DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Trogir, 8.travnja-10.travnja 2015.

5. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Mogući ostaci pri dijeljenju s 3 su 0, 1 i 2.

Ako je ostatak pri dijeljenju s 3 jednak 0, tada je broj $\overline{401512a}$ djeljiv s 3 i zbroj njegovih znamenaka mora biti djeljiv s 3.

Zbroj znamenaka broja $\overline{401512a}$ je $13 + a$ pa znamenka a može biti 2, 5 i 8. Brojevi zadanog oblika djeljivi s 3 su 4015122, 4015125 i 4015128. Od tih triju brojeva samo je broj 4015125 djeljiv s 5.

Ako je ostatak pri dijeljenju s 3 jednak 1, tada znamenka a može biti 0, 3, 6 i 9. Brojevi zadanog oblika koji pri dijeljenju s 3 imaju ostatak 1 su 4015120, 4015123, 4015126 i 4015129.

Od tih četiriju brojeva samo broj 4015126 pri dijeljenju s 5 ima ostatak 1.

Ako je ostatak pri dijeljenju s 3 jednak 2, tada znamenka a može biti 1, 4 i 7. Brojevi zadanog oblika koji pri dijeljenju s 3 imaju ostatak 2 su 4015121, 4015124 i 4015127.

Od tih triju brojeva samo broj 4015127 pri dijeljenju s 5 ima ostatak 2.

Drugi način:

Mogući ostaci pri dijeljenju s 3 su 0, 1 i 2.

Ako je ostatak pri dijeljenju s 5 jednak 0, tada je broj $\overline{401512a}$ djeljiv s 5 i znamenaka a može biti 0 i 5. Brojevi zadanog oblika djeljivi s 5 su 4015120 i 4015125. Od tih dvaju brojeva samo je broj 4015125 djeljiv s 3.

Ako je ostatak pri dijeljenju s 5 jednak 1, tada znamenka a može biti 1 i 6. Brojevi zadanog oblika koji pri dijeljenju s 5 imaju ostatak 1 su 4015121 i 4015126. Od tih dvaju brojeva samo broj 4015126 pri dijeljenju s 3 ima ostatak 1.

Ako je ostatak pri dijeljenju s 5 jednak 2, tada znamenka a može biti 2 i 7. Brojevi zadanog oblika koji pri dijeljenju s 5 imaju ostatak 2 su 4015122 i 4015127. Od tih dvaju brojeva samo broj

4015127 pri dijeljenju s 3 ima ostatak 2.

Treći način:

Pri dijeljenju s 3 mogući ostaci su 0, 1 i 2, a pri dijeljenju s 5 mogući ostaci su 0, 1, 2, 3 i 4. Dakle, jednaki ostaci mogu biti samo 0, 1 i 2.

Neka je *k* jedan od tih ostataka ($k \in \{0,1,2\}$).

Onda je broj $\overline{401512a} - k$ djeljiv i s 3 i s 5 (dakle, djeljiv je s 15).

Broj $\overline{401512a} - k$ je djeljiv s 5 pa mora završavati s 0 ili 5. Kako je *k* jednak 0, 1 ili 2, slijedi da je broj $\overline{401512a} - k$ jednak 4015120 ili 4015125.

Broj 4015120 nije djeljiv s 3 jer mu je zbroj znamenaka jednak 13.

Broj 4015125 je djeljiv s 3 jer mu je zbroj znamenaka jednak 18.

Kako je $a - k = 5$ odnosno $a = 5 + k$, slijedi da znamenka *a* može biti 5, 6 ili 7.

2. Rastav broja 2012 na proste faktore je 2012 = 2 · 2 · 503.

Umnožak 2012 dobijemo u sljedećim slučajevima: a) 2, 2, 503, $\underbrace{1,...,1}_{1504}$,

b) 4, 503, $\underbrace{1,...,1}_{1505}$,

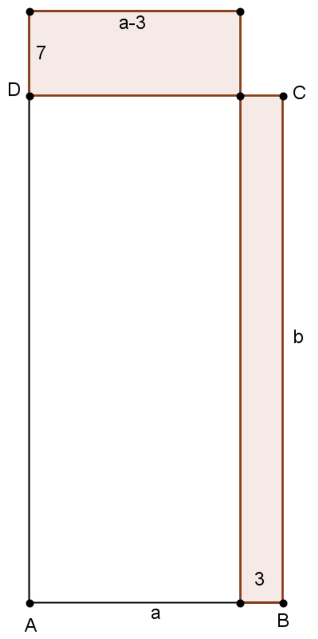
c) 2, 1006, $\underbrace{1,...,1}_{1505}$,

d) 2012, $\underbrace{1,...,1}_{1506}$.

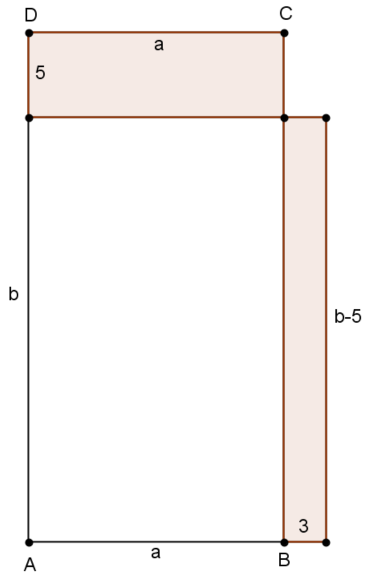
Zbroj tih brojeva je: a) 2011, b) 2012, c) 2513, d) 3518.

Traženi brojevi su 4, 503, $\underbrace{1,...,1}_{1505}$.

3.



Prva slika prikazuje pravokutnik *ABCD* sa stranicama a i b te novi pravokutnik sa stranicama $a-3$ i $b+7$. Njihove su površine jednake. Ako im oduzmemo isti broj (površinu njihovog zajedničkog dijela), i dalje ćemo imati jednake brojeve. Dakle, površine na slici istaknutih pravokutnika su jednake. Stranice jednog pravokutnika imaju duljine 3 cm i b cm, a drugog 7 cm i $a-3$ cm pa vrijedi $3b = 7a - 21$.



Na drugoj slici prikazan je početni pravokutnik *ABCD* sa stranicama a i b te novi pravokutnik sa stranicama $a+3$ i $b-5$. Na isti način može se zaključiti da su površine na slici istaknutih pravokutnika jednake. Stranice jednog imaju duljine 3 cm i $b-5$ cm, a drugog 5 cm i a cm. Vrijedi da je $3 \cdot (b-5) = 5a$ odnosno $3b = 5a + 15$.

Iz $3b = 7a - 21$ i $3b = 5a + 15$ slijedi $7a - 21 = 5a + 15$ pa je $a = 18$ cm.

Tada je b = 35 cm.

Površina pravokutnika *ABCD* je 630 cm^2.

4. Odgovarajuće četvorke znamenaka su: a) 9, 9, 9, 5,
b) 9, 9, 8, 6,
c) 9, 9, 7, 7,
d) 9, 8, 8, 7,
e) 8, 8, 8, 8.

S traženim svojstvima su sljedeći brojevi:

a) 9995, 9959, 9599,

b) 9986, 9968, 9896, 9869, 9698, 9689, 8996, 8969, 8699,

c) 9977, 9797, 9779, 7997, 7979, 7799,

d) 9887, 9878, 9788, 8987, 8978, 8897, 8879, 8798, 8789, 7988, 7898, 7889,

e) 8888.

Traženih brojeva ima ukupno 31.

5. Lako se uoči da su sve tri tražene znamenke neparne.

Neparna se znamenka može dobiti ako se zbroje 3 neparne ili ako se zbroje 2 parne i 1 neparna.

S obzirom da bi ispred znamenke 3 trebale biti znamenke 1 i 5, odnosno 2 neparne, onda bi se znamenka 3 morala dobiti zbrajanjem 3 neparne. Dakle, ispred znamenke 1 bi se trebala nalaziti neparna znamenka.

Kako bi se ispred znamenke 5 tada nalazile 2 neparne, onda bi se i znamenka 5 morala dobiti zbrajanjem 3 neparne. To znači da bi se ispred znamenke 1 trebale nalaziti 2 neparne znamenke. Dakle, i znamenka 1 bi se trebala dobiti zbrajanjem 3 neparne.

Taj postupak bi se dalje nastavljao odnosno sve znamenke ispred dijela …153 bi trebale biti neparne.

No, u broju 2015 je 0 + 1 + 5 =6 te imamo parnu znamenku pa u dobivenom broju s 1004 znamenke ne postoji dio …153….

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Trogir, 8.travnja-10.travnja 2015.

6. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Pribrojnici se mogu grupirati redom u šestorke.

$$1+2+3-4-5-6+7+8+9-10-11-12+13+\ldots-2015=$$

$$=(1+2+3-4-5-6)+(7+8+9-10-11-12)+13+\ldots-2015$$

Zbroj u svakoj šestorci je − 9, a takvih šestorki ima 335 (2015 = 335 ·6 + 5).

Dakle, $1+2+3-4-5-6+7+8+9-10-11-12+13+\ldots-2015=$

$$=-9\cdot 335+2011+2012+2013-2014-2015=$$

$$=-3015+2011+2012+2013-2014-2015=$$

$$=-3015+2007=$$

$$=-1008.$$

Drugi način:

Pribrojnici se mogu grupirati u parove (prvi pozitivni i prvi negativni u šestorci, drugi pozitivni i drugi negativni u šestorci i tako redom dalje).

$$1+2+3-4-5-6+7+8+9-10-11-12+13+\ldots-2015=$$

$$=(1-4)+(2-5)+(3-6)+(7-10)+\ldots+(2011-2014)+(2012-2015)+2013$$

Zbroj svakog para brojeva je −3, a takvih parova ima 1007

(2015 = 335 ·6 + 5 = 335 · 3 · 2 + 2 · 2 + 1 = 1007 · 2 + 1).

Dakle, $1+2+3-4-5-6+7+8+9-10-11-12+13+\ldots-2015=$

$$=-3\cdot 1007+2013=$$

$$=-3021+2013=$$

$$=-1008.$$

2. Prvi način:

Postoje tri načina rezanja štapića na manje dijelove zadanih duljina.

1. način: 13 cm = 3 cm + 3 cm + 3 cm + 4 cm

2. način: 13 cm = 4 cm + 4 cm + 5 cm

3. način: 13 cm = 5 cm + 5 cm + 3 cm

S obzirom da se niti na jedan od ta tri načina rezanja ne dobivaju dijelovi sve tri tražene duljine, moraju se koristiti sva tri načina rezanja štapića.

Štapiće treba izrezati tako da bude 13 dijelova duljine 3 cm, 13 dijelova duljine 4 cm i 13 dijelova duljine 5 cm.

Ako bi 5 štapića ili više izrezali 1. načinom rezanja, dobilo bi se 15 dijelova ili više duljine 3 cm što ne odgovara.

Ako bi 4 štapića izrezali 1. načinom rezanja, dobilo bi se 12 dijelova duljine 3 cm pa bi trebalo još 1 štapić izrezati 3. načinom rezanja kako bi bilo 13 dijelova duljine 3 cm. Tada bi se preostalih 7 štapića trebalo izrezati 2. načinom rezanja što bi dalo 18 dijelova duljine 4 cm, a to ne odgovara.

Ako bi 3 štapića izrezali 1. načinom rezanja, dobilo bi se 9 dijelova duljine 3 cm pa bi trebalo još 4 štapića izrezati 3. načinom rezanja kako bi bilo 13 dijelova duljine 3 cm. Tada bi se preostalih 5 štapića trebalo izrezati 2. načinom rezanja što bi dalo i 13 dijelova duljine 4 cm i 13 dijelova duljine 5 cm.

Ako bi 2 štapića izrezali 1. načinom rezanja, dobilo bi se 6 dijelova duljine 3 cm pa bi trebalo još 7 štapića izrezati 3. načinom rezanja kako bi bilo 13 dijelova duljine 3 cm. No, tada bi već imali 14 dijelova duljine 5 cm što ne odgovara.

Ako bi 1 štapić izrezali 1. načinom rezanja, dobilo bi se 3 dijela duljine 3 cm pa bi trebalo još 10 štapića izrezati 3. načinom rezanja kako bi bilo 13 dijelova duljine 3 cm. No, tada bi već imali 20 dijelova duljine 5 cm što ne odgovara.

Dakle, tri štapića treba izrezati na dijelove duljina 3 cm, 3 cm, 3 cm i 4 cm, četiri štapića na dijelove duljina 3 cm, 5 cm i 5 cm i pet štapića na dijelove duljina 4 cm, 4 cm i 5 cm.

Drugi način:

Postoje tri načina rezanja štapića na manje dijelove zadanih duljina.

1. način: 13 cm = 3 cm + 3 cm + 3 cm + 4 cm

2. način: 13 cm = 4 cm + 4 cm + 5 cm

3. način: 13 cm = 5 cm + 5 cm + 3 cm

S obzirom da se niti na jedan od ta tri načina rezanja ne dobivaju dijelovi sve tri tražene duljine, moraju se koristiti sva tri načina rezanja štapića.

Neka su m, l, k količine štapića koje smo redom izrezali na 1., 2. i 3. način rezanja.

Tada je $m+l+k=12$ odnosno $3m+3l+3k=36$.

Štapiće treba izrezati tako da bude 13 dijelova duljine 3 cm, 13 dijelova duljine 4 cm i 13 dijelova duljine 5 cm.

Zato vrijedi $3m+k=13$, $m+2l=13$ i $l+2k=13$ odnosno nakon zbrajanja

$4m+3l+3k=39$.

Iz $4m+3l+3k=39$ i $3m+3l+3k=36$ slijedi $m=3$.

Dalje je $k=4$ i $l=5$.

Dakle, tri štapića treba izrezati na dijelove duljina 3 cm, 3 cm, 3 cm i 4 cm, četiri štapića na dijelove duljina 3 cm, 5 cm i 5 cm i pet štapića na dijelove duljina 4 cm, 4 cm i 5 cm.

3. Prvi način:

Na početku oba dječaka imala su svaki po x pikula.

Nakon prvog kruga igre Marko je imao $x+6$, a Josip $x-6$ pikula.

U drugom krugu Josip je osvojio $\frac{2}{3}$ svih Markovih pikula pa ih sada ima $x-6+\frac{2}{3}(x+6)$. Nakon drugog kruga Marko ima $\frac{1}{3}(x+6)$ pikula.

Budući da Josip sada ima 4 puta više pikula od Marka vrijedi da je

$$x-6+\frac{2}{3}(x+6)=4\cdot\frac{1}{3}(x+6)$$

$$x-6+\frac{2}{3}x+4=\frac{4}{3}x+8 \,/\cdot 3$$

$$3x-18+2x+12=4x+24$$

$$x=30.$$

Na početku igre oba dječaka imala su svaki po 30 pikula.

Nakon drugog kruga Marko ima $\frac{1}{3}(x+6)=\frac{1}{3}(30+6)=12$ pikula, a Josip $4 \cdot 12 = 48$ pikula.

Drugi način:

Nakon drugog kruga Marko je imao y, a Josip $4y$ pikula.

Prije drugog (nakon prvog) kruga Marko je imao 3 puta više pikula nego nakon drugog kruga, tj.

imao je $3y = y + 2y$ pikula.

To znači da je Josip prije drugog (nakon prvog) kruga imao $4y - 2y = 2y$ pikula.

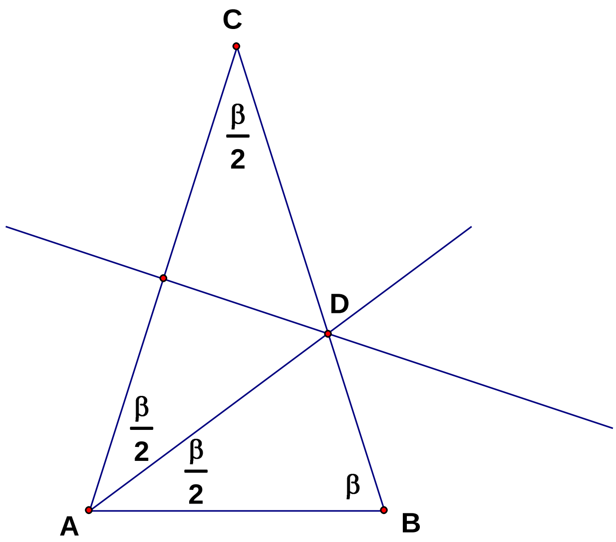
Na početku je Marko imao 6 pikula manje od $3y$, a Josip 6 pikula više od $2y$.

Vrijedi jednadžba $3y - 6 = 2y + 6$, a njezino rješenje je $y = 12$.

Marko je nakon drugog kruga imao 12, a Josip $4 \cdot 12 = 48$ pikula. Na početku obojica su imali

$3 \cdot 12 - 6 = 36 - 6 = 30$ $(2 \cdot 12 + 6 = 30)$ pikula.

4.



Trokut ABC je jednakokračan pa vrijedi da je $|\measuredangle BAC| = |\measuredangle CBA| = \beta$.

Pravac AD je simetrala kuta $\measuredangle BAC$ pa je $|\measuredangle BAD| = |\measuredangle DAC| = \frac{\beta}{2}$.

Točka D pripada simetrali stranice $\overline{AC}$ pa je jednako udaljena od točaka A i C odnosno vrijedi da je $|AD| = |DC|$.

Trokut *ADC* je jednakokračan te je $|\measuredangle DAC| = |\measuredangle ACD| = \dfrac{\beta}{2}$.

U trokutu *ABC* veličine unutarnjih kutova su β, β i $\dfrac{\beta}{2}$ pa vrijedi $\beta + \beta + \dfrac{\beta}{2} = 180°$ te je $\beta = 72°$.

U jednakokračnom trokutu *ADC* kut $\measuredangle CDA$ je kut između krakova pa slijedi

$|\measuredangle CDA| = 180° - 2 \cdot \dfrac{\beta}{2} = 180° - \beta = 180° - 72° = 108°$.

Napomena:

Na kraju se može utvrditi da je kut $\measuredangle CDA$ vanjski kut trokuta *ABD* pa vrijedi da je

$|\measuredangle CDA| = \beta + \dfrac{\beta}{2} = 72° + \dfrac{72°}{2} = 108°$.

Može se na kraju utvrditi da u trokutu *ABD* za veličinu kuta $\measuredangle ADB$ vrijedi

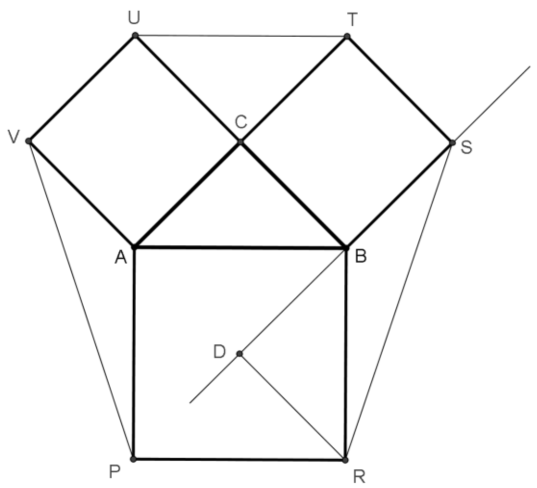
$|\measuredangle ADB| = 180° - \left(\beta + \dfrac{\beta}{2}\right) = 180° - \;\; 72° + 36° \;\; = 72°$, a kako je kut $\measuredangle CDA$ sukut kuta $\measuredangle ADB$

vrijedi da je $|\measuredangle CDA| = 180° - 72° = 108°$.

5. Prvi način:

Trokut *ABC* je jednakokračan i pravokutan trokut pa je $a = |AC| = |BC|$ i $c = |AB|$.

Neka je točka *D* nožište okomice iz točke *R* na pravac *SB*.



Kutovi $\measuredangle CBA$ i $\measuredangle DBR$ su šiljasti kutovi s okomitim kracima jer je $BC \perp BD$ i $AB \perp BR$ pa vrijedi da je $|\measuredangle CBA| = |\measuredangle DBR| = 45°$.

Trokut *BDR* je pravokutan pa je $|\measuredangle BRD| = 90° - |\measuredangle DBR| = 90° - 45° = 45° = |\measuredangle BAC|$.

Budući da je četverokut *APRB* kvadrat, onda je $|BR| = |AB| = c$. Osim toga, $|\measuredangle BRD| = |\measuredangle BAC|$ i

$|\measuredangle DBR| = |\measuredangle CBA|$ pa prema poučku K-S-K o sukladnosti trokuta slijedi da je $\Delta RBD \cong \Delta ABC$.

Posljedica sukladnosti jest da je $|DR| = |CA| = a$. Dužina $\overline{DR}$ je visina tupokutnog trokuta *BRS* na

stranicu $\overline{BS}$ pa je $P_{\Delta BRS} = \dfrac{|BS| \cdot |DR|}{2} = \dfrac{a \cdot a}{2}$.

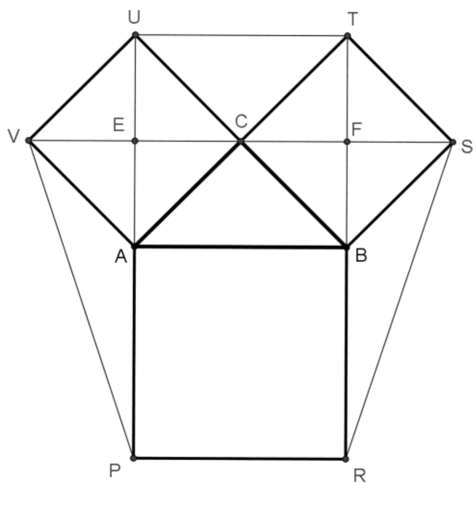
Zbog simetričnosti također vrijedi $P_{\Delta AVP} = \dfrac{a \cdot a}{2}$.

Trokuti *ABC* i *CTU* su pravokutni s katetama duljine *a* pa vrijedi da je $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta CTU} = \dfrac{a \cdot a}{2}$.

Dakle, $P_{\Delta ABC} + P_{\Delta CTU} + P_{\Delta AVP} + P_{\Delta BRS} = 4 \cdot \dfrac{a \cdot a}{2} = 2 \cdot a \cdot a$.

S obzirom da je $P_{BSTC} + P_{ACUV} = a \cdot a + a \cdot a = 2 \cdot a \cdot a$, tvrdnja je dokazana.

Drugi način:



Nacrtaju li se dijagonale kvadrata *BSTC* i *ACUV* (uz oznake kao na slici), vrijedi da su trokuti *ABC*, *BTC*, *TBS*, *TUC*, *UAC* i *AUV* sukladni. Naime, navedeni trokuti su pravokutni s katetama jednakih duljina pa su prema poučku S-K-S o sukladnosti trokuta sukladni.

Vrijedi da je $P_{\Delta ABC} + P_{\Delta CTU} = P_{\Delta TBS} + P_{\Delta BTC} = P_{BSTC}$.

Također, vrijedi da je $|\measuredangle BAC| = |\measuredangle CAU| = 45°$ i $|\measuredangle PAB| = 90°$ pa su točke *P*, *A*, *E* i *U* kolinearne.

Dijagonale kvadrata okomite su i raspolovljuju se pa je $\overline{VC} \perp \overline{AU}$, a točka *E* polovište je dijagonala kvadrata $ACUV$. Dužina $\overline{EV}$ visina je trokuta *AUV* na stranicu $\overline{AU}$, ali je i visina tupokutnog trokuta *AVP* na stranicu $\overline{AP}$.

Trokuti *ABC* i *UAC* su sukladni pa slijedi da je $|AU| = |AB| = |AP|$.

Dalje vrijedi $P_{\Delta AVP} = \dfrac{|AP| \cdot |EV|}{2} = \dfrac{|AU| \cdot |EV|}{2} = P_{\Delta AUV}$.

Na isti način se pokaže da je $P_{\Delta BRS} = P_{\Delta TBS}$.

Slijedi $P_{\Delta BRS} = P_{\Delta TBS} = P_{\Delta ACU}$.

Vrijedi da je $P_{\Delta AVP} + P_{\Delta BRS} = P_{\Delta AUV} + P_{\Delta ACU} = P_{ACUV}$ čime je dokazana tvrdnja da je

$P_{\Delta ABC} + P_{\Delta CTU} + P_{\Delta AVP} + P_{\Delta BRS} = P_{BSTC} + P_{ACUV}$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Trogir, 8.travnja-10.travnja 2015.

7. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je cijena igrice x kuna.

Brat ima $\frac{14}{19}x$ kuna, a sestra $\frac{3}{4}x$ kuna.

Zajedno imaju $\frac{14}{19}x+\frac{3}{4}x=x+185$ kuna.

Dalje je $\frac{14}{19}x+\frac{3}{4}x-x=185$

$$\frac{56+57-76}{76}x=185$$

$$\frac{37}{76}x=185$$

$$x=\frac{185\cdot 76}{37}=380 \text{ kuna.}$$

Brat je imao $\frac{14}{19}\cdot 380=280$ kuna. Sestra je imala $\frac{3}{4}\cdot 380=285$ kuna.

Brat je za igricu dao $\frac{45}{100}\cdot 380=171$ kunu, a sestra 209 kuna.

Bratu je ostalo 109, a sestri 76 kuna.

2. U bubnju je 1000 kuglica pa je broj mogućih elementarnih događaja 1000.

Ako je A = {zbroj znamenaka izvučenog broja je manji od a}, onda je $P(A)=\frac{x}{1000}$, pri čemu je x broj povoljnih elementarnih događaja za događaj A.

Iz $\frac{x}{1000}<0.05$ slijedi $x<50$.

Prebrojimo povoljne elementarne događaje redom za $a = 1, 2, 3,\ldots,$ sve dok taj broj ne prijeđe broj 50.

Zbroj 0 ne može biti niti na jednoj kuglici.

Zbroj 1 može biti na 4 kuglice (1, 10, 100, 1000).

Vrijedi 2 = 2+0+0 (2, 20, 200) ili 2 = 1+1+0 (11, 101, 110) što je novih 6 brojeva odnosno ukupno 10.

Vrijedi 3 = 3+0+0 (3, 30, 300), 3 = 2+1+0 (12, 21, 102, 120, 201, 210) ili 3 = 1+1+1 (111) što je novih 10 brojeva, a ukupno 20 brojeva.

Vrijedi 4 = 4+0+0 (4, 40, 400), 4 = 3+1+0 (13, 31, 103, 130, 301, 310), 4 = 2+2+0 (22, 202, 220) ili 4 = 2+1+1 (112, 121, 211) što je novih 15 brojeva, a ukupno 35 brojeva.

Vrijedi 5 = 5+0+0 (5, 50, 500), 5 = 4+1+0 (14, 41, 104, 140, 401, 410),
5 = 3+2+0 (23, 32, 203, 230, 302, 320), 5 = 3+1+1 (113, 131, 311), 5 = 2+2+1 (122, 212, 221) što je novi 21 broj, a ukupno 56. Time smo prešli traženi broj od 50 povoljnih elementarnih događaja.

Za a = 5, A = {zbroj znamenaka izvučenog broja manji je od 5}, $P(A) = \dfrac{35}{1000} = 0.035 < 0.05$.

Za a = 6, A = {zbroj znamenaka izvučenog broja manji je od 6}, $P(A) = \dfrac{56}{1000} = 0.056 > 0.05$.

Broj a može biti 1, 2, 3, 4 ili 5.

3. Prvi način:

Imamo niz brojeva $x_1, x_2, ..., x_{2015}$ u kojem je svaki broj (osim prvog) prikazan pomoću njegovog prethodnika. Najprije pokažemo da se svaki od tih brojeva može prikazati pomoću broja x_1.

Za x_1 i x_2 traženo već imamo. Dalje je

$$x_3 = \frac{1+x_2}{1-x_2} = \frac{1+\dfrac{1+x_1}{1-x_1}}{1-\dfrac{1+x_1}{1-x_1}} = \frac{\dfrac{1-x_1+1+x_1}{1-x_1}}{\dfrac{1-x_1-1-x_1}{1-x_1}} = \frac{2}{-2x_1} = -\frac{1}{x_1}$$

$$x_4 = \frac{1+x_3}{1-x_3} = \frac{1-\dfrac{1}{x_1}}{1+\dfrac{1}{x_1}} = \frac{\dfrac{x_1-1}{x_1}}{\dfrac{x_1+1}{x_1}} = \frac{x_1-1}{x_1+1}$$

$$x_5 = \frac{1+x_4}{1-x_4} = \frac{1+\dfrac{x_1-1}{x_1+1}}{1-\dfrac{x_1-1}{x_1+1}} = \frac{\dfrac{x_1+1+x_1-1}{x_1+1}}{\dfrac{x_1+1-x_1+1}{x_1+1}} = \frac{2x_1}{2} = x_1.$$

Očito je dalje $x_6 = x_2$, $x_7 = x_3$ i tako dalje…

Općenito za $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_{4k+1} = x_1$, $x_{4k+2} = x_2 = \dfrac{1+x_1}{1-x_1}$, $x_{4k+3} = x_3 = -\dfrac{1}{x_1}$ i $x_{4k} = x_4 = \dfrac{x_1 - 1}{x_1 + 1}$.

Kako je 2015 = 4 · 503 + 3, onda je $x_{2015} = x_3 = -\dfrac{1}{x_1}$.

Iz $-\dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{5}$ slijedi $x_1 = -5$.

Drugi način:

Iz $x_{2015} = \dfrac{1+x_{2014}}{1-x_{2014}} = \dfrac{1}{5}$ izračuna se $x_{2014} = -\dfrac{2}{3}$.

Iz $x_{2014} = \dfrac{1+x_{2013}}{1-x_{2013}} = -\dfrac{2}{3}$ izračuna se $x_{2013} = -5$.

Iz $x_{2013} = \dfrac{1+x_{2012}}{1-x_{2012}} = -5$ izračuna se $x_{2012} = \dfrac{3}{2}$.

Iz $x_{2012} = \dfrac{1+x_{2011}}{1-x_{2011}} = \dfrac{3}{2}$ izračuna se $x_{2011} = \dfrac{1}{5}$.

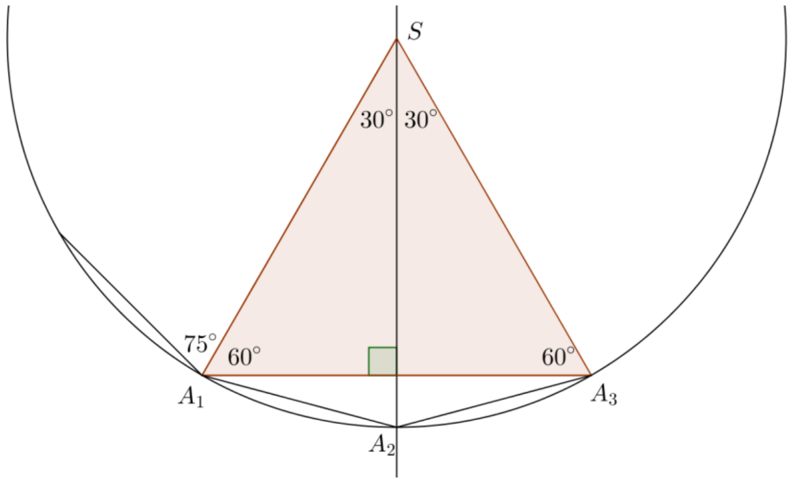
Iz $x_{2011} = \dfrac{1+x_{2010}}{1-x_{2010}} = \dfrac{1}{5}$ može se zaključiti da će biti $x_{2010} = -\dfrac{2}{3}$ i tako dalje…

Općenito za $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_{4k} = x_{2012} = \dfrac{3}{2}$, $x_{4k+1} = x_{2013} = -5$, $x_{4k+2} = x_{2014} = -\dfrac{2}{3}$ i

$x_{4k+3} = x_{2015} = \dfrac{1}{5}$.

Onda je $x_1 = x_{4k+1} = -5$.

4. Prvi način:



Središnji kut $\measuredangle A_1SA_2$ iznosi $\alpha = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$.

Unutarnji kut $\measuredangle A_1A_2A_3$ iznosi $\beta = \frac{(12-2)\cdot 180^\circ}{12} = 150^\circ$.

Kutovi uz osnovicu karakterističnog trokuta iznose $\frac{\beta}{2} = 75^\circ$.

Kako je $|\measuredangle A_1SA_3| = 2\cdot 30° = 60°$ i $|SA_1| = |SA_3|$, onda je trokut A_1A_3S jednakostraničan pa je

$|A_1A_3| = |SA_1| = |SA_3| = 12\,\text{cm}$.

Pravac SA_2 je simetrala kuta $\measuredangle A_1SA_3$ i simetrala stranice $\overline{A_1A_3}$ trokuta A_1A_3S pa je okomit na stranicu $\overline{A_1A_3}$.

Četverokut $A_1A_2A_3S$ je četverokut s okomitim dijagonalama pa je njegova površina

$$P = \frac{|A_1A_3|\cdot|SA_2|}{2} = \frac{12\cdot 12}{2} = 72\,\text{cm}^2.$$

Takvih sukladnih četverokuta ima 6 pa je površina mnogokuta $6 \cdot 72 = 432\ \text{cm}^2$.

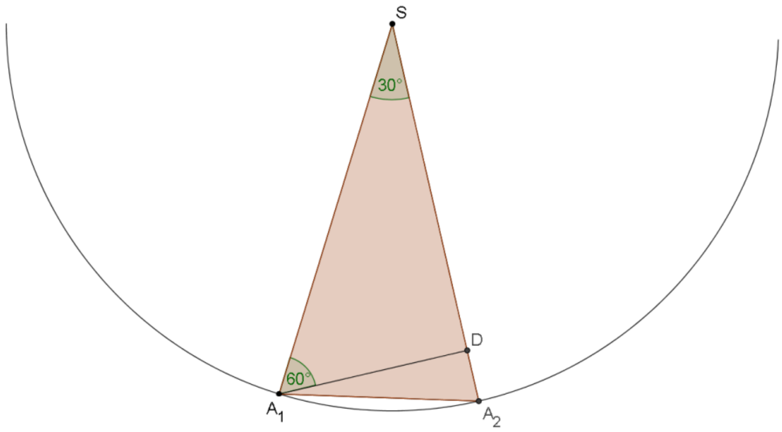
Drugi način:

Središnji kut $\measuredangle A_1SA_2$ iznosi $\alpha = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$.

Unutarnji kut $\measuredangle A_1A_2A_3$ iznosi $\beta = \frac{(12-2)\cdot 180^\circ}{12} = 150^\circ$.

Kutovi uz osnovicu karakterističnog trokuta iznose $\frac{\beta}{2} = 75^\circ$.

U trokutu A_1A_2S nacrtamo visinu iz A_1 na stranicu $\overline{A_2S}$ te neka je D nožište te visine.



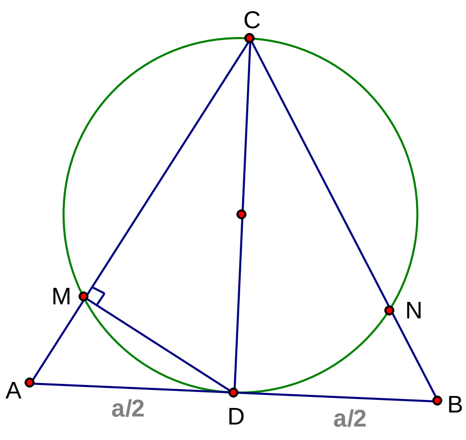
Tada je trokut A_1DS polovica jednakostraničnog trokuta pa je $|A_1D| = \frac{|A_1S|}{2} = 6\,\text{cm}$.

Površina karakterističnog trokuta A_1A_2S je $P = \frac{|A_2S| \cdot |A_1D|}{2} = \frac{12 \cdot 6}{2} = 36\,\text{cm}^2$.

Pravilni dvanaesterokut ima 12 sukladnih karakterističnih trokuta pa je površina mnogokuta

$12 \cdot 36 = 432\ \text{cm}^2$.

5. Skica:



Kako je $\measuredangle DMC$ obodni kut nad promjerom kružnice, onda je $|\measuredangle DMC| = 90°$ pa je trokut DCM

pravokutan trokut.

Zbog toga je i trokut *ADM* pravokutan.

Kako je $|\measuredangle AMD| = 90°$, a prema uvjetu zadatka $|\measuredangle DAC| = 60°$, to znači da je trokut *ADM* polovica jednakostraničnog trokuta čija je duljina stranice $\frac{a}{2}$.

Zato je $|AM| = \frac{|AD|}{2} = \frac{a}{4}$.

Tada je $|MC| = \frac{3a}{4}$.

Slijedi $|AM|:|MC| = \frac{a}{4}:\frac{3a}{4} = 1:3$, a to smo i trebali dokazati.

Na isti način dokazujemo da i točka *N* dijeli stranicu *BC* u istom omjeru, tj. da vrijedi $|BN|:|NC| = 1:3$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Trogir, 8.travnja-10.travnja 2015.

8. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Iz $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{48}$ slijedi $\sqrt{x}=\sqrt{48}-\sqrt{y}$, a nakon kvadriranja je $x=48-2\sqrt{48y}+y$.

Nakon djelomičnog korjenovanja dobivamo $x=48+y-8\sqrt{3y}$.

Budući da su x i y prirodni brojevi, broj $3y$ mora biti kvadrat nekog prirodnog broja, tj. mora biti $y=3m^2$, pri čemu je m prirodan broj.

Analognim zaključivanjem dobiva se da je $y=48+x-8\sqrt{3x}$, tj. da je $x=3n^2$, pri čemu je n prirodan broj.

Zadanu jednadžbu možemo napisati u obliku $\sqrt{3m^2}+\sqrt{3n^2}=\sqrt{48}$, tj. $m\sqrt{3}+n\sqrt{3}=4\sqrt{3}$. Nakon dijeljenja jednadžbe brojem $\sqrt{3}$ dobivamo jednadžbu $m+n=4$. Njezina su rješenja zapisana u tablici:

m	1	2	3
n	3	2	1

Iz $x=3n^2$ i $y=3m^2$ rješenja zadane jednadžbe su:

x	**27**	**12**	**3**
y	**3**	**12**	**27**

Drugi način:

Kako su x i y prirodni brojevi, iz $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{48}$ slijedi $x<48$ i $y<48$.

Iz $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{48}$ slijedi $\sqrt{x}=\sqrt{48}-\sqrt{y}$, a nakon kvadriranja je $x=48-2\sqrt{48y}+y$.

Budući da je x prirodan broj, $48y$ mora biti kvadrat nekog prirodnog broja.

S obzirom da je $48=16\cdot 3=4^2\cdot 3$, slijedi da je $y=3m^2$, pri čemu je m prirodan broj.

Za $m=1$ je $y=3$ te $x=27$.

Za $m = 2$ je $y = 12$ te $x = 12$.

Za $m = 3$ je $y = 27$ te $x = 3$.

Za $m \geq 4$ je $y \geq 48$, a to nije moguće.

2. Prvi način:

Ako su brojevi jednaki, jednaki su i njihovi kvadrati pa je razlika jednaka 0, što je djeljivo sa 72.

Neka su $m, n \in \mathbb{Z}$, oba neparna i $m < n$.

Kako su m i n djeljivi brojem 3, onda je $m = 3l$, $n = 3k$, $k, l \in \mathbb{Z}$, $l < k$, l, k neparni.

Vrijedi $n^2 - m^2 = (n+m)(n-m) = (3k+3l)(3k-3l) = 9(k+l)(k-l)$.

Dakle, $n^2 - m^2$ je djeljiv brojem 9.

Kako su l, k neparni, onda vrijedi $k = 2p+1$, $l = 2r+1$, $p, r \in \mathbb{Z}$.

Budući da je $k + l = 2p + 1 + 2r + 1 = 2(p + r + 1)$ i $k - l = 2p + 1 - (2r + 1) = 2(p - r)$, oba su broja parna.

Analogno se pokaže da su $p + r$ i $p - r$ ili oba parna ili oba neparna. No, tada je ili $p + r + 1$ paran ili $p - r$ paran. Dakle, jedan od brojeva $k + l$ i $k - l$ je djeljiv s 4.

To znači da je $n^2 - m^2$ djeljiv brojem $9 \cdot 2 \cdot 4 = 72$.

Drugi način:

Neparni brojevi djeljivi brojem 3 su …, −15, −9, −3, 3, 9, 15, 21, 27, … Ti su brojevi oblika $3(2a + 1) = 6a + 3$, tj. oni pri dijeljenju brojem 6 daju ostatak 3.

Neka je $n = 6a + 3$ i $m = 6b + 3$, pri čemu je $n > m$ odnosno $a > b$.

Tada je $n^2 - m^2 = (n+m)(n-m) = (6a+3+6b+3)(6a+3-6b-3)$, tj.

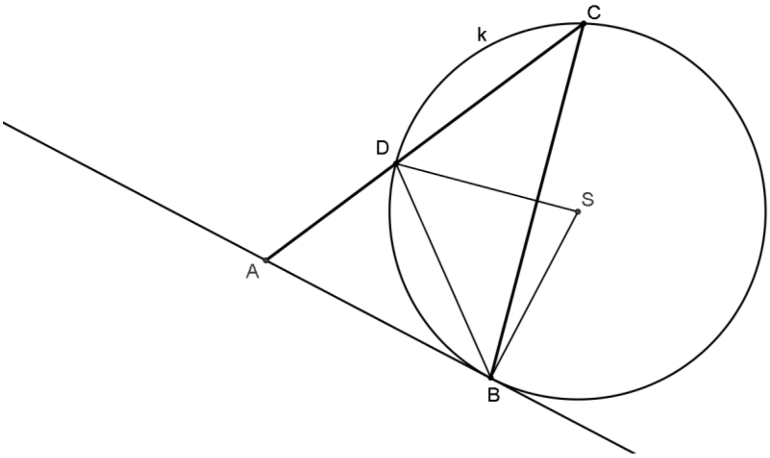
$n^2 - m^2 = 6(a+b+1) \cdot 6(a-b) = 36(a+b+1)(a-b)$.

Dakle, $n^2 - m^2$ je djeljiv brojem 36.

Ako su a i b iste parnosti (oba parni ili oba neparni), razlika $a - b$ je paran broj pa je $n^2 - m^2$ djeljiv brojem $36 \cdot 2 = 72$.

Ako su brojevi a i b različite parnosti (jedan paran, a drugi neparan), zbroj $a + b + 1$ je paran broj pa je $n^2 - m^2$ djeljiv brojem $36 \cdot 2 = 72$.

3.



Kako je $|BD| = |CD|$, onda je $|\measuredangle DCB| = |\measuredangle CBD| = \varphi$.

Prema poučku o obodnom i središnjem kutu vrijedi $|\measuredangle DSB| = 2|\measuredangle DCB| = 2\varphi$.

Budući da je $|DS| = |BS| = r$, trokut *BSD* je jednakokračan pa slijedi

$$|\measuredangle BDS| = |\measuredangle SBD| = \frac{180° - |\measuredangle DSB|}{2} = \frac{180° - 2\varphi}{2} = 90° - \varphi .$$

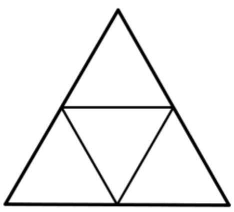
S obzirom da je pravac *AB* tangenta opisane kružnica trokuta *BCD*, vrijedi $|\measuredangle SBA| = 90°$.

Dalje je $|\measuredangle DBA| = |\measuredangle SBA| - |\measuredangle SBD| = 90° - (90° - \varphi) = \varphi$ što znači da je $|\measuredangle CBD| = |\measuredangle DBA|$,

a time je tvrdnja dokazana.

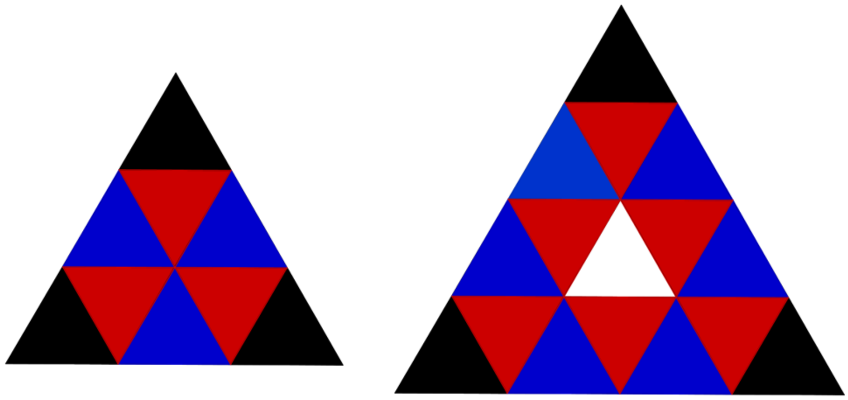
4. Prvi način:

Za $n = 2$



broj trokutića kojima barem jedna stranica leži na stranici početnog trokuta je 3, a broj svih preostalih trokutića je 1 što znači da uvjet nije ispunjen.

Za $n > 2$ neka su trokutići u vrhovima zadanog trokuta crni, trokutići koji imaju točno jednu zajedničku stranicu s rubom trokuta (a nisu u vrhu zadanog trokuta) plavi, trokutići koji imaju samo zajednički vrh s rubom polaznog trokuta crveni, a trokutići u unutrašnjosti polaznog trokuta bijeli.



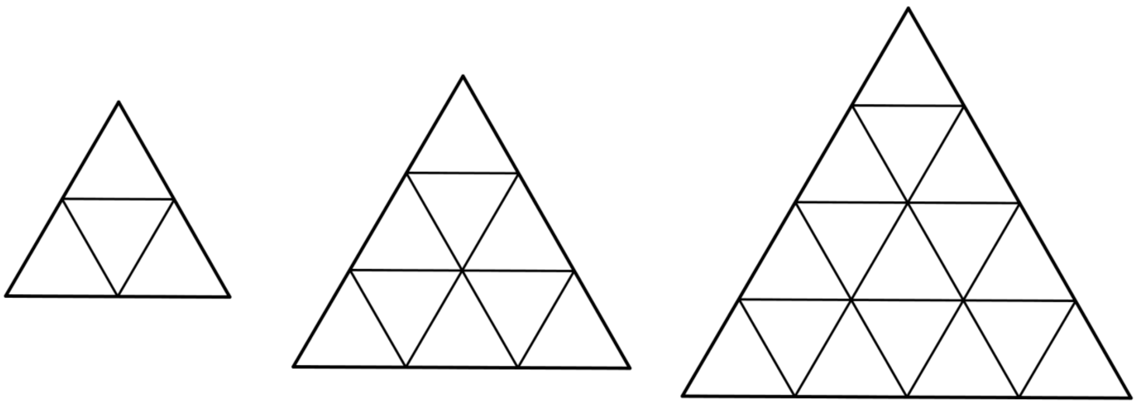
Zadani uvjet sada možemo preoblikovati ovako: "ukupni broj crnih i plavih trokutića za 1 je manji od ukupnog broja bijelih i crvenih trokutića".

Uočavamo da crvenih i plavih trokutića ima jednako mnogo (uočimo jedan crveni trokutić, a zatim u pozitivnom smjeru plavi sa zajedničkom stranicom pa u pozitivnom smjeru crveni koji ima zajedničku stranicu s plavim te na taj način sve dok se ne pojavi naš početni crveni trokutić).

To znači da broj crnih trokutića mora biti za 1 manji od broja bijelih trokutića. No, broj crnih trokutića je uvijek 3 pa je broj bijelih trokutića jednak 4.

To je moguće samo za $n = 5$.

Drugi način:



Broj trokutića kojima barem jedna stranica leži na stranici početnog trokuta je $3 + 3(n-2) = 3(n-1)$ (3 trokutića u vrhovima i još po $n-2$ trokutića na svakoj stranici).

Ukupan broj trokutića je, gledano po "retcima", $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1)$.

Broj trokutića kojima niti jedna stranica ne leži na nekoj stranici početnog trokuta je

$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) - 3(n-1)$ pa iz zadanog uvjeta dobivamo jednadžbu

$3(n-1) + 1 = 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) - 3(n-1)$ odnosno $6(n-1)+1 = 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1)$.

Za $n = 2$ dobili bismo $7 = 4$ što nije točno.

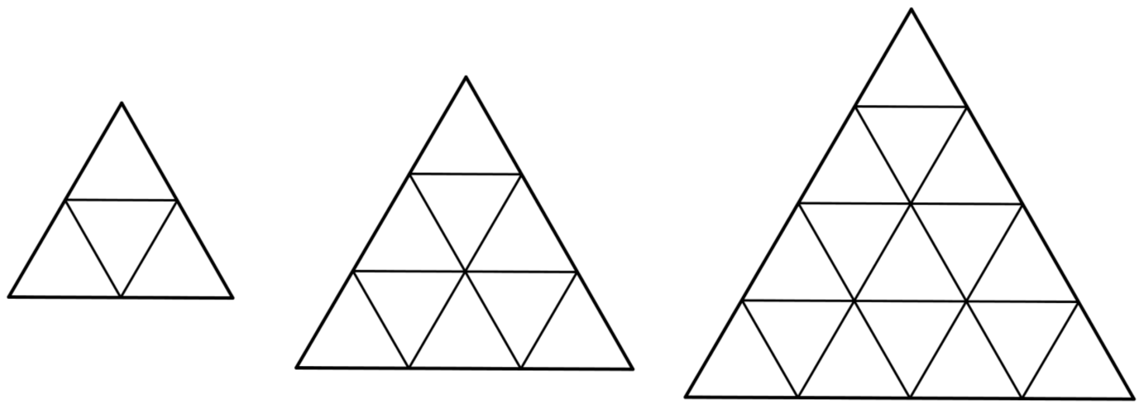
Za $n = 3$ dobili bismo $13 = 9$ što nije točno.

Za $n = 4$ dobili bismo $19 = 16$ što nije točno.

Za $n = 5$ dobili bismo $25 = 25$ pa je to traženi n.

Za $n > 5$ nema rješenja jer se daljnjim povećanjem broja n za 1 lijeva strana povećava za 6, a desna za $2n-1$ (11, 13, 15, 17, ...).

Treći način:



Ukupan broj trokutića je, gledano po "retcima", $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$.

Broj trokutića kojima barem jedna stranica leži na stranici početnog trokuta je $3n-3$ (n trokutića na svakoj stranici umanjeno za ona 3 u vrhovima početnog trokuta koji su brojani na po dvije stranice).

Iz zadanih uvjeta broj preostalih trokutića tada mora biti $3n-3+1$.

Tada vrijedi jednadžba $n^2 = 3n - 3 + 3n - 3 + 1$ odnosno $n^2 - 6n + 5 = 0$.

Dalje je $n^2 - 5n - n + 5 = 0$

$$n(n-5) - 1(n-5) = 0$$

$$(n-5)(n-1) = 0.$$

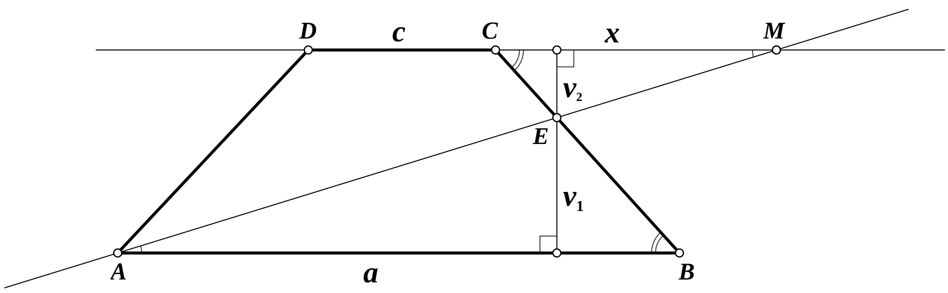
Dakle, $n = 5$ ili $n = 1$.

Kako je $n > 1$, onda je $n = 5$.

Napomena: Jednadžba $n^2 - 6n + 5 = 0$ može se rješavati dalje $n^2 - 2 \cdot n \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 5 = 0$ pa je $(n-3)^2 = 4$. Dalje je $n - 3 = 2$ odnosno $n = 5$ ili $n - 3 = -2$ odnosno $n = 1$ što nije moguće.

5. Prvi način:

Neka je duljina veće osnovice a, manje c, visina trapeza $v = v_1 + v_2$ i neka je x udaljenost točke M od vrha C.



Iz uvjeta zadatka slijedi $a : c = 3 : 1$ odnosno $a = 3c$.

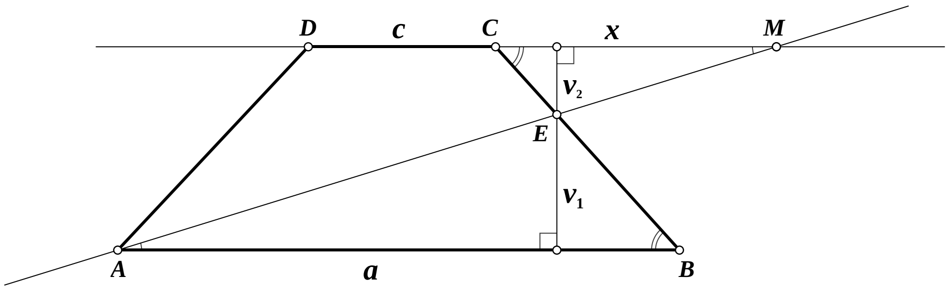
Kako je $P_{\Delta ABE} = P_{AECD}$, vrijedi $\frac{av_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+c}{2}(v_1 + v_2)$.

Uvrštavanjem $a = 3c$ slijedi $\frac{3cv_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3c+c}{2}(v_1 + v_2)$ pa sređivanjem dobivamo $v_1 : v_2 = 2 : 1$.

Iz sličnosti trokuta ABE i MCE slijedi $a : x = v_1 : v_2$ pa je $a : x = 2 : 1$ odnosno $x = \frac{a}{2}$ što je i trebalo dokazati.

Drugi način:

Neka je duljina veće osnovice a, manje c, visina trapeza $v = v_1 + v_2$ i neka je x udaljenost točke M od vrha C.



Iz uvjeta zadatka slijedi $a : c = 3 : 1$ odnosno $a = 3c$.

Kako je $P_{\Delta ABE} = P_{AECD}$, vrijedi $\frac{av_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+c}{2}(v_1 + v_2)$.

Sređivanjem posljednje jednakosti dobivamo $2av_1 = (a + c)\cdot(v_1 + v_2)$ odnosno

$2av_1 = av_1 + av_2 + cv_1 + cv_2$ i konačno $av_1 = av_2 + cv_1 + cv_2$.

Iz sličnosti trokuta ABE i MCE slijedi $a : x = v_1 : v_2$ pa je $x = \frac{av_2}{v_1}$.

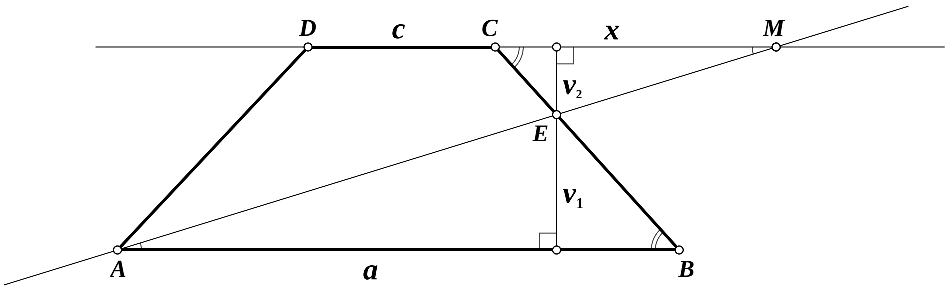
Uvrštavanjem $a = 3c$ u jednakost $av_1 = av_2 + cv_1 + cv_2$ dobivamo $3cv_1 = 3cv_2 + cv_1 + cv_2$ odnosno

$2cv_1 = 4cv_2$ te je $v_1 = 2v_2$.

Konačno dobivamo $x = \frac{av_2}{2v_2} = \frac{a}{2}$ što je i trebalo dokazati.

Treći način:

Neka je duljina veće osnovice a, manje c, visina trapeza $v = v_1 + v_2$ i neka je x udaljenost točke M od vrha C.



Iz uvjeta zadatka slijedi $a : c = 3 : 1$ odnosno $a = 3c$.

Kako je $P_{\Delta ABE} = P_{AECD} = \frac{1}{2} P_{ABCD}$, slijedi $\frac{av_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+c}{2} v$ odnosno $\frac{3cv_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3c+c}{2} v$ pa sređivanjem dobivamo $v_1 = \frac{2}{3}v$.

Prema tome, $v_2 = \frac{1}{3}v$.

Budući da je $P_{AECD} = \frac{1}{2}P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3c+c}{2}v = cv$, slijedi

$$P_{\Delta AMD} = P_{AECD} + P_{\Delta EMC} = cv + \frac{1}{2} \cdot xv_2 = cv + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{3}v = v(c + \frac{x}{6}).$$

S druge strane, $P_{\Delta AMD} = \frac{(c+x) \cdot v}{2}$.

Dakle, $v(c + \frac{x}{6}) = \frac{(c+x) \cdot v}{2}$.

Dalje je $6c + x = 3c + 3x$ odnosno $2x = 3c$ pa je $x = \frac{3c}{2} = \frac{a}{2}$ što je i trebalo dokazati.