ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

27. veljače 2015.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Za koje je vrijednosti realnog parametra a rješenje jednadžbe

$$7(a+x)-16=(a+3)(a-3)+3(x+1)$$

negativno?

Rješenje.

Rješenje dane jednadžbe je

$$x=\frac{a^2-7a+10}{4}.$$ 2 boda

Da bi bilo $x<0$, mora biti $\dfrac{a^2-7a+10}{4}<0$, 1 bod

odnosno $(a-2)(a-5)<0$, 1 bod

iz čega slijedi $a \in \langle 2,5\rangle$ ili $2<a<5$. 2 boda

Zadatak B-1.2.

Odredite zadnje tri znamenke broja

$$2^{2015}-2^{2013}+2^{2010}.$$

Rješenje.

Nakon izlučivanja zajedničkog faktora dobivamo:

$$2^{2015}-2^{2013}+2^{2010}=2^{2010}(2^5-2^3+1)=2^{2010}\cdot 25$$ 2 boda

$$=2^{2008}\cdot 2^2\cdot 25=2^{2008}\cdot 100.$$ 1 bod

Potencije broja dva (veće od 1) imaju zadnju znamenku redom $2,4,8,6,2,4,8,6,\ldots$. 1 bod

Dakle, ako im je eksponent djeljiv s 4, zadnja znamenka je 6. Tada je zadnja znamenka broja 2^{2008} jednaka 6, a množenjem sa 100 dobivamo da su zadnje tri znamenke $6,0,0$.

2 boda

Zadatak B-1.3.
Ako je $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $b\neq 0$, $d\neq 0$ koliko je

$$\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}-\frac{ab}{a+b}-\frac{cd}{c+d}?$$

Prvo rješenje.
Ako je $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, postoji neki $k\in\mathbb{R}, k\neq 0$, tako da je $a=kc$ i $b=kd$. 2 boda
Tada je

$$\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}-\frac{ab}{a+b}-\frac{cd}{c+d}=\frac{c(1+k)d(1+k)}{c(1+k)+d(1+k)}-\frac{kckd}{k(c+d)}-\frac{cd}{c+d}$$ 1 bod

$$=\frac{cd(1+k)}{c+d}-\frac{kcd}{c+d}-\frac{cd}{c+d}$$ 2 boda

$$=\frac{cd(1+k-k-1)}{c+d}=0.$$ 1 bod

Drugo rješenje.
Ako je $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, onda je $ad=bc$. 1 bod
Pomnožimo brojnik i nazivnik prva dva razlomka u danom izrazu s d, a zatim primjenimo $ad=bc$.

$$\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}-\frac{ab}{a+b}-\frac{cd}{c+d}=\frac{(ad+cd)(b+d)}{ad+bd+cd+d^2}-\frac{abd}{ad+bd}-\frac{cd}{c+d}$$ 1 bod

$$=\frac{(bc+cd)(b+d)}{bc+bd+cd+d^2}-\frac{bbc}{bc+bd}-\frac{cd}{c+d}$$ 1 bod

$$=\frac{c(b+d)(b+d)}{b(c+d)+d(c+d)}-\frac{bc}{c+d}-\frac{cd}{c+d}$$ 1 bod

$$=\frac{c\cancel{(b+d)}(b+d)}{\cancel{(b+d)}(c+d)}-\frac{bc}{c+d}-\frac{cd}{c+d}$$ 1 bod

$$=\frac{bc+cd-bc-cd}{c+d}=0$$ 1 bod

Zadatak B-1.4.
Koliko ima pravokutnih trokuta kojima su duljine kateta cijeli brojevi a, b, a duljina hipotenuze $b+1$, gdje je $b<100$?

Rješenje.

Za pravokutni trokut vrijedi $(b+1)^2 = a^2 + b^2$, odnosno $b^2 + 2b + 1 = a^2 + b^2$, iz čega slijedi $2b = a^2 - 1$, tj. $b = \dfrac{a^2-1}{2}$. 1 bod

Kako je $b < 100$, vrijedi $\frac{a^2-1}{2} < 100, a^2 < 201$. 1 bod

Kvadrati cijelih brojeva manji od 201 su $4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196$.

1 bod

Kako je $b \in \mathbb{N}$, iz $b = \dfrac{a^2-1}{2}$ slijedi da je a^2 neparan. 1 bod

Tada je $a \in \{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$. Slijedi $b \in \{4, 12, 24, 40, 60, 84\}$. 1 bod

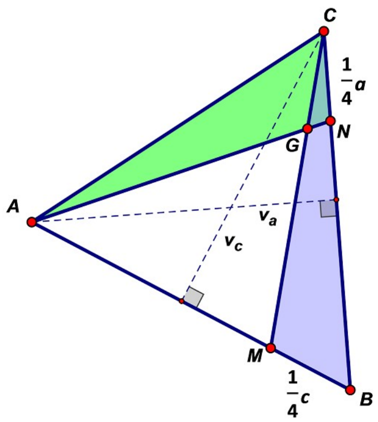
Dakle, ima 6 trokuta sa stranicama $(a, b, b+1)$ i danim svojstvom: 1 bod

$(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41), (11, 60, 61), (13, 84, 85)$.

Zadatak B-1.5.

Površina trokuta ABC iznosi 32 cm^2. Na stranicama AB i BC odabrane su točke M i N takve da je $|AM| : |MB| = |BN| : |NC| = 3 : 1$. Točka G je sjecište pravaca AN i CM. Odredite omjer površina likova AGC i $MBNG$.

Rješenje.



Odredimo površine trokuta ANC i BCM.

$$P_{ANC} = \frac{1}{2}v_a \cdot \frac{1}{4}a = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{4}P_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot 32 = 8 \text{ cm}^2.$$ 2 boda

Analogno dobijemo

$$P_{AMB} = \frac{1}{2}v_c \cdot \frac{1}{4}c = \frac{1}{4}P_{ABC} = 8 \text{ cm}^2.$$ 2 boda

Ako trokuti ANC i AMB imaju istu površinu, tada trokut AGC i četverokut $BNGM$ imaju istu površinu, pa je traženi omjer $1 : 1$. 2 boda

Zadatak B-1.6.

Luka i Pero odlučili su posjetiti prijatelja i krenuti iz mjesta A u 170 km udaljeno mjesto B. Luka je krenuo pješice, a Peru je poveo vozač na motociklu. Nakon nekog vremena vozač se vratio po Luku, a Pero je nastavio pješice, tako da su obojica stigla u isto vrijeme u mjesto B. Oba pješaka hodaju istom brzinom od 5 km/h, a motociklist vozi brzinom od 85 km/h. Na kojoj se udaljenosti od mjesta B i poslije koliko vremena vozač zaustavio i vratio po Luku? Koliko je vremena trebalo da Luka i Pero stignu iz mjesta A u mjesto B?

Rješenje.

Kako su obojica stigli u isto vrijeme krećući se istom brzinom znači da su prešli jednake dijelove puta pješice i jednake dijelove na motoru.

Uvedimo neke oznake: $s =$ udaljenost $|AB|$ (od mjesta A do mjesta B).

$|AD| = |CB| = x$ je dio puta koji je Luka, odnosno Pero prešao pješice.

Tada je $|AC| = |BD| = s - x$, $|CD| = s - 2x$. 2 boda

Dok je Luka prešao udaljenost $|AD|$, motociklist je prešao udaljenost

$$|AC| + |CD| = s - x + s - 2x = 2s - 3x. \qquad \text{2 boda}$$

Odatle je

$$\frac{x}{5} = \frac{2s - 3x}{85} \Rightarrow x = \frac{s}{10} \Rightarrow x = \frac{170}{10} = 17 \text{ km.} \qquad \text{2 boda}$$

Iz $|\overline{AD}| = 17$ km slijedi da je $|\overline{AC}| = s - x = 153$ km. 1 bod

Vrijeme koje je motociklist vozio Peru je $t_{AC} = \dfrac{s-x}{85} = \dfrac{153}{85} = 1$ h i 48 min. 1 bod

Vrijeme koje je Luka ili Pero pešačio je $t_{CB} = t_{AD} = \dfrac{x}{5} = \dfrac{17}{5} = 3$ h i 24 min. 1 bod

Vrijeme dolaska od mjesta A u mjesto B je $t_{AC} + t_{CB} = \frac{153}{85} + \frac{17}{5} = 5$ h i 12 min. 1 bod

Zadatak B-1.7.

Izračunajte $\dfrac{2015A - 2015B}{1008}$ ako je

$$A = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \cdots + \frac{1007^2}{2013}, \quad B = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \cdots + \frac{1007^2}{2015}.$$

Rješenje.

Odredimo prvo razliku brojeva A i B:

$$A-B=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{5}+\cdots+\frac{1007^2}{2013}-\left(\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{5}+\frac{3^2}{7}+\cdots+\frac{1007^2}{2015}\right)=$$

$$=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}-\frac{1^2}{3}+\frac{3^2}{5}-\frac{2^2}{5}+\cdots+\frac{k^2}{2k-1}-\frac{(k-1)^2}{2k-1}+\cdots\frac{1007^2}{2013}-\frac{1006^2}{2013}-\frac{1007^2}{2015}=$$ 2 boda

$$=\frac{1^2}{1}+\frac{(2-1)(2+1)}{3}+\cdots+\frac{(k-k+1)(k+k-1)}{2k-1}+\cdots+\frac{(1007-1006)(1007+1006)}{2013}-\frac{1007^2}{2015}=$$

2 boda

$$=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{1007\cdot 1}-\frac{1007^2}{2015}=$$ 2 boda

$$=1007-\frac{1007^2}{2015}=\frac{2015\cdot 1007-1007^2}{2015}=$$

$$=\frac{1007(2015-1007)}{2015}=\frac{1007\cdot 1008}{2015}.$$ 2 boda

Tada je

$$\frac{2015A-2015B}{1008}=\frac{2015(A-B)}{1008}=\frac{2015}{1008}\cdot\frac{1007\cdot 1008}{2015}=1007.$$ 2 boda

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

27. veljače 2015.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1.

Za koji $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1i^1 + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \cdots + ni^n = 48 + 49i, \text{ ako je } i = \sqrt{-1}?$$

Prvo rješenje.

Zbroj svaka četiri uzastopna pribrojnika s lijeve strane jednak je $2 - 2i$. 1 bod

Zbrajajući prvih 96 pribrojnika dobit ćemo $24 \cdot (2 - 2i) = 48 - 48i$. 1 bod

Dakle, da bi početna jednakost vrijedila na lijevoj strani mora biti još barem jedna potencija broja i. No bez obzira koliko ih ima, možemo pisati

$$24 \cdot (2 - 2i) + a + bi = 48 + 49i, \qquad \text{1 bod}$$
$$48 + a + (-48 + b)i = 48 + 49i.$$

Odatle je

$$48 + a = 48 \Rightarrow a = 0, \qquad \text{1 bod}$$
$$-48 + b = 49 \Rightarrow b = 97. \qquad \text{1 bod}$$

Zaključujemo da je na lijevoj strani 97 pribrojnika.

97. pribrojnik je $97i = 97i^{97}$, pa je traženi $n = 97$. 1 bod

Drugo rješenje.

Računamo li potencije broja i, s lijeve strane dane jednakosti dobivamo

$$(i - 2 - 3i + 4) + (5i - 6 - 7i + 8) + (9i - 10 - 11i + 12) + \cdots + ni^n = 48 + 49i$$
$$(2 - 2i) + (2 - 2i) + \cdots + ni^n = 48 + 49i. \qquad \text{1 bod}$$

Kako je zbroj svaka četiri uzastopna pribrojnika jednak $2 - 2i$, zbroj na lijevoj strani ovisi o tome koji ostatak pri dijeljenju s 4 daje broj n.

Dakle , imamo 4 mogućnosti: $n = 4k, n = 4k + 1, n = 4k + 2, n = 4k + 3$.

Ako je $n = 4k$, tada je dana jednakost oblika $k(2 - 2i) = 48 + 49i$, a takav k ne postoji.

1 bod

Ako je $n=4k+1$, tada je

$$k(2-2i)+(4k+1)i^{4k+1}=48+49i,$$
$$k(2-2i)+(4k+1)i=48+49i, \text{ a odatle je}$$
$$2k=48, -2k+4k+1=49 \text{ što daje } k=24 \text{ i } n=97.$$ 2 boda

Ako je $n=4k+2$, tada je

$$k(2-2i)+(4k+1)i+(4k+2)i^2=48+49i, \text{ odnosno}$$
$$2k-4k-2=48, \; -2k+4k+1=49,$$

a takav k, koji zadovoljava obje jednakosti, ne postoji. 1 bod

Ako je $n=4k+3$, tada je

$$k(2-2i)+(4k+1)i+(4k+2)i^2+(4k+3)i^3=48+49i, \text{ odnosno}$$
$$2k-4k-2=48, \; -2k+4k+1-4k-3=49,$$

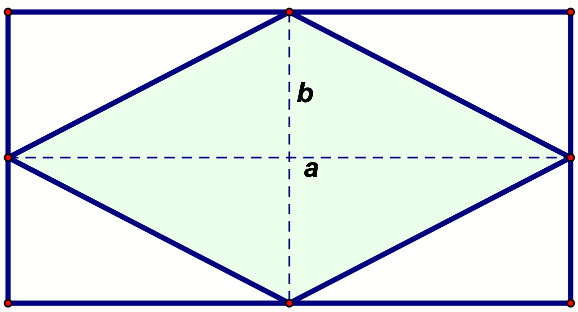
a takav k, koji zadovoljava obje jednakosti, ne postoji. 1 bod

Zadatak B-2.2.

U pravokutnoj dvorani nalazi se tepih u obliku romba. Površina tepiha iznosi 54 m^2 , a opseg 30 m. Vrhovi romba su točno u polovištima stranica pravokutnika. Odredite dimenzije dvorane.

Rješenje.

Uočimo da su dimenzije dvorane (stranice pravokutnika a i b) ujedno i dijagonale romba.



Ako je $P=\frac{a\cdot b}{2}=54$, $o=4d=30$, tada su duljine stranica rješenje sljedećeg sustava jednadžbi:

$$ab=108$$
$$a^2+b^2=225.$$ 2 boda

Pomnožimo li prvu jednadžbu s -2 i dodamo drugoj, slijedi $(a-b)^2=9$. 1 bod

Možemo uzeti da je $a>b$, pa je $a=b+3$ tj. $b^2+3b-108=0$. 1 bod

Slijedi $b=9$ te $a=12$. 2 boda

Dakle, dimenzije dvorane su 12 i 9 metara.

Zadatak B-2.3.

Jednadžba $y=x^2+bx+c$ određuje skup parabola kojima su nultočke uzastopni cijeli brojevi. Kojem skupu točaka pripadaju tjemena ovih parabola? Odredite njegovu jednadžbu.

Rješenje.

Neka su $x_1=n$ i $x_2=n+1$, $n\in\mathbb{Z}$ nultočke parabole iz zadanog skupa. Tada je

$$y=(x-n)\cdot(x-(n+1))=x^2-(2n+1)x+n^2+n.$$ 2 boda

Izračunamo koordinate tjemena:

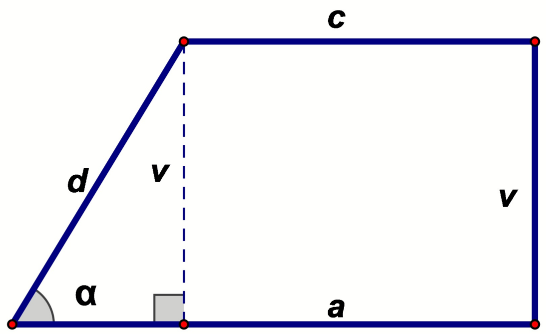
$$x_T=\frac{2n+1}{2},\ y_T=\frac{4\cdot(n^2+n)-(4n^2+4n+1)}{4}=\frac{-1}{4}.$$ 2 boda

Dakle, tjemena parabola iz danog skupa imaju istu ordinatu, pa se tjemena svih takvih parabola nalaze na pravcu $y=\frac{-1}{4}$. 2 boda

Zadatak B-2.4.

Opseg pravokutnog trapeza je 20 cm, a kosinus njegovog šiljastog kuta iznosi $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Koliko bi trebala iznositi visina trapeza kako bi on imao maksimalnu površinu? Kolika je maksimalna površina?

Rješenje.



$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2}{3}$. 1 bod

Iz $\sin\alpha=\frac{v}{d}$ slijedi $d=\frac{v}{\sin\alpha}=\frac{3}{2}v$. 1 bod

Tada iz danog opsega dobivamo

$o=a+c+v+d\Rightarrow a+c=o-(v+d)=20-\frac{5}{2}v$. 1 bod

$P=\frac{a+c}{2}\cdot v=\frac{-5}{4}v+10v$. 1 bod

Kako je površina trapeza kvadratna funkcija visine, maksimum postiže u tjemenu $\left(x_0=\frac{-b}{2a}\right)$.

$v=\frac{-10}{\frac{-5}{2}}=4$.

Trapez će imati maksimalnu površinu za visinu od 4 cm. 1 bod

Maksimalna površina je 20 cm^2. 1 bod

Zadatak B-2.5.

Zbroj dva peteroznamenkasta broja koji se podudaraju u prve tri znamenke iznosi 123422. Zadnje dvije znamenke jednog broja su 1,2, a drugog 1,0 tim redoslijedom. Odredite te brojeve .

Prvo rješenje.

Brojevi su oblika $\overline{abc12}$ i $\overline{abc10}$

$\overline{abc12} = \overline{abc00} + 12.$

$\overline{abc10} = \overline{abc00} + 10.$ 2 boda

Kako je zbroj tih brojeva 123422 slijedi:

$\overline{abc12} + \overline{abc10} = 123422$

$\overline{abc00} + 12 + \overline{abc00} + 10 = 123422,$ 1 bod

$2 \cdot \overline{abc00} + 22 = 1213422.$ Odatle je

$\overline{abc00} = 61700.$ 1 bod

Slijedi $a = 6$, $b = 1$, $c = 7$, 1 bod

odnosno traženi brojevi su 61712 i 61710. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je

$x = 10000a + 1000b + 100c + 12,$
$y = 10000a + 1000b + 100c + 10,$ a,b i c su znamenke te $a \neq 0$. 2 boda

Njihov je zbroj $x + y = 20000a + 2000b + 200c + 22,$

odnosno $20000a + 2000b + 200c + 22 = 123422,$ 1 bod

odnosno $20000a + 2000b + 200c = 123400.$

Podijelimo li s 200 dobit ćemo

$$100a + 10b + c = 617.$$ 1 bod

Dakle, $a = 6$, $b = 1$ i $c = 7$. 1 bod

Traženi brojevi su 61712 i 61710. 1 bod

Zadatak B-2.6.

Riješite jednadžbu

$$\sqrt[2015]{16 + 8x + x^2} + \sqrt[2015]{16 - x^2} = 2 \cdot \sqrt[2015]{16 - 8x + x^2}.$$

Rješenje.

Danu jednadžbu pišemo u sljedećem obliku:

$$\sqrt[2015]{(4+x)^2} + \sqrt[2015]{(4-x)(4+x)} = 2 \cdot \sqrt[2015]{(4-x)^2}. \qquad \text{1 bod}$$

Podijelimo cijelu jednadžbu s $\sqrt[2015]{(4-x)^2}$ za $x \neq 4$ pa imamo:

$$\sqrt[2015]{\left(\frac{4+x}{4-x}\right)^2} + \sqrt[2015]{\frac{4+x}{4-x}} = 2. \qquad \text{2 boda}$$

Uvedimo supstituciju $\sqrt[2015]{\frac{4+x}{4-x}} = t$. 1 bod

Jednadžba tada prelazi u $t^2 + t - 2 = 0$. 1 bod

Rješenja su $t_1 = -2$ i $t_2 = 1$. 1 bod

$$\sqrt[2015]{\frac{4+x}{4-x}} = -2 \Rightarrow x_1 = \frac{4+2^{2017}}{2^{2015}-1}, \qquad \text{2 boda}$$

$$\sqrt[2015]{\frac{4+x}{4-x}} = 1 \Rightarrow x_2 = 0. \qquad \text{2 boda}$$

Zadatak B-2.7.

U skupu A nalazi se m uzastopnih cijelih brojeva kojima je zbroj $2m$, a u skupu B nalazi se $2m$ uzastopnih cijelih brojeva kojima je zbroj m. Apsolutna vrijednost razlike najvećih elemenata iz A i B iznosi 99. Odredite m, a zatim skupove A i B.

Rješenje.

Neka je skup

$$\begin{aligned} A &= a, a+1, a+2, a+3, \ldots, a+m-1, \\ B &= b, b+1, b+2, b+3, \ldots, b+m-1, b+m, \ldots, b+2m-1. \end{aligned} \qquad \text{1 bod}$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} &a+a+1+a+2+a+3+\cdots+a+m-1 = 2m, \\ &b+b+1+b+2+b+3+\cdots+b+m-1+\cdots+b+2m-1 = m, \\ &|b+2m-1-(a+m-1)| = 99, \end{aligned} \qquad \text{1 bod}$$

odnosno rješavamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} &ma + (1+2+3+\cdots+m-1) = 2m, \\ &2mb + (1+2+3+\cdots+m-1+\cdots+2m-1) = m, \\ &|b-a+m| = 99. \end{aligned} \qquad \text{1 bod}$$

Iz prve jednadžbe proizlazi

$$ma + \frac{(1+m-1)(m-1)}{2} = 2m, \qquad \text{1 bod}$$

$$2ma + m(m-1) = 4m,$$

$$a = \frac{5-m}{2}. \qquad \text{1 bod}$$

Iz druge jednadžbe sustava proizlazi

$$2mb + \frac{(1+2m-1)(2m-1)}{2} = m,$$

$$4mb + 2m(2m-1) = 2m,$$

$$4mb + 4m^2 = 4m,$$

$$b = 1 - m. \qquad \text{1 bod}$$

Tada iz treće jednadžbe slijedi

$$|b - a + m| = 99,$$

$$\left|1 - m - \frac{5-m}{2} + m\right| = 99,$$

$$|m - 3| = 198. \qquad \text{1 bod}$$

Odatle je $m = 201$ ili $m = -195$. Kako je $m > 0$, rješenje je samo $m = 201$. Provjerimo jesu li za taj m brojevi a i b cijeli. 1 bod

$$a = \frac{5-201}{2} = -98, b = -200. \qquad \text{1 bod}$$

$$A = \{-98, -97, -96, -95, \ldots, 102\},$$

$$B = \{-200, -199, -198, -197, \ldots, 201\}. \qquad \text{1 bod}$$

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

27. veljače 2015.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1.

Odredite sve cijele brojeve x za koje vrijedi

$$\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 \geqslant 1.$$

Rješenje.

Rješenje dane nejednadžbe x mora zadovoljavati sljedeće uvjete:

$$x+12>0 \quad \text{i} \quad x>0, x \neq 1.$$

Kako je $x \in \mathbb{Z}$, tada iz prethodnih uvjeta slijedi da je x prirodan broj veći od 1. 1 bod

Danu nejednadžbu možemo pisati u sljedećem obliku

$$\frac{\log(x+12)}{\log 4} \cdot \frac{\log 2}{\log x} \geqslant 1,$$

$$\frac{\log(x+12)}{\log x} \geqslant 2.$$ 1 bod

Kako je $\log x > 0$ za $x > 1$, danu nejednadžbu možemo pomnožiti s $\log x$. 1 bod

Tada je

$$\log(x+12) \geqslant \log(x^2),$$

$$x+12 \geqslant x^2,$$

$$x^2 - x - 12 \leqslant 0, \quad \text{odnosno} \quad x \in [-3,4].$$ 2 boda

Uz uvjet $x>1$, $x \in \mathbb{Z}$, rješenje je $x \in \{2,3,4\}$. 1 bod

Zadatak B-3.2.

Za kutove α, β i γ šiljastokutnog trokuta ABC vrijedi $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma = 1:3:12$. Izračunajte

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma.$$

Rješenje.

Kako su kutovi trokuta šiljasti, to su njihovi tangensi istog predznaka i vrijedi:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}[\pi-(\alpha+\beta)] = -\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\\
&\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta\\
&\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma.
\end{aligned}$$

1 bod

Kako je $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma = 1:3:12$, slijedi $\operatorname{tg}\alpha = k, \operatorname{tg}\beta = 3k, \operatorname{tg}\gamma = 12k$.
Tada uvrštavanjem u prethodnu jednakost dobivamo:

$$16k = 36k^3 \implies k^2 = \frac{4}{9} \implies k = \frac{2}{3},$$

1 bod

te je

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}, \quad \operatorname{tg}\beta = 2, \quad \operatorname{tg}\gamma = 8.$$

1 bod

Slijedi

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \sin\beta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin\gamma = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}} = \frac{8}{\sqrt{65}},$$

pa je

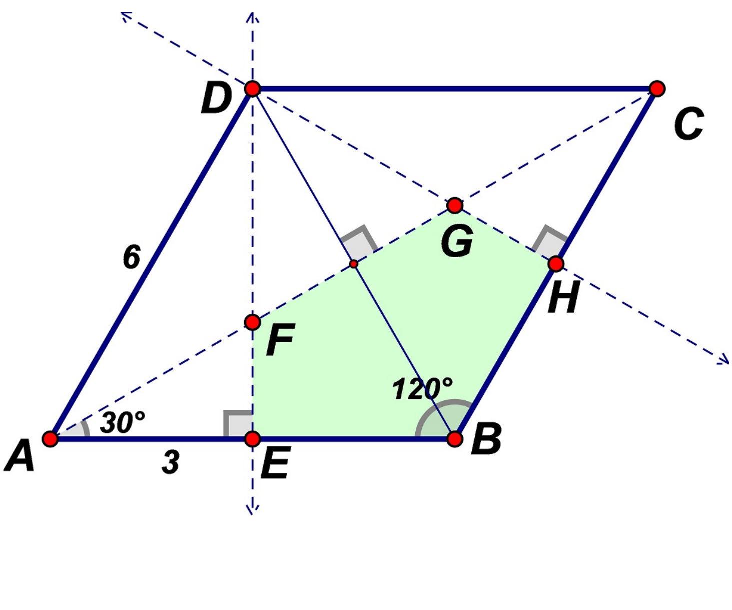
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma = \frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{8}{\sqrt{65}} = \frac{32}{65}.$$

3 boda

Zadatak B-3.3.

Duljina stranice romba $ABCD$ iznosi 6 cm, a mjera kuta pri vrhu B iznosi $120°$. Sve točke unutar romba koje su bliže vrhu B nego ostalim vrhovima nalaze se unutar peterokuta P. Odredite njegovu površinu.

Rješenje.



Pogledajmo područje omeđeno simetralama dužina $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ i $\overline{BD}$. Točke na simetrali dužine jednako su udaljene od njezinih rubnih točaka, što su u ovom slučaju vrhovi A, C, D, pa su točke koje su bliže vrhu B unutar peterokuta $BEFGH$. 2 boda

Površinu tog peterokuta dobijemo tako da od površine polovice romba oduzmemo dvije površine trokuta AEF.
Računamo redom:

$$P_{romb} = a^2 \sin \alpha$$ 1 bod

$$|EF| = 3 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3} \text{ cm}$$ 1 bod

$$P_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot |EF| = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$ 1 bod

$$P = \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \sin 120^\circ - 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$ 1 bod

Zadatak B-3.4.

Odredite zadnju znamenku umnoška prvih sto prirodnih brojeva koji pri djeljenju s 5 daju ostatak 3.

Rješenje.

Svi prirodni brojevi koji prilikom dijeljenja s 5 daju ostatak 3 mogu se zapisati u obliku $5k + 3$, $k \in \mathbb{N}_0$.
Zapišimo umnožak prvih sto takvih brojeva:

$$\begin{aligned} &3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 18 \cdot 23 \cdot 28 \cdot 33 \cdots (5k+3) \cdots 498 \\ &= (3 \cdot 8) \cdot (13 \cdot 18) \cdot (23 \cdot 28) \cdot (33 \cdot 38) \cdots ((5k-2) \cdot (5k+3)) \cdots (493 \cdot 498). \end{aligned}$$ 2 boda

Svaki od 50 umnožaka u zagradama završava znamenkom 4. 1 bod
Zadnja znamenka našeg umnoška je zadnja znamenka potencije 4^{50}. 1 bod
Kako je $4^{50} = 16^{25}$, a potencije broja 16 uvijek završavaju znamenkom 6, traženi umnožak završava znamenkom 6. 2 boda

Zadatak B-3.5.

Neka su a, b, c duljine stranica trokuta, a α, β, γ redom nasuprotni kutovi. Ako je $a^2 + b^2 = 2015c^2$, izračunajte $\dfrac{\operatorname{ctg} \gamma}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$.

Rješenje.

Kako je $\sin(\alpha + \beta) = \sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$, to početni izraz možemo pisati kao:

$$\frac{\operatorname{ctg} \gamma}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \frac{\frac{\cos \gamma}{\sin \gamma}}{\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin \alpha \sin \beta}} = \frac{\cos \gamma \sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma \sin \gamma}$$ 2 boda

$$= \cos \gamma \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c},$$ 2 boda

gdje smo u zadnjoj jednakosti primjenili poučak o sinusu i kosinusu.
Na kraju,

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2c^2} = \frac{2015c^2-c^2}{2c^2} = 1007.$$ 2 boda

Zadatak B-3.6.

Dva jednakokračna trokuta imaju isti opseg i površinu, a nisu sukladni. Duljine stranica jednog trokuta su $29, 29, 40$. Duljine stranica drugog trokuta su cijeli brojevi. Odredite koji su to brojevi.

Rješenje.

Izračunajmo prvo opseg i površinu danih trokuta

$$O = a + 2b = 98 \implies s = 49$$
$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)^2} = \sqrt{49 \cdot 9 \cdot 20^2} = 420.$$ 1 bod

Neka su x duljina osnovice i y duljina kraka novog trokuta. Tada vrijedi

$$x + 2y = 98 \implies y = 49 - \frac{x}{2}$$ 1 bod
$$420 = \sqrt{49(49-x)(49-y)^2}$$ 1 bod
$$420 = \sqrt{49(49-x)\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$ 1 bod
$$120 = x\sqrt{49-x}.$$

Dakle, x i $\sqrt{49-x}$ su prirodni brojevi i djelitelji broja 120 $\implies \sqrt{49-x} < 7$. 2 boda
Djelitelji broja 120 manji od 7 su: $1, 2, 3, 4, 5, 6$. 1 bod
Provjerom dobivamo da je jednakost valjana samo za $\sqrt{49-x} = 3$ i $\sqrt{49-x} = 5$. 1 bod
Iz $\sqrt{49-x} = 3$ dobivamo zadani trokut, a iz $\sqrt{49-x} = 5$ slijedi $x = 24$ i $y = 37$. 1 bod
Tada traženi trokut ima stranice $24, 37, 37$. 1 bod

Zadatak B-3.7.

Odredite sve cijele brojeve n za koje jednadžba $x^3 - nx^2 + nx - (n^2+1) = 0$ ima cjelobrojno rješenje.

Rješenje.

Neka je x cjelobrojno rješenje dane jednadžbe. Tada je:

$$x^3 - nx^2 + nx - n^2 = 1$$
$$x^2(x-n) + n(x-n) = 1$$
$$(x-n)(x^2+n) = 1.$$ 2 boda

Umnožak je jednak 1 jedino ako su oba faktora 1 ili -1. 1 bod

U prvom slučaju rješavamo sustav

$$x - n = 1$$
$$x^2 + n = 1.$$

Tada je

$$x = n + 1 \implies (n+1)^2 + n = 1,$$

što nakon sređivanja daje jednadžbu

$$n^2 + 3n = 0.$$ 2 boda

Slijedi da su rješenje sustava $n = 0$ i $x = 1$, odnosno $n = -3$ i $x = -2$. 2 boda

U drugom slučaju rješavamo sustav

$$\begin{aligned} x - n &= -1 \\ x^2 + n &= -1. \end{aligned}$$

Tada je

$$x = n - 1 \implies (n-1)^2 + n = -1.$$

Nakon sređivanja dobivamo jednadžbu

$$n^2 - n + 2 = 0,$$ 2 boda

koja nema rješenja u skupu cijelih brojeva. 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

27. veljače 2015.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1.

Riješite nejednadžbu $\binom{n+1}{6} < \binom{n+1}{n-3}$.

Rješenje.

Zbog simetrije binomnih koeficijenata $\binom{n+1}{n-3}$ jednako je $\binom{n+1}{4}$. 1 bod

Uvijet zadatka je $n \geqslant 5$. 1 bod

Nejadnadžba $\binom{n+1}{6} < \binom{n+1}{4}$ prelazi u

$$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{6!} < \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!}.$$ 1 bod

Nakon skraćivanja slijedi

$$\frac{(n-3)(n-4)}{30} < 1,$$
$$n^2 - 7n - 18 < 0.$$ 1 bod

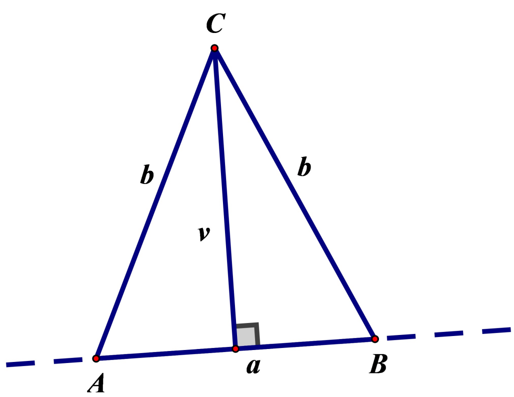
Rješenje nejednadžbe je $n \in \langle -2, 9\rangle$, 1 bod

ali zbog početnih uvjeta to su samo prirodni brojevi $n \in \{5,6,7,8\}$. 1 bod

Zadatak B-4.2.

Osnovica $\overline{AB}$ jednakokračnog trokuta ABC nalazi se na pravcu $x-2y+20=0$, a treći je vrh u točki $C(1,8)$. Ako je površina trokuta 15, odredite duljine njegovih stranica.

Rješenje.



1 bod

Visina trokuta je udaljenost točke C do pravca AB,

$$c = \frac{|1-16+20|}{\sqrt{1+4}} = \sqrt{5}. \qquad \text{1 bod}$$

Neka je $|AB| = a$. Iz površine odredimo duljinu osnovice,

$$P = \frac{av}{2},$$
$$a = \frac{2P}{v} = \frac{30}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{5}. \qquad \text{2 boda}$$

Duljinu kraka možemo izračunati po Pitagorinom poučku:

$$b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2} = \sqrt{45+5} = 5\sqrt{2}. \qquad \text{2 boda}$$

Zadatak B-4.3.

Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{R}$ za koje su brojevi

$$1 - \sqrt{1 - \log_a x},\ 2\log_a x,\ 1 + \sqrt{1 - \log_a x}$$

tri uzastopna člana rastućeg geometrijskog niza.

Rješenje.

Dani izrazi moraju zadovoljavati sljedeće uvjete:

$$x > 0, \quad a > 0,\ a \neq 1, \quad 1 - \log_a x \geqslant 0. \qquad \text{1 bod}$$

Dakle, za rješenje treba vrijediti:

$$\begin{aligned} &0 < x \leqslant a, \quad \text{za } a > 1 \\ &x \geqslant a, \quad \text{za } 0 < a < 1. \quad (*) \end{aligned} \qquad \text{1 bod}$$

Primjenimo svojstvo geometrijskog niza:

$$\begin{aligned} &(2\log_a x)^2 = \left(1 - \sqrt{1 - \log_a x}\right)\left(1 + \sqrt{1 - \log_a x}\right) \qquad \text{1 bod} \\ &4\log_a^2 x = 1 - (1 - \log_a x) \\ &4\log_a^2 x = \log_a x. \end{aligned}$$

Jedno rješenje je $\log_a x = 0$, a to ne može biti član rastućeg geometrijskog niza. 1 bod

Drugo rješenje

$$\begin{aligned} \log_a x &= \frac{1}{4} \\ x &= \sqrt[4]{a}, \end{aligned} \qquad \text{1 bod}$$

zadovoljava uvjet (*) jer

$$\begin{aligned} &0 < \sqrt[4]{a} \leqslant a, \quad \text{za } a > 1 \\ &\sqrt[4]{a} \geqslant a, \quad \text{za } 0 < a < 1. \end{aligned} \qquad \text{1 bod}$$

Napomena: Priznati ako je učenik umjesto raspisivanja i rješavanja uvjeta jednostavno provjerio dobiveno rješenje uvrštavanjem.

Zadatak B-4.4.

Znamenke deveteroznamenkastog broja su međusobno različite i različite su od 0. Svake dvije susjedne znamenke određuju dvoznamenkasti broj koji je djeljiv sa 7 ili s 13. Odredite taj deveteroznamenkasti broj.

Rješenje.

Znamenke deveteroznamenkastog broja su $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \{1, 2, ..., 9\}$ u nekom poretku.

Dvoznamenkasti brojevi $ab, bc, cd, de, ef, fg, gh, hi$ moraju biti djeljivi sa 7 ili s 13.

Dvoznamenkasti brojevi koji su djeljivi sa 7 su: 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98.

Dvoznamenkasti brojevi koji su djeljivi s 13 su: 39, 52, 65, 78, 91.

Brojevi 70 i 77 ne mogu se pojaviti među znamenkama danog broja jer sve znamenke moraju biti različite i različite od 0. Znamenka 7 se mora pojaviti jednom, a kako niti jedan preostali broj ne završava znamenkom 7, broj 78 mora biti na početku. 2 boda

Slijedi: 784 (84 jedini počinje s 8), odnosno 7842 ili 7849. 1 bod

U slučaju da broj počinje s 7842 sljedeća je znamenka 1 ili 6, odnosno 78421 ili 78426. Pogledajmo svaku od tih mogućnosti:

$$
\begin{aligned}
78421 &\to 7842135 \to 78421356 \to \text{ ne može} \\
&\to 7842139 \to \text{ ne može} \qquad \text{1 bod} \\
78426 &\to 784263 \to 7842635 \to \text{ ne može} \\
&\to 784265 \to \text{ ne može.} \qquad \text{1 bod}
\end{aligned}
$$

Za svaku od mogućnosti gdje piše *ne može* znamenke se u jednom trenutku počinju ponavljati.

Ostaje još provjeriti slučaj kada broj počinje sa 7849:

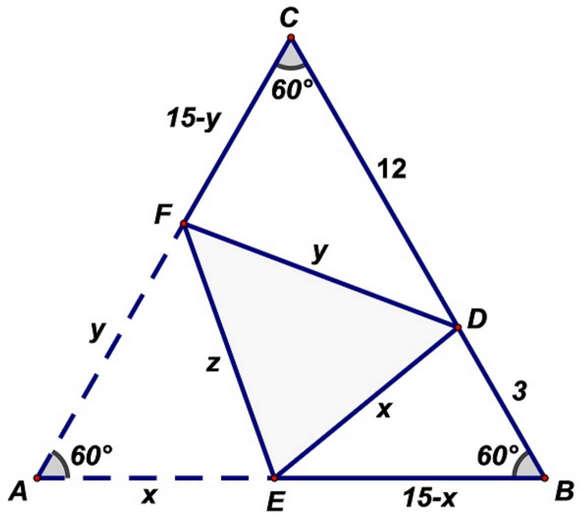
$$
\begin{aligned}
7849 \to 78491 \to 784913 \to 7849135 \to 78491352 &\to 784913526 \\
&\to 78491355 \to \text{ ne može}
\end{aligned}
$$

Dakle, jedina je mogućnost broj 784913526. 1 bod

Zadatak B-4.5.

Komad papira ima oblik jednakostraničnog trokuta ABC duljine stranice 15 cm. Papir presavinemo tako da vrh A dođe u točku D na stranici $\overline{BC}$ te da je $|BD| = 3$ cm. Nastao je pregib $\overline{EF}$, gdje je točka E na $\overline{AB}$, a točka F na $\overline{AC}$. Odredite duljinu pregiba $|\overline{EF}|$.

Rješenje.



Precizna slika s označenim sukladnim dužinama x,y : 2 boda

Primijenimo poučak o kosinusu na trokute CDF, BED i DEF. 1 bod

Iz ΔCDF slijedi:

$$\begin{aligned}
&y^2 = (15-y)^2 + 12^2 - 2\cdot 12\cdot(15-y)\cdot\cos 60^\circ\\
&y^2 = 225 - 30y + y^2 + 144 - 180 + 12y\\
&18y = 189\\
&y = \frac{21}{2}.
\end{aligned}$$

1 bod

Iz ΔBED:

$$\begin{aligned}
&x^2 = (15-x)^2 + 3^2 - 2\cdot(15-x)\cdot 3\cdot\cos 60^\circ\\
&x = 7
\end{aligned}$$

1 bod

Iz ΔDEF:

$$\begin{aligned}
&z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60^\circ\\
&z^2 = 7^2 + \left(\frac{21}{2}\right)^2 - 2\cdot 7\cdot\frac{21}{2}\cdot\frac{1}{2}\\
&z = \frac{7\sqrt{7}}{2}
\end{aligned}$$

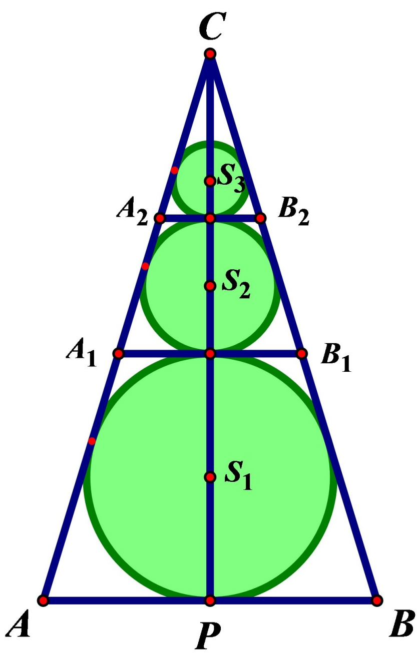
1 bod

Dakle, duljina pregiba $|\overline{EF}|$ iznosi $\frac{7\sqrt{7}}{2}$ cm.

Zadatak B-4.6.

U jednakokračni trokut osnovice duljine 14 cm i krakova duljine 25 cm upisan je krug. Iznad njega upisan je drugi krug koji dodiruje oba kraka i prvi krug, iznad ovoga upisan je treći krug i tako dalje istim postupkom nastavljamo upisivati krugove. Ako sve upisane krugove obojimo nekom bojom, koji će dio površine trokuta ostati neobojan?

Prvo rješenje.



1 bod

Po Pitagorinom poučku izračunamo duljinu visine na osnovicu.

$$v = |\overline{CP}| = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24\text{cm}.$$ 1 bod

Polumjer najveće upisane kružnice izračunamo iz $P = r_1 s$,

$$r_1 = \frac{14 \cdot 24}{25 + 25 + 14} = \frac{21}{4}.$$ 1 bod

Promotrimo slične trokute ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$... 1 bod

Koeficijent sličnosti trokuta izračunamo iz omjera visina

$$k = \frac{24 - 2r_1}{24} = \frac{9}{16}.$$ 2 boda

Analogno vrijedi i za ostale trokute.

Ako su trokuti slični s koeficijentom sličnosti k, onda su površine upisanih krugova proporcionalne s $k^2 = \frac{81}{256}$. 1 bod

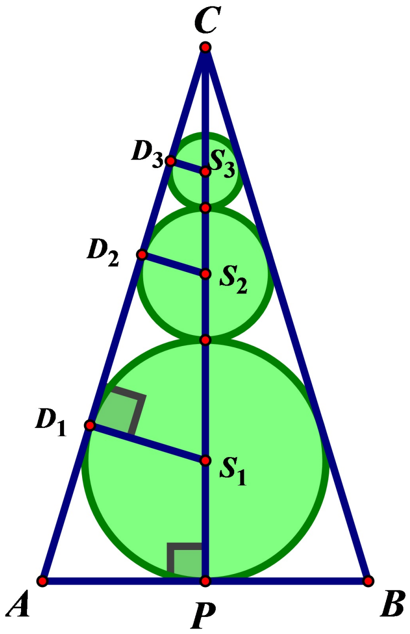
Računamo zbroj površina svih krugova

$$P = P_1 + k^2 P_1 + k^4 P_1 + \ldots = \frac{P_1}{1 - k^2} = \frac{\frac{441}{16}}{\frac{1-81}{256}}\pi = \frac{1008}{25}\pi.$$ 2 boda

Neobojana površina je

$$\frac{14 \cdot 24}{2} - \frac{1008}{25}\pi = 168 - \frac{1008}{25}\pi\text{cm}^2.$$ 1 bod

Drugo rješenje.



1 bod

Po Pitagorinom poučku izračunamo duljinu visine na osnovicu.

$$v = |\overline{CP}| = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24 \text{ cm}.$$ 1 bod

Trokuti APC, S_1D_1C, S_2D_2C, S_3D_3C,... su međusobno slični (svi kutovi su im sukladni). Označimo $|D_1S_1| = |PS_1| = r_1$. Iz sličnosti trokuta APC i S_1D_1C slijedi

$$\frac{r_1}{24 - r_1} = \frac{7}{25},$$
$$r_1 = \frac{21}{4} \text{ cm}.$$ 2 boda

Označimo $|D_2S_2| = r_2$. Iz sličnih trokuta APC i S_2D_2C slijedi

$$\frac{r_2}{24 - 2r_2 - r_2} = \frac{7}{25},$$
$$r_2 = \frac{189}{64} \text{ cm}.$$ 1 bod

Analogno dobivamo i polumjer treće kružnice $r_3 = \frac{1701}{1024}$ cm. 1 bod

Površine krugova su $r_1^2\pi$, $r_2^2\pi$, $r_3^2\pi$,...

One čine geometrijski niz s kvocijentom $q = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_3^2}{r_3^2}$. 1 bod

Provjerimo da su ti kvocijenti jednaki:

$$\frac{\left(\frac{189}{64}\right)^2}{\left(\frac{21}{4}\right)^2} = \left(\frac{189 \cdot 4}{21 \cdot 64}\right)^2 = \left(\frac{9}{16}\right)^2,$$
$$\frac{\left(\frac{1701}{1024}\right)^2}{\left(\frac{189}{64}\right)^2} = \left(\frac{1701 \cdot 64}{1024 \cdot 189}\right)^2 = \left(\frac{9}{16}\right)^2.$$ 1 bod

Izračunajmo razliku površine trokuta i površine svih krugova.

$$P = \frac{14 \cdot 24}{2} - \frac{\left(\frac{21}{4}\right)^2 \pi}{1 - \left(\frac{9}{16}\right)^2} = 168 - \frac{441\pi}{16 \cdot \left(1 - \left(\frac{9}{16}\right)^2\right)} = 168 - \frac{441\pi}{16 \cdot \frac{175}{256}} = 168 - \frac{1008}{25}\pi \text{ cm}^2. \quad \text{2 boda}$$

Zadatak B-4.7.

Nultočke polinoma $p(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 3$ su realni brojevi x_1, x_2, x_3 koji čine rastući aritmetički niz. Odredite koeficijent a i nultočke zadanog polinoma.

Prvo rješenje.

Polinom $p(x)$ pišemo u faktoriziranom obliku:

$$\begin{aligned} &x^3 - 3x^2 + ax + 3 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Po teoremu o jednakosti polinoma slijedi sustav jednadžbi (Vièteove formule)

$$\begin{cases} -(x_1 + x_2 + x_3) = -3 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a \\ -x_1x_2x_3 = 3. \end{cases} \quad \text{3 boda}$$

Prema uvjetu zadatka x_1, x_2, x_3 su članovi rastućeg aritmetičkog niza te pišemo

$$x_1 = t - d,\ x_2 = t,\ x_3 = t + d,\ t \in \mathbb{R}. \quad \text{1 bod}$$

Iz prve jednadžbe sustava slijedi

$$t - d + t + t + d = 3 \Rightarrow t = 1. \quad \text{1 bod}$$

Nadalje iz druge jednadžbe sustava dobivamo

$$\begin{aligned} &x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a, \\ &a = (1 - d) \cdot 1 + (1 - d) \cdot (1 + d) + 1 \cdot (1 + d), \\ &a = 3 - d^2. \end{aligned} \quad \text{1 bod}$$

Iz treće jednadžbe sustava slijedi

$$\begin{aligned} &x_1x_2x_3 = -3 \\ &(1 - d) \cdot 1 \cdot (1 + d) = -3, \\ &1 - d^2 = -3, \\ &d^2 = 4, \end{aligned} \quad \text{1 bod}$$

a kako je niz rastući, $d > 0$, slijedi $d = 2$. 1 bod

Koeficijent a jednak je $a = 3 - 2^2 = -1$, 1 bod

a nultočke zadanog polinoma su -1,1,3. 1 bod

Napomena: Učenik ne mora izvoditi Vièteove formule, može ih koristiti bez dokaza.

Drugo rješenje.

Ako su x_1, x_2, x_3 tri člana aritmetičkog niza možemo ih označiti s $t-d,\ t,\ t+d$. 1 bod

Tada je t rješenje sustava jednadžbi

$$\begin{aligned}&(t-d)^3 - 3(t-d)^2 + a(t-d) + 3 = 0\\ &t^3 - 3t^2 + at + 3 = 0\\ &(t+d)^3 - 3(t+d)^2 + a(t+d) + 3 = 0\end{aligned}$$ 1 bod

Nakon sređivanja imamo sljedeće tri jednadžbe:

$$\begin{aligned}&t^3 - 3t^2d + 3td^2 - d^3 - 3t^2 + 6td - 3d^2 + at - ad + 3 = 0\\ &t^3 - 3t^2 + at + 3 = 0\\ &t^3 + 3t^2d + 3td^2 + d^3 - 3t^2 - 6td - 3d^2 + at + ad + 3 = 0\end{aligned}$$ 1 bod

Oduzimanjem prve i treće od prethodnih jednadžbi dobit ćemo:

$$6t^2d + 2d^3 - 12td + 2ad = 0,$$

a nakon dijeljenja s $2d$ ($d > 0$ jer je niz rastući)

$$3t^2 + d^2 - 6t + a = 0 \Rightarrow a = -3t^2 - d^2 + 6t.(1)$$ 1 bod

Oduzimanjem druge i treće jednadžbe dobit ćemo:

$$\begin{aligned}&6t^2d + 3td^2 + d^3 - 6td - 3d^2 + ad = 0,\\ &3t^2 + 3td + d^2 - 6t - 3d + a = 0\\ &a = -3t^2 - 3td - d^2 + 6t + 3d.(2)\end{aligned}$$ 1 bod

Iz (1) i (2) dobivamo:

$$\begin{aligned}&-3t^2 - 3td - d^2 + 6t + 3d = -3t^2 - d^2 + 6t,\\ &3td - 3d = 0,\\ &t = 1 \text{ (zbog } d > 0).\end{aligned}$$ 2 boda

Iz druge jednadžbe početnog sustava slijedi

$$1 - 3 + a + 3 = 0 \Rightarrow a = -1.$$ 1 bod

Razliku d možemo primjerice izračunati iz (1)

$$-1 = -3(-d)^2 + 6,\ d^2 = 4,\ d = 2.$$ 1 bod

Nultočke polinoma su -1,1,3. 1 bod