojevi

$$1 - \sqrt{1 - \log_a x},\ 2\log_a x,\ 1 + \sqrt{1 - \log_a x}$$

tri uzastopna člana rastućeg geometrijskog niza.

4. Znamenke deveteroznamenkastog broja su međusobno različite i različite su od 0. Svake dvije susjedne znamenke određuju dvoznamenkasti broj koji je djeljiv sa 7 ili s 13. Odredite taj deveteroznamenkasti broj.

5. Komad papira ima oblik jednakostraničnog trokuta ABC duljine stranice 15 cm. Papir presavinemo tako da vrh A dođe u točku D na stranici $\overline{BC}$ te da je $|BD| = 3$ cm. Nastao je pregib $\overline{EF}$, gdje je točka E na $\overline{AB}$, a točka F na $\overline{AC}$. Odredite duljinu pregiba $|\overline{EF}|$.

6. U jednakokračni trokut osnovice duljine 14 cm i krakova duljine 25 cm upisan je krug. Iznad njega upisan je drugi krug koji dodiruje oba kraka i prvi krug, iznad ovoga upisan je treći krug i tako dalje istim postupkom nastavljamo upisivati krugove. Ako sve upisane krugove obojimo nekom bojom, koji će dio površine trokuta ostati neobojan?

7. Nultočke polinoma $p(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 3$ su realni brojevi x_1, x_2, x_3 koji čine rastući aritmetički niz. Odredite koeficijent a i nultočke zadanog polinoma.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.