Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

Trogir, 9. travnja 2015.

1. Oko okruglog stola nalazi se deset stolica označenih redom brojevima od 1 do 10 (pri čemu su stolice 1 i 10 susjedne) i na svakoj sjedi po jedan vitez. Svaki vitez na početku ima paran broj zlatnika. Istovremeno svaki vitez pokloni polovinu svojih zlatnika svom lijevom susjedu, a pola svojih zlatnika svom desnom susjedu. Nakon toga vitez na stolici 1 ima 22 zlatnika, a svaki idući za dva više, sve do viteza na stolici 10 koji ima 40 zlatnika.

Koliko je zlatnika na početku imao vitez koji na kraju ima 36 zlatnika?

2. Dokaži da ne postoji prirodni broj n takav da $6^n - 1$ dijeli $7^n - 1$.

3. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a^4 + 3ab^3}{a^3 + 2b^3} + \frac{b^4 + 3bc^3}{b^3 + 2c^3} + \frac{c^4 + 3ca^3}{c^3 + 2a^3} \leqslant 4.$$

4. Na ploči se nalazi prvih n prirodnih brojeva ($n \geqslant 3$). Ante ponavlja sljedeći postupak: najprije po volji bira dva broja na ploči, a zatim ih povećava za isti proizvoljni iznos.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje Ante, ponavljanjem tog postupka, može postići da svi brojevi na ploči budu jednaki.

5. Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama A i B. Pravac l siječe kružnicu k_1 u točkama C i E, a kružnicu k_2 u točkama D i F tako da se točka D nalazi između C i E, a točka E između D i F. Pravci CA i BF sijeku se u točki G, a pravci DA i BE u točki H.

Dokaži da je $CF \parallel HG$.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

Trogir, 9. travnja 2015.

1. Neka su a, b, c i d međusobno različiti realni brojevi. Ako su a i b rješenja jednadžbe $x^2-10cx-11d=0$, a c i d rješenja jednadžbe $x^2-10ax-11b=0$, odredi zbroj $a+b+c+d$.

2. Odredi sve trojke prirodnih brojeva (p, m, n) takve da je p prost broj i da vrijedi

$$p^m - n^3 = 8.$$

3. Neka je ABC šiljastokutni trokut u kojem je $|AC| > |AB|$. Neka je N nožište visine iz A na stranicu $\overline{BC}$. Neka je točka P na produžetku dužine $\overline{AB}$ preko vrha B, te neka je točka Q na produžetku dužine $\overline{AC}$ preko vrha C tako da je $BPQC$ tetivni četverokut.

Ako vrijedi $|NP| = |NQ|$, dokaži da je N središte kružnice opisane trokutu APQ.

4. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a}{a+b^2}+\frac{b}{b+c^2}+\frac{c}{c+a^2} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

5. Skakavac se na početku nalazi u ishodištu brojevnog pravca, na broju 0, a zatim skače uvijek u istom smjeru. Za prirodni broj k, skakavac u prvom skoku dolazi na broj 1, a svaki sljedeći skok je točno k puta dulji od prethodnog. Na mjestu svakog višekratnika broja 2015 nalazi se rupa.

Odredi sve prirodne brojeve k takve da skakavac može skočiti 2015 puta, a da pritom ne uskoči u rupu.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

Trogir, 9. travnja 2015.

1. U trokutu ABC vrijedi $|BC| + |AC| = 2|AB|$ i $\sphericalangle BAC - \sphericalangle CBA = 90°$.

Odredi kosinus kuta $\sphericalangle ACB$.

2. Odredi sve trojke prirodnih brojeva (p, m, n) takve da je p prost broj i da vrijedi

$$2^m p^2 + 1 = n^5.$$

3. U nekoj državi između svaka dva grada postoji ili izravna autobusna ili izravna željeznička veza (sve veze su dvosmjerne i ne prolaze ni kroz jedan drugi grad).

Dokaži da je gradove u toj državi moguće rasporediti u dva disjunktna skupa tako da je sve gradove u jednom skupu moguće obići putujući samo željeznicom tako da se nijedan grad ne posjeti dvaput, a sve gradove u drugom skupu putujući samo autobusom tako da se nijedan grad ne posjeti dvaput.

4. Na stranici $\overline{AC}$ trokuta ABC nalaze se točke D i E tako da je točka D između C i E. Neka je F sjecište kružnice opisane trokutu ABD s pravcem koji prolazi kroz točku E i paralelan je s BC tako da se točke E i F nalaze s različitih strana pravca AB. Neka je G sjecište kružnice opisane trokutu BCD s pravcem koji prolazi kroz točku E i paralelan je s AB tako da se točke E i G nalaze s različitih strana pravca BC.

Dokaži da točke D, E, F i G leže na istoj kružnici.

5. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c \geqslant 1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a - bc}{a + bc} + \frac{b - ca}{b + ca} + \frac{c - ab}{c + ab} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

Trogir, 9. travnja 2015.

1. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(xy)(x + f(y)) = x^2 f(y) + y^2 f(x).$$

2. Neka je ABC pravokutni trokut s pravim kutom u vrhu C. Neka su A', B', C' redom nožišta okomica povučenih iz težišta trokuta ABC na pravce BC, CA, AB.

Odredi omjer površina trokuta $A'B'C'$ i ABC.

3. Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoji djelitelj d broja n takav da

$$dn + 1 \mid d^2 + n^2.$$

4. Neka je n prirodni broj. Odredi sve pozitivne realne brojeve x za koje vrijedi

$$\frac{2^2}{x+1} + \frac{3^2}{x+2} + \cdots + \frac{(n+1)^2}{x+n} + nx^2 = nx + \frac{n(n+3)}{2}.$$

5. Na ploču dimenzija 8×8 postavljaju se tromino-pločice oblika  tako da svaka tromino-pločica prekriva točno tri polja ploče, a međusobno se ne prekrivaju.

Koliko je najmanje tromino-pločica potrebno postaviti na ploču ako želimo da se nakon toga više ne može postaviti nijedna dodatna tromino-pločica?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.