DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

Trogir, 9. travnja 2015.

Zadatak A-1.1.

Oko okruglog stola nalazi se deset stolica označenih redom brojevima od 1 do 10 (pri čemu su stolice 1 i 10 susjedne) i na svakoj sjedi po jedan vitez. Svaki vitez na početku ima paran broj zlatnika. Istovremeno svaki vitez pokloni polovinu svojih zlatnika svom lijevom susjedu, a pola svojih zlatnika svom desnom susjedu. Nakon toga vitez na stolici 1 ima 22 zlatnika, a svaki idući za dva više, sve do viteza na stolici 10 koji ima 40 zlatnika.

Koliko je zlatnika na početku imao vitez koji na kraju ima 36 zlatnika?

Prvo rješenje.

Uvedimo oznake tako da $2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_{10}$ označava redom brojeve zlatnika koje su vitezovi na stolicama $1, 2, \ldots, 10$ imali na početku. Tražimo $2x_8$.

Imamo sustav

$x_{10} + x_2 = 22,\ x_1 + x_3 = 24,\ x_2 + x_4 = 26,\ x_3 + x_5 = 28,\ \ldots,\ x_8 + x_{10} = 38,\ x_9 + x_1 = 40.$

Uvrštavanjem dobivamo

$$\begin{aligned}
x_{10} &= 38 - x_8 \\
x_2 &= 22 - x_{10} = 22 - (38 - x_8) = x_8 - 16 \\
x_4 &= 26 - x_2 = 26 - (x_8 - 16) = 42 - x_8 \\
x_6 &= 30 - x_4 = 30 - (42 - x_8) = x_8 - 12 \\
x_8 &= 34 - x_6 = 34 - (x_8 - 12) = 46 - x_8.
\end{aligned}$$

Iz zadnje jednakosti slijedi $2x_8 = 46$.

Vitez koji na kraju ima 36 zlatnika je na početku imao 46 zlatnika.

Drugo rješenje.

Vitez koji je na kraju imao 36 zlatnika sjedi na stolici 8. Neka je $2x$ broj zlatnika koje je taj vitez imao na početku.

Deveti vitez na kraju ima 38 zlatnika, što je zbroj polovina brojeva zlatnika osmog i desetog viteza na početku. Zaključujemo da je deseti vitez je na početku imao $2 \cdot (38 - x)$.

Prvi vitez na kraju ima 22 zlatnika što je zbroj polovina brojeva drugog i desetog viteza, dakle drugi vitez je na početku imao $2 \cdot (22 - (38 - x))$ zlatnika.

Nastavimo li zaključivati na ovaj način, dobivamo da je na početku broj zlatnika osmog viteza

$$2 \cdot (34 - (30 - (26 - (22 - (38 - x))))).$$

Budući da je osmi vitez na početku imao $2x$ zlatnika, mora vrijediti

$$2x = 2 \cdot (34 - (30 - (26 - (22 - (38 - x))))) = 2 \cdot (46 - x).$$

Slijedi da je $2x = 46$.

Vitez koji na kraju ima 36 zlatnika je na početku imao 46 zlatnika.

Zadatak A-1.2.

Dokaži da ne postoji prirodni broj n takav da $6^n - 1$ dijeli $7^n - 1$.

Rješenje.

Pretpostavimo da postoji takav n.

Primijetimo da 5 dijeli $6^n - 1 = (6-1)(6^{n-1} + \cdots + 1)$, pa 5 nužno dijeli i $7^n - 1$.

Potencije broja 7 pri dijeljenju s 5 daju ostatke $2, 4, 3, 1, \ldots$ i ti se ostatci periodički ponavljaju. Zato će $7^n - 1$ biti djeljivo s 5 samo ako je n djeljiv s 4, tj. $n = 4k$.

Prema formuli za razliku k-tih potencija, zaključujemo da $6^4 - 1$ dijeli $6^{4k} - 1$. Nadalje, 7 dijeli $6^4 - 1 = (6^2 - 1)(6^2 + 1) = 35 \cdot 37 = 5 \cdot 7 \cdot 37$. Stoga, 7 dijeli $6^n - 1$, pa onda i $7^n - 1$, što je kontradikcija.

Zadatak A-1.3.

Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a^4 + 3ab^3}{a^3 + 2b^3} + \frac{b^4 + 3bc^3}{b^3 + 2c^3} + \frac{c^4 + 3ca^3}{c^3 + 2a^3} \leqslant 4.$$

Rješenje.

Uočimo da je

$$\frac{a^4 + 3ab^3}{a^3 + 2b^3} = \frac{a(a^3 + 2b^3) + ab^3}{a^3 + 2b^3} = a + \frac{ab^3}{a^3 + 2b^3}.$$

Po nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine slijedi

$$a^3 + 2b^3 = a^3 + b^3 + b^3 \geqslant 3\sqrt[3]{a^3 b^3 b^3} = 3ab^2.$$

Zaključujemo da je

$$\frac{a^4 + 3ab^3}{a^3 + 2b^3} = a + \frac{ab^3}{a^3 + 2b^3} \leqslant a + \frac{ab^3}{3ab^2} = a + \frac{b}{3}.$$

Na isti način dobivamo

$$\frac{b^4 + 3bc^3}{b^3 + 2c^3} \leqslant b + \frac{c}{3} \qquad \text{i} \qquad \frac{c^4 + 3ca^3}{c^3 + 2a^3} \leqslant c + \frac{a}{3},$$

pa zbrajanjem nejednakosti slijedi

$$\frac{a^4 + 3ab^3}{a^3 + 2b^3} + \frac{b^4 + 3bc^3}{b^3 + 2c^3} + \frac{c^4 + 3ca^3}{c^3 + 2a^3} \leqslant \frac{4}{3}(a + b + c).$$

Na kraju korištenjem nejednakosti između aritmetičke i kvadratne sredine dobivamo

$$4 \cdot \frac{a + b + c}{3} \leqslant 4 \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} = 4.$$

Time je dokaz završen.

Zadatak A-1.4.

Na ploči se nalazi prvih n prirodnih brojeva ($n \geqslant 3$). Ante ponavlja sljedeći postupak: najprije po volji bira dva broja na ploči, a zatim ih povećava za isti proizvoljni iznos.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje Ante, ponavljanjem tog postupka, može postići da svi brojevi na ploči budu jednaki.

Rješenje.

Neka je $n = 4k$. Tada Ante može postići da svi brojevi na ploči budu jednaki na sljedeći način: on povećava za 1 brojeve 1 i 3, 5 i 7, ..., $4k - 3$ i $4k - 1$. Time na ploči dobiva sve parne brojeve manje ili jednake n napisane po dva puta. Na kraju, 2 i 2 poveća za $n - 2$, 4 i 4 za $n - 4, \ldots$, $n - 2$ i $n - 2$ za 2, te dobiva da su svi brojevi na ploči jednaki n.

Neka je $n = 2k + 1$. Tada Ante može postići da svi brojevi na ploči budu jednaki na sljedeći način: on povećava za 1 brojeve 1 i n, 3 i n, ..., $n - 2$ i n. Time na ploči dobiva sve parne brojeve manje ili jednake n napisane po dva puta i broj $\frac{3n-1}{2}$. Na kraju, 2 i 2 poveća za $\frac{3n-5}{2}$, 4 i 4 poveća za $\frac{3n-9}{2}$, ..., $n - 1$ i $n - 1$ poveća za $\frac{n+1}{2}$.

Neka je $n = 4k + 2$. Tada Ante ne može postići da svi brojevi budu jednaki. Zbroj svih brojeva na ploči je na početku neparan, jer je

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = (2k+1)(4k+3).$$

Prilikom svakog koraka zbroj brojeva na ploči se povećava za paran broj, pa nikada neće moći biti paran koliki bi trebao biti u slučaju da su svi brojevi na ploči (kojih ima paran broj) jednaki.

Ante može postići da su svi brojevi na ploči jednaki ako i samo ako n nije oblika $4k+2$, $k \in \mathbb{N}$.

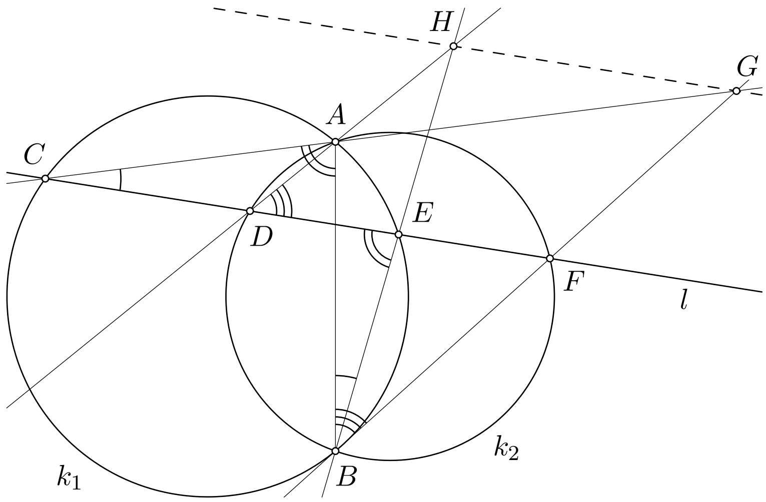
Zadatak A-1.5.

Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama A i B. Pravac l siječe kružnicu k_1 u točkama C i E, a kružnicu k_2 u točkama D i F tako da se točka D nalazi između C i E, a točka E između D i F. Pravci CA i BF sijeku se u točki G, a pravci DA i BE u točki H.

Dokaži da je $CF \parallel HG$.

Rješenje.

Dovoljno je dokazati da je $\sphericalangle ECA = \sphericalangle HGA$.



Budući da je četverokut $ACBE$ tetivan, vrijedi $\sphericalangle ECA = \sphericalangle EBA$, pa je dovoljno pokazati da je $ABGH$ tetivni četverokut.

Iz trokuta DEH imamo $\sphericalangle DHE = 180° - \sphericalangle EDH - \sphericalangle HED$, odnosno

$$\sphericalangle AHB = \sphericalangle DHE = 180° - \sphericalangle FDA - (180° - \sphericalangle CEB),$$

te koristeći da je $\sphericalangle CEB = \sphericalangle CAB$ (što vrijedi jer je $ACBE$ tetivni četverokut) slijedi

$$\sphericalangle AHB = 180° - \sphericalangle FDA - (180° - \sphericalangle CAB) = 180° - \sphericalangle FDA - \sphericalangle GBA.$$

Četverokut $ADBF$ je tetivan, pa vrijedi $\sphericalangle ADF = \sphericalangle ABF = \sphericalangle ABG$. Odavde dobivamo

$$\sphericalangle AHB = 180° - \sphericalangle FBA - \sphericalangle BAG = 180° - \sphericalangle GBA - \sphericalangle BAG = \sphericalangle AGB.$$

To povlači da je $ABGH$ tetivni četverokut, pa je dokaz završen.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

Trogir, 9. travnja 2015.

Zadatak A-2.1.

Neka su a, b, c i d međusobno različiti realni brojevi. Ako su a i b rješenja jednadžbe $x^2 - 10cx - 11d = 0$, a c i d rješenja jednadžbe $x^2 - 10ax - 11b = 0$, odredi zbroj $a+b+c+d$.

Rješenje.

Iz Vièteovih formula slijedi da je $a + b = 10c$ i $c + d = 10a$. Zbrajanjem jednakosti $a + b = 10c$ i $c + d = 10a$ dobivamo da je

$$a + b + c + d = 10(a + c).$$

Budući da je a rješenje jednažbe $x^2 - 10cx - 11d = 0$ i $d = 10a - c$ slijedi da je

$$0 = a^2 - 10ac - 11d = a^2 - 10ac - 11(10a - c) = a^2 - 110a + 11c - 10ac.$$

Analogno dobivamo

$$c^2 - 110c + 11a - 10ac = 0.$$

Oduzimanjem ove dvije jednadžbe slijedi

$$(a - c)(a + c - 121) = 0.$$

Dijeljenjem s $a - c \neq 0$ dobivamo $a + c = 121$. Dakle, $a + b + c + d = 1210$.

Zadatak A-2.2.

Odredi sve trojke prirodnih brojeva (p, m, n) takve da je p prost broj i da vrijedi

$$p^m - n^3 = 8.$$

Rješenje.

Prebacivanjem n^3, na desnoj strani dobivamo zbroj kubova:

$$p^m = n^3 + 8 = (n + 2)(n^2 - 2n + 4)$$

Budući da je p prost, svaki od faktora s desne strane mora biti njegova potencija:

$$\begin{aligned} n + 2 &= p^\alpha, \\ n^2 - 2n + 4 &= p^\beta. \end{aligned}$$

Primijetimo još da je $n^2 - 2n + 4 \geqslant n + 2$, jer je to ekvivalentno tvrdnji da je $n^2 - 3n + 2 \geqslant 0$, odnosno $(n - 1)(n - 2) \geqslant 0$, što vrijedi jer je n prirodan broj, pa je $\beta \geqslant \alpha$.

Zaključujemo da p^α dijeli $n+2$ i n^2-2n+4, pa dijeli i

$$n \cdot (n+2) - (n^2-2n+4) = 4n-4,$$

a onda i $4 \cdot (n+2) - (4n-4) = 12$. Dakle, $p^\alpha \mid 12$, pa je $p=2$ ili $p=3$.

Ako je $p=2$, onda je $n+2=p^\alpha$ najviše 4, a kako je $n>0$, slijedi da je $n+2=4$, što zaista daje rješenje $(2,4,2)$.

Ako je $p=3$, onda je $n+2=p^\alpha$ točno 3, pa je $n+2=3$, što daje drugo rješenje $(3,2,1)$.

Zadatak A-2.3.

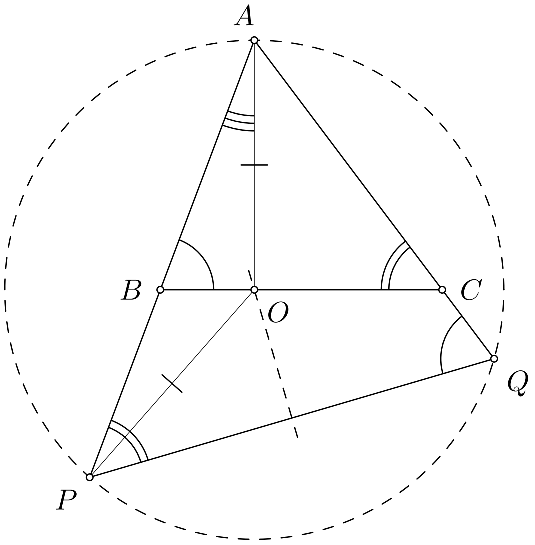
Neka je ABC šiljastokutni trokut u kojem je $|AC|>|AB|$. Neka je N nožište visine iz A na stranicu $\overline{BC}$. Neka je točka P na produžetku dužine $\overline{AB}$ preko vrha B, te neka je točka Q na produžetku dužine $\overline{AC}$ preko vrha C tako da je $BPQC$ tetivni četverokut.

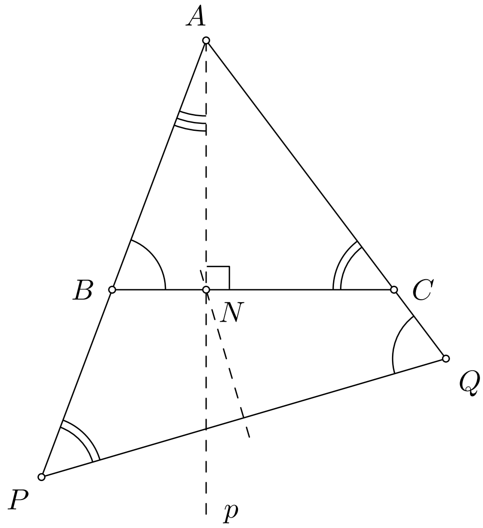
Ako vrijedi $|NP|=|NQ|$, dokaži da je N središte kružnice opisane trokutu APQ.

Prvo rješenje.

Zbroj nasuprotnih kutova u tetivnom četverokutu je $180°$, stoga je $\sphericalangle CQP = 180° - \sphericalangle PBC$ i $\sphericalangle QPB = 180° - \sphericalangle BCQ$, odakle je $\sphericalangle AQP = \sphericalangle CBA$ i $\sphericalangle QPA = \sphericalangle ACB$.

Neka je O središte kružnice opisane trokutu APQ. Tada je $\sphericalangle AOP = 2\sphericalangle AQP$. Budući da je trokut AOP jednakokračan, slijedi da je $\sphericalangle PAO = 90° - \sphericalangle AQP = 90° - \sphericalangle ABC$.





Neka je p pravac koji s pravcem AP zatvara kut $90° - \sphericalangle ABC$ i koji siječe dužinu $\overline{PQ}$. Budući da je $\sphericalangle ANB = 90°$, slijedi da je $\sphericalangle ANB = 90° - \sphericalangle ABC$, što povlači da točke A, N i O leže na pravcu p.

Budući je $|AB| \neq |AC|$, slijedi da $\sphericalangle AQP = \sphericalangle ABC \neq \sphericalangle ACB = \sphericalangle APQ$, tj. A ne leži na simetrali stranice $\overline{PQ}$. Zato je sjecište pravca p i simetrale dužine $\overline{PQ}$ jedinstveno i slijedi da je $N=O$.

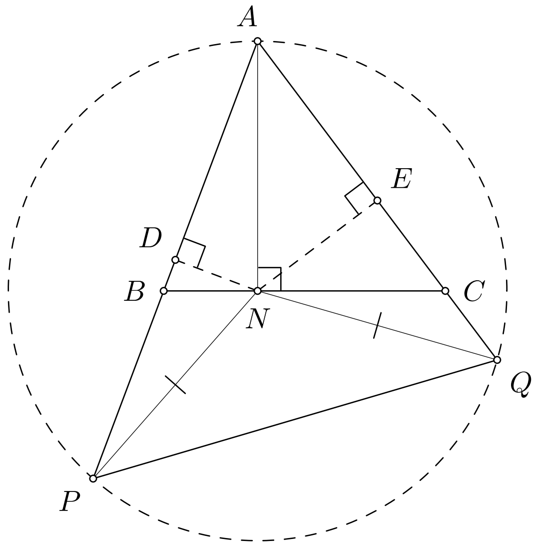
Drugo rješenje.

Neka je $b = |AC|$, $c = |AB|$, $v = |AN|$, $\beta = \sphericalangle ABC$ i $\gamma = \sphericalangle BCA$.

Zbroj nasuprotnih kutova u tetivnom četverokutu je $180°$, stoga je $\sphericalangle CQP = 180° - \sphericalangle PBC$ i $\sphericalangle QPB = 180° - \sphericalangle BCQ$, odakle je $\sphericalangle AQP = \beta$ i $\sphericalangle QPA = \gamma$.

Slijedi da su trokuti ABC i AQP slični. Neka je $|AP| = kb$ i $|AQ| = kc$ $(k > 1)$.

Neka su D i E nožišta visina iz N u trokutima NAP i NQA, redom.



Iz pravokutnog trokuta ABN je $\sin\beta = \dfrac{v}{c}$, a iz pravokutnog trokuta ADN je

$$|AD| = v\cos(90° - \beta) = v\sin\beta \quad \text{i} \quad |DN| = v\sin(90° - \beta) = v\cos\beta.$$

Primjenom Pitagorinog poučka u trokutu NDP dobivamo

$$\begin{aligned} |NP|^2 &= |ND|^2 + |DP|^2 = |ND|^2 + (|AP| - |AD|)^2 \\ &= (v\cos\beta)^2 + (kb - v\sin\beta)^2 \\ &= v^2\cos^2\beta + k^2b^2 - 2kbv\sin\beta + v^2\sin^2\beta \\ &= v^2 + k^2b^2 - 2kv^2\frac{b}{c}. \end{aligned}$$

Analogno dobivamo $|NQ|^2 = v^2 + k^2c^2 - 2kv^2\dfrac{c}{b}$.

Budući da je $|NP| = |NQ|$ slijedi

$$\begin{aligned} v^2 + k^2b^2 - 2kv^2\frac{b}{c} &= v^2 + k^2c^2 - 2kv^2\frac{c}{b} \\ kb^2 - kc^2 &= 2v^2\left(\frac{b}{c} - \frac{c}{b}\right) \\ kbc(b^2 - c^2) &= 2v^2(b^2 - c^2), \end{aligned}$$

odakle, zbog $b \neq c$, dobivamo $k = \dfrac{2v^2}{bc}$.

Konačno je

$$|NP|^2 = |NQ|^2 = v^2 + k^2c^2 - 2kv^2\frac{c}{b} = v^2 + \frac{4v^4c^2}{b^2c^2} - \frac{4v^4c}{b^2c} = v^2.$$

Dakle, $|NP| = |NQ| = |NA|$, pa je N središte kružnice opisane trokutu AQP.

Zadatak A-2.4.

Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c=1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Rješenje.

Korištenjem uvjeta $a+b+c=1$ i nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine slijedi

$$\frac{a}{a+b^2} = \frac{a}{a(a+b+c)+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2+ab+ac} \leqslant \frac{a}{2ab+ab+ac} = \frac{1}{3b+c}.$$

Primjenom nejednakosti između harmonijske i aritmetičke sredine slijedi

$$\frac{4}{\frac{3}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{4}{\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leqslant \frac{b+b+b+c}{4} = \frac{3b+c}{4},$$

odnosno

$$\frac{1}{3b+c} \leqslant \frac{1}{16}\left(\frac{3}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Zaključujemo da je

$$\frac{a}{a+b^2} \leqslant \frac{1}{16}\left(\frac{3}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Analogno je

$$\frac{b}{b+c^2} \leqslant \frac{1}{16}\left(\frac{3}{c}+\frac{1}{a}\right) \qquad \text{i} \qquad \frac{c}{c+a^2} \leqslant \frac{1}{16}\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Na kraju zbrajanjem gornjih nejednakosti slijedi

$$\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} \leqslant \frac{1}{16}\left(\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Zadatak A-2.5.

Skakavac se na početku nalazi u ishodištu brojevnog pravca, na broju 0, a zatim skače uvijek u istom smjeru. Za prirodni broj k, skakavac u prvom skoku dolazi na broj 1, a svaki sljedeći skok je točno k puta dulji od prethodnog. Na mjestu svakog višekratnika broja 2015 nalazi se rupa.

Odredi sve prirodne brojeve k takve da skakavac može skočiti 2015 puta, a da pritom ne uskoči u rupu.

Rješenje.

Neka je a_n mjesto na kojem se skakavac nalazi nakon n-tog skoka, odnosno

$$a_1 = 1, \quad a_n = 1 + k + \cdots + k^{n-1},\ n \geqslant 2.$$

Tražimo sve prirodne brojeve k takve da $2015 \nmid a_n$ za sve $n = 1, \ldots, 2015$.

Pretpostavimo da je $M(k, 2015) = d > 1$. Tada svaki a_n pri dijeljenju s d daje ostatak 1, a kako je 2015 djeljivo s d vrijedi $2015 \nmid a_n$ za sve n. Dakle, svi prirodni brojevi koji nisu relativno prosti s 2015 odgovaraju uvjetima zadatka.

Ako je $M(k, 2015) = 1$, promatramo ostatke pri dijeljenju brojeva $a_1, \ldots, a_{2015}$ s 2015. Ako je neki od njih djeljiv s 2015, takav k ne odgovara. U suprotnom, budući da imamo 2014 mogućih ostataka, dva broja daju isti ostatak. Neka su to a_l i a_m, $m > l$. Tada je njihova razlika djeljiva s 2015. S druge strane, vrijedi

$$a_m - a_l = k^l + \cdots + k^{m-1} = k^l(1 + \cdots + k^{m-l-1}) = k^l \cdot a_{m-l}.$$

Iz $2015 \mid k^l \cdot a_{m-l}$ i $M(k, 2015) = 1$, slijedi $2015 \mid a_{m-l}$, što je suprotno pretpostavci da nijedan od brojeva $a_1, \ldots, a_{2015}$ nije djeljiv s 2015. Dakle, ako je $M(k, 2015) = 1$, skakavac će uskočiti u rupu.

Prema tome, jedini prirodni brojevi koji odgovaraju uvjetima zadatka su oni koji nisu relativno prosti s 2015.

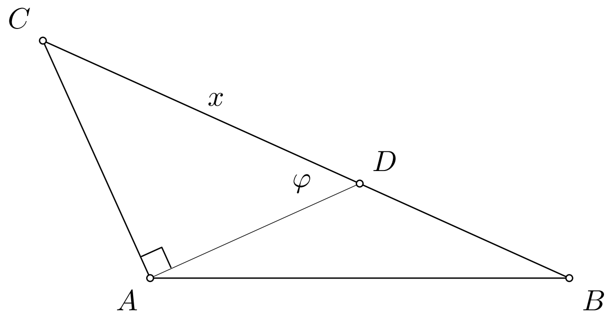
Zadatak A-3.1.

U trokutu ABC vrijedi $|BC| + |AC| = 2|AB|$ i $\sphericalangle BAC - \sphericalangle CBA = 90^\circ$.

Odredi kosinus kuta $\sphericalangle ACB$.

Prvo rješenje.

Neka je točka D na stranici $\overline{BC}$ takva da je $\sphericalangle CAD = 90^\circ$. Označimo $\varphi = \sphericalangle CDA$ i $x = |CD|$. Tada je $\cos\sphericalangle ACB = \sin\varphi$.



Tada je $|AC| = x\sin\varphi$ i $|AD| = |DB| = x\cos\varphi$. Također je $\sphericalangle DAB = \frac{1}{2}\varphi$ i $|AB| = 2x\cos\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi$.

Zbog uvjeta $|BC| + |CA| = 2|AB|$ slijedi

$$1 + \cos\varphi + \sin\varphi = 4\cos\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi.$$

Kvadriranjem obje strane jednakosti dobivamo

$$1 + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 2\cos\varphi + 2\sin\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi = 16\cos^2\varphi\cos^2\frac{1}{2}\varphi,$$

a daljnjim sređivanjem redom

$$\begin{aligned}
2(1+\cos\varphi)(1+\sin\varphi) &= 8\cos^2\varphi(1+\cos\varphi),\\
1+\sin\varphi &= 4(1-\sin^2\varphi),\\
(4\sin\varphi - 3)(\sin\varphi + 1) &= 0,\\
\sin\varphi &= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

pri čemu smo koristili $\cos\varphi \neq -1$ i $\sin\varphi \neq -1$ što vrijedi jer je φ šiljasti kut.

Dakle, $\cos\sphericalangle ACB = \frac{3}{4}$.

Drugo rješenje.

Označimo $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$, $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$. Uz uvedene oznake vrijedi $a + b = 2c$ i $\alpha - \beta = 90°$.

Iz $a + b = 2c$ i poučka o sinusima redom slijedi

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} + \frac{b}{c} &= 2 \\ \sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\gamma \\ \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta &= 4\sin^2\gamma \end{aligned}$$

Kako je $\beta = \alpha - 90°$, vrijedi $\sin\beta = -\cos\alpha$, odakle slijedi $\sin^2\beta = \cos^2\alpha$ pa dobivamo $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Odavde dobivamo

$$\begin{aligned} 1 + 2\sin\alpha\sin\beta &= 4 - 4\cos^2\gamma, \\ 2\sin\alpha\sin\beta &= 3 - 4\cos^2\gamma. \end{aligned}$$

Po poučku o kosinusu vrijedi $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Odatle korištenjem poučka o sinusima i dobivenih izraza redom slijedi

$$\begin{aligned} \frac{2ab\cos\gamma}{c^2} + 1 &= \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} \\ \frac{2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma}{\sin^2\gamma} + 1 &= \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\gamma} + \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma} \\ 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin^2\gamma &= \sin^2\alpha + \sin^2\beta \\ 8\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + 4\sin^2\gamma &= 4\sin^2\alpha + 4\sin^2\beta \\ 8\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta &= 4\sin^2\alpha + 4\sin^2\beta \\ 2\sin\alpha\sin\beta(4\cos\gamma + 1) &= 3\sin^2\alpha + 3\sin^2\beta \\ (3 - 4\cos^2\gamma)(4\cos\gamma + 1) &= 3. \end{aligned}$$

Sređivanjem dobivamo jednadžbu

$$16\cos^3\gamma + 4\cos^2\gamma - 12\cos\gamma = 0$$

koja se faktorizira u

$$4\cos\gamma(\cos\gamma + 1)(4\cos\gamma - 3) = 0.$$

Rješenje $\cos\gamma = 0$ se odbacuje, jer $\gamma \neq 90°$. Naime, zbog uvjeta $\alpha - \beta = 90°$ kut α mora biti tup pa kut γ ne može biti pravi. Rješenje $\cos\gamma = -1$ se također odbacuje, jer $\gamma \neq 180°$.

Zaključujemo da mora biti $\cos\gamma = \frac{3}{4}$.

Zadatak A-3.2.

Odredi sve trojke prirodnih brojeva (p, m, n) takve da je p prost broj i da vrijedi

$$2^m p^2 + 1 = n^5.$$

Rješenje.

Zapišemo li jednadžbu u obliku $2^m p^2 = n^5 - 1$ i faktoriziramo desnu stranu prema formuli za razliku petih potencija, dobivamo

$$2^m p^2 = (n-1)(n^4 + n^3 + n^2 + n + 1).$$

Faktor $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ je neparan broj, pa je $n - 1$ djeljivo s 2^m.

Također slijedi da je p neparan broj.

S druge strane, kako je n prirodan, očito je $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 > n - 1$. Stoga p ne može dijeliti $n - 1$, jer bi onda $n - 1$ bilo barem $2^m p$, a $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ bi bio najviše p, što je manje od $2^m p$. Dakle, vrijedi

$$2^m + 1 = n, \qquad p^2 = n^4 + n^3 + n^2 + n + 1.$$

Uočimo da je druga jednadžba ekvivalentna sljedećima:

$$\begin{aligned} &n^4 + n^3 + n^2 + n = p^2 - 1, \\ &n(n+1)(n^2+1) = (p-1)(p+1). \end{aligned}$$

Uvrštavanjem $n = 2^m + 1$ u zadnju jednadžbu dobivamo

$$(2^m + 1)(2^{2m} + 2^{m+1} + 2)(2^m + 2) = (p-1)(p+1),$$

odnosno

$$4(2^m + 1)(2^{2m-1} + 2^m + 1)(2^{m-1} + 1) = (p-1)(p+1).$$

Budući da je p neparan, desna strana je umnožak dva uzastopna parna broja pa je djeljiva s 8. Lijeva nije djeljiva s 8, osim ako je $m = 1$. Jedino rješenje je stoga $m = 1, n = 3, p = 11$.

Zadatak A-3.3.

U nekoj državi između svaka dva grada postoji ili izravna autobusna ili izravna željeznička veza (sve veze su dvosmjerne i ne prolaze ni kroz jedan drugi grad).

Dokaži da je gradove u toj državi moguće rasporediti u dva disjunktna skupa tako da je sve gradove u jednom skupu moguće obići putujući samo željeznicom tako da se nijedan grad ne posjeti dvaput, a sve gradove u drugom skupu putujući samo autobusom tako da se nijedan grad ne posjeti dvaput.

Rješenje.

Neka je G skup svih gradova u državi iz zadatka. Za par (A, Z) pri čemu su A i Z disjunktni podskupovi od G kažemo da je *dobar* ako sve gradove u skupu A (odnosno Z) moguće obići putujući samo autobusom (odnosno željeznicom) tako da se nijedan grad ne posjeti dvaput.

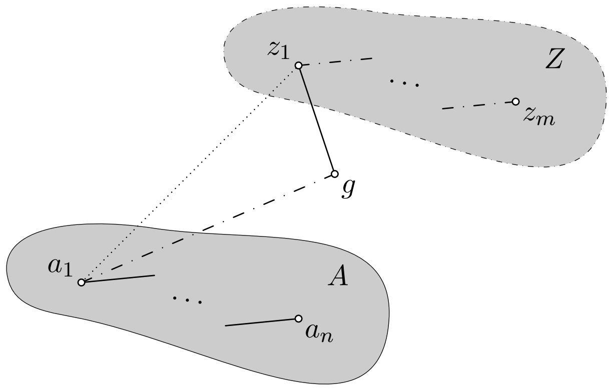
Neka je (A, Z) dobar par za koji $A \cup Z$ ima najveći mogući broj elemenata. Ako dokažemo $A \cup Z = G$, onda je tvrdnja zadatka dokazana.

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji grad g koji se ne nalazi ni u A ni u Z. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su A i Z neprazni skupovi jer u suprotnom možemo bilo koji grad iz nepraznog skupa prebaciti u prazni.

Neka je n broj gradova u skupu A, a m broj gradova u skupu Z. Poredajmo gradove iz A u niz $a_1, \ldots, a_n$ tako da su svaka dva uzastopna grada u tom niza izravno povezana autobusom. Također, poredajmo gradove iz Z u niz $z_1, \ldots, z_m$ tako da su uzastopni gradovi u tom nizu povezani izravno željeznicom.

Budući da smo pretpostavili da je skup (A, Z) maksimalan, gradovi g i a_1 moraju biti povezani željeznicom (inače bi par $(A \cup \{g\}, Z)$ bio dobar par za koji unija ima više elemenata od $A \cup Z$) te g i z_1 moraju biti povezani autobusom (inače bi par $(A, Z \cup \{g\})$ bio dobar i unija bi imala više elemenata od $A \cup Z$).

Gradovi a_1 i z_1 moraju biti povezani autobusom ili željeznicom.



Ako su a_1 i z_1 povezani autobusom, neka je $A' = \{z_1, g, a_1, \ldots, a_n\}$ i $Z' = \{z_2, \ldots, z_m\}$. Tada je (A', Z') dobar par i broj elemenata u $A' \cup Z'$ je veći od broja elemenata iz $A \cup Z$, što je suprotno pretpostavci.

Ako su a_1 i z_1 povezani željeznicom, neka je $A'' = \{a_2, \ldots, a_n\}$ i $Z'' = \{a_1, g, z_1, z_2, \ldots, z_m\}$. Tada je (A'', Z'') dobar par i broj elemenata u $A'' \cup Z''$ je veći od broja elemenata iz $A \cup Z$, što je suprotno pretpostavci.

Budući da svi slučajevi vode na kontradikciju, zaključujemo da je pretpostavka bila suprotna i vrijedi da je svaki grad ili u skupu A ili u skupu Z.

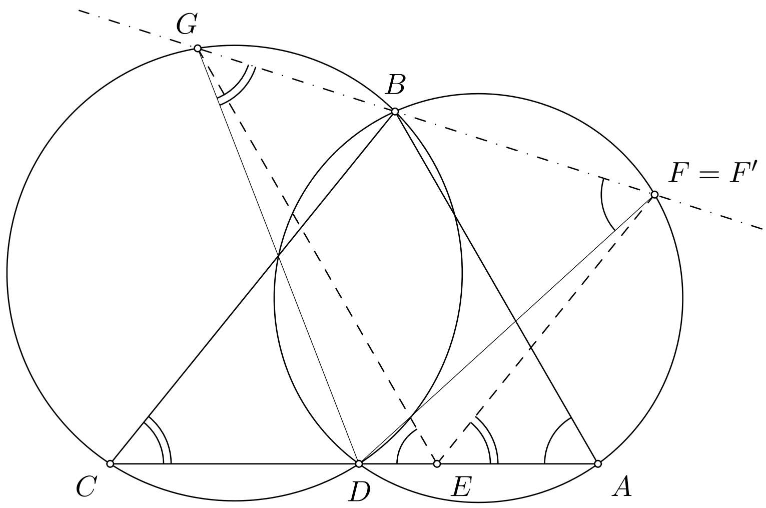
Zadatak A-3.4.

Na stranici $\overline{AC}$ trokuta ABC nalaze se točke D i E tako da je točka D između C i E. Neka je F sjecište kružnice opisane trokutu ABD s pravcem koji prolazi kroz točku E i paralelan je s BC tako da se točke E i F nalaze s različitih strana pravca AB. Neka je G sjecište kružnice opisane trokutu BCD s pravcem koji prolazi kroz točku E i paralelan je s AB tako da se točke E i G nalaze s različitih strana pravca BC.

Dokaži da točke D, E, F i G leže na istoj kružnici.

Rješenje.

Neka je F' presjek pravca BG i kružnice opisane trokutu ABD različit od točke B.



Četverokut $DAF'B$ je tetivan, pa vrijedi $\sphericalangle BF'D = \sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC$. Budući da je $GE \parallel AB$, vrijedi $\sphericalangle BAC = \sphericalangle GEC$. Stoga je $\sphericalangle GF'D = \sphericalangle GEC$, odnosno $DEF'G$ je tetivni četverokut.

Odatle slijedi $\sphericalangle AEF' = \sphericalangle DGF' = \sphericalangle DGB$. Kako je četverokut $CDBG$ tetivan, vrijedi $\sphericalangle DGB = \sphericalangle DCB$, pa zaključujemo da je $F'E \parallel BC$.

Dakle, točka F' je presjek paralele s BC kroz točku E i kružnice opisane trokutu ADB, što znači da je $F' = F$. Zato je $DEFG$ tetivni četverokut, odnosno točke D, E, F i G leže na istoj kružnici.

Zadatak A-3.5.

Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c \geqslant 1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Rješenje.

Uočimo prvo da je

$$\frac{a-bc}{a+bc}=\frac{a+bc-2bc}{a+bc}=1-2\cdot\frac{bc}{a+bc}, \quad \frac{b-ca}{b+ca}=1-2\cdot\frac{ca}{b+ca}, \quad \frac{c-ab}{c+ab}=1-2\cdot\frac{ab}{c+ab}.$$

Sada iz $a+b+c \geqslant 1$ slijedi da je

$$\frac{bc}{a+bc} \geqslant \frac{bc}{a(a+b+c)+bc}=\frac{bc}{(a+b)(a+c)},$$

i analogno

$$\frac{ca}{b+ca} \geqslant \frac{ca}{(b+a)(b+c)}, \quad \frac{ab}{c+ab} \geqslant \frac{ab}{(c+a)(c+b)},$$

pa je

$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab} \leqslant 3-\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}-\frac{2ca}{(b+a)(b+c)}-\frac{2ab}{(c+a)(c+b)}.$$

Dakle, da bi dokazali traženu nejednakost dovoljno je dokazati da vrijedi

$$\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{2ca}{(b+a)(b+c)}+\frac{2ab}{(c+a)(c+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Množenjem s $(a+b)(b+c)(c+a)$ vidimo da je gornja nejednakost ekvivalentna s

$$4bc(b+c)+4ca(c+a)+4ab(a+b) \geqslant 3(a+b)(b+c)(c+a),$$

tj.

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2 \geqslant 6abc.$$

Posljednja nejednakost vrijedi jer prema nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine vrijedi

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2 \geqslant 6\sqrt[6]{a^6b^6c^6}=6abc.$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

Trogir, 9. travnja 2015.

Zadatak A-4.1.

Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(xy)(x+f(y)) = x^2 f(y) + y^2 f(x).$$

Rješenje.

Uvrštavanjem $x = y = 0$ u danu jednadžbu dobivamo

$$f(0)^2 = 0, \quad \text{odnosno} \quad f(0) = 0.$$

Uvrštavanjem $x = y = 1$ u danu jednadžbu dobivamo

$$f(1)(1+f(1)) = 2f(1), \quad \text{odnosno} \quad f(1)^2 = f(1).$$

Razlikujemo dva slučaja: $f(1) = 0$ ili $f(1) = 1$.

Ako je $f(1) = 0$, uvrštavanjem $x = 1$ u početnu jednadžbu dobivamo da za svaki $y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(y)(1+f(y)) = f(y), \quad \text{tj.} \quad f(y) = 0.$$

Ako je $f(1) = 1$, uvrštavanjem $y = 1$ u početnu jednadžbu dobivamo da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x)(x+1) = x^2 + f(x), \quad \text{odnosno} \quad xf(x) = x^2.$$

Za $x \neq 0$ dijeljenjem s x dobivamo da je $f(x) = x$.

Budući da je i $f(0) = 0$, slijedi da je $f(x) = x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Uvrštavanjem vidimo da funkcije $f(x) = 0$ i $f(x) = x$ zaista zadovoljavaju početnu jednadžbu te su to tražena rješenja.

Zadatak A-4.2.

Neka je ABC pravokutni trokut s pravim kutom u vrhu C. Neka su A', B', C' redom nožišta okomica povučenih iz težišta trokuta ABC na pravce BC, CA, AB.

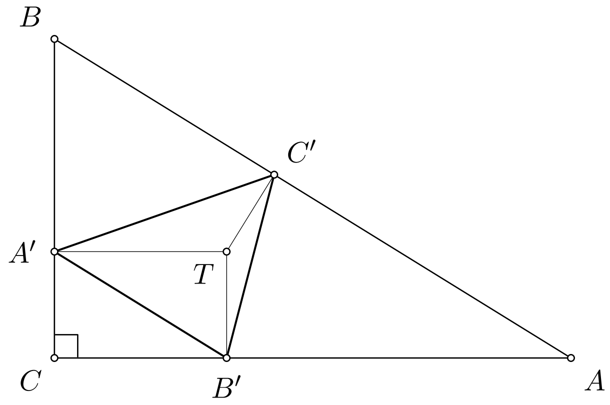
Odredi omjer površina trokuta $A'B'C'$ i ABC.

Prvo rješenje.

Označimo sa T težište trokuta ABC te sa a, b, c i v redom duljine stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ i visine na stranicu $\overline{AB}$. Označimo i $\alpha = \sphericalangle CAB$ i $\beta = \sphericalangle ABC$.

Budući da je T težište trokuta ABC, vrijedi

$$|TA'| = |B'C| = \frac{1}{3}|AC| = \frac{1}{3}b, \quad |TB'| = |A'C| = \frac{1}{3}|BC| = \frac{1}{3}a, \quad |TC'| = \frac{1}{3}v.$$



Vrijedi

$$\begin{aligned}
P(A'B'C') &= P(A'B'T) + P(B'C'T) + P(C'A'T) \\
&= \frac{1}{2}(|TA'| \cdot |TB'| + |TB'| \cdot |TC'| \cdot \sin(180^\circ - \alpha) + |TC'| \cdot |TA'| \cdot \sin(180^\circ - \beta)) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}(ab + av \sin\alpha + bv \sin\beta)
\end{aligned}$$

Budući da vrijedi $v = a\sin\beta$, $v = b\sin\alpha$, $a = c\sin\alpha$, $b = c\sin\beta$ i $c^2 = a^2 + b^2$, imamo:

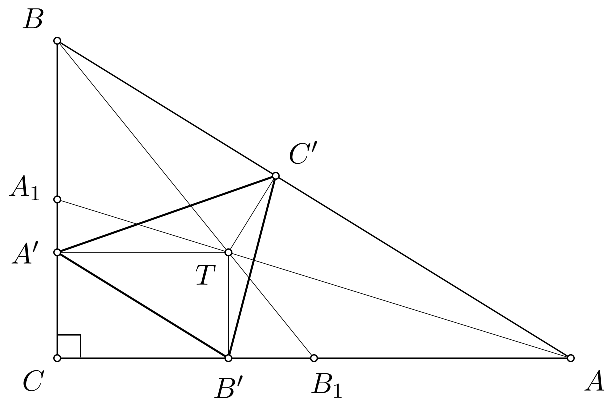
$$\begin{aligned}
P(A'B'C') &= \frac{1}{18}(ab + a^2 \sin\alpha\sin\beta + b^2 \sin\alpha\sin\beta) \\
&= \frac{1}{18}(ab + c^2 \sin\alpha\sin\beta) = \frac{1}{18}(ab + ab) \\
&= \frac{1}{18} \cdot 2ab = \frac{2}{9}P(ABC).
\end{aligned}$$

Dakle, dobivamo $P(A'B'C') : P(ABC) = 2 : 9$.

Drugo rješenje.

Neka je B_1 polovište katete $\overline{AC}$, a A_1 polovište katete $\overline{BC}$. Trokuti $AB'T$ i ACA_1 su slični. Budući da težište dijeli težišnicu u omjeru $2:1$ slijedi $|CB'|:|CA| = 1:3$. Analogno dokazujemo $|CA'|:|CB| = 1:3$. Slijedi da su pravokutni trokuti $A'CB'$ i BCA slični s koeficijentom sličnosti $\frac{1}{3}$. Dakle, $|A'B'| = \frac{1}{3}|AB|$.

Također, $\sphericalangle CA'B' = \sphericalangle CBA$, tj. pravci $A'B'$ i BA su paralelni.



Neka je v duljina visine na stranicu $\overline{AB}$ trokuta ABC. Duljina visine na stranicu $\overline{B'A'}$ trokuta $B'A'C$ je tri puta manja od v. To povlači da udaljenost pravaca AB i $B'A'$ iznosi $\frac{2}{3}v$, tj. duljina visine na stranicu $\overline{B'A'}$ trokuta $A'B'C'$ iznosi $\frac{2}{3}v$.

Sada slijedi da je

$$P(A'B'C') = \frac{1}{2}|B'A'| \cdot \frac{2}{3}v = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}|AB| \cdot \frac{2}{3}v = \frac{2}{9}P(ABC).$$

Traženi omjer je $P(A'B'C') : P(ABC) = 2 : 9$.

Treće rješenje.

Označimo sa T težište trokuta ABC te sa a i b redom duljine stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$. Postavimo trokut u koordinatni sustav tako da je $C(0,0)$, $A(b,0)$, $B(0,a)$. Tada je $T(\frac{b}{3}, \frac{a}{3})$, $A'(0, \frac{a}{3})$, $B'(\frac{b}{3}, 0)$. Jednadžba pravca AB je tada

$$\begin{aligned} AB \ldots y - 0 &= \frac{a-0}{0-b}(x-b), \\ y &= -\frac{a}{b}x + a. \end{aligned}$$

Pravac TC' je okomit na AB pa je stoga njegova jednadžba

$$\begin{aligned} TC' \ldots y - \frac{a}{3} &= \frac{b}{a}\left(x - \frac{b}{3}\right), \\ y &= \frac{b}{a}x + \frac{a^2-b^2}{3a}. \end{aligned}$$

Izjednačavanjem dobivamo

$$\begin{aligned}
-\frac{a}{b}x + a &= \frac{b}{a} + \frac{a^2 - b^2}{3a}, \\
a + \frac{b^2 - a^2}{3a} &= \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)x, \\
x &= \frac{b(2a^2 + b^2)}{3(a^2 + b^2)}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u jednadžbu pravca AB dobivamo

$$y = -\frac{a}{b} \cdot \frac{b(2a^2 + b^2)}{3(a^2 + b^2)} + a = \frac{-2a^3 - ab^2 + 3a^3 + 3ab^2}{3(a^2 + b^2)} = \frac{a(2b^2 + a^2)}{3(a^2 + b^2)}.$$

Tako dobivamo točku

$$C' = \left(\frac{b(2a^2 + b^2)}{3(a^2 + b^2)}, \frac{a(2b^2 + a^2)}{3(a^2 + b^2)}\right).$$

Koristeći formulu $P(A'B'C') = \frac{1}{2}|x_{A'}(y_{B'} - y_{C'}) + x_{B'}(y_{C'} - y_{A'}) + x_{C'}(y_{A'} - y_{B'})|$ dobivamo

$$\begin{aligned}
P(A'B'C') &= \frac{1}{2}\left|0\left(0 - \frac{a(2b^2 + a^2)}{3(a^2 + b^2)}\right) + \frac{b}{3}\left(\frac{a(2b^2 + a^2)}{3(a^2 + b^2)} - \frac{a}{3}\right) + \frac{b(2a^2 + b^2)}{3(a^2 + b^2)}\left(\frac{a}{3} - 0\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\frac{b}{3} \cdot \frac{2ab^2 + a^3 - a^3 - ab^2}{3(a^2 + b^2)} + \frac{a}{3} \cdot \frac{2a^2b + b^3}{3(a^2 + b^2)}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\frac{ab^3 + 2a^3b + ab^3}{9(a^2 + b^2)}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{2ab(a^2 + b^2)}{9(a^2 + b^2)}\right| \\
&= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2}ab = \frac{2}{9}P(ABC).
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je $P(A'B'C') : P(ABC) = 2 : 9$.

Zadatak A-4.3.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoji djelitelj d broja n takav da

$$dn + 1 \mid d^2 + n^2.$$

Rješenje.

Neka je $n = ad$. Uvjet $dn + 1 \mid d^2 + n^2$ možemo zapisati kao $ad^2 + 1 \mid d^2 + a^2d^2$.

Tada $ad^2 + 1$ dijeli i $d^2 + a^2d^2 - a \cdot (ad^2 + 1) = d^2 - a$.

Promotrimo mogućnosti za predznak broja $d^2 - a$.

Ako je $d^2 - a > 0$, onda mora vrijediti i $d^2 - a \geqslant ad^2 + 1$ (višekratnik mora biti velik barem kao djelitelj). Budući da je a prirodan broj, slijedi da je $d^2 \geqslant ad^2 + a + 1 > d^2$, što je nemoguće.

Ako je $d^2 - a < 0$, onda je $a - d^2 > 0$. Tada mora biti $a - d^2 \geqslant ad^2 + 1$. Budući da je d prirodan, slijedi da je $a \geqslant ad^2 + 1 + d^2 > a$, što je također nemoguće.

Dakle, moguće je jedino da je $d^2 - a = 0$, odnosno $a = d^2$ i $n = d^3$. Tada zaista $d^4 + 1$ dijeli $d^2 + d^6 = d^2(d^4 + 1)$, pa su svi traženi brojevi n kubovi prirodnih brojeva.

Zadatak A-4.4.

Neka je n prirodni broj. Odredi sve pozitivne realne brojeve x za koje vrijedi

$$\frac{2^2}{x+1}+\frac{3^2}{x+2}+\cdots+\frac{(n+1)^2}{x+n}+nx^2=nx+\frac{n(n+3)}{2}.$$

Prvo rješenje.

Kako je $nx = x + x + \cdots + x$, a $\frac{n(n+3)}{2} = (1+2+3+\cdots+n)+n$, polazna jednakost je ekvivalentna sa

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^2}{x+k}+nx^2-\sum_{k=1}^{n}x-\sum_{k=1}^{n}k-n=0,$$

odnosno

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{(k+1)^2}{x+k}-(x+k)\Big)+nx^2-n=0.$$

Sređivanjem dobivamo da je

$$\frac{(k+1)^2}{x+k}-(x+k)=\frac{(k+1)^2-(x+k)^2}{x+k}=\frac{(x+2k+1)(1-x)}{x+k}=(1-x)\left(1+\frac{k+1}{x+k}\right),$$

pa je gornja jednakost ekvivalentna sa

$$(1-x)\Big(n+\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{x+k}\Big)+n(x^2-1)=0,$$

odnosno

$$(1-x)\Big(n+\left(\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+2}+\cdots+\frac{n+1}{x+n}\right)-n(1+x)\Big)=0.$$

Za $x=1$ jednakost očito vrijedi. Za $x\neq 1$ mora vrijediti

$$n+\left(\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+2}+\cdots+\frac{n+1}{x+n}\right)=n(1+x),$$

odnosno

$$\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+2}+\cdots+\frac{n+1}{x+n}=nx.$$

Ako je $0<x<1$, onda je svaki od n razlomaka na lijevoj strani strogo veći od 1, pa je lijeva strana strogo veća od n, a desna strana je strogo manja od n.

Ako je $x>1$ vrijedi točno obratno: lijeva strana je strogo manja od n, a desna strana je strogo veća od n. Dakle, jedino rješenje je $x=1$.

Drugo rješenje.

Uočimo da nx^2 možemo rastaviti na n pribrojnika

$$nx^2 = x^2 + x^2 + \cdots + x^2.$$

Primjenom Cauchy-Schwarzove nejednakosti u Engelovoj formi na $2n$ članova slijedi

$$\begin{aligned}\frac{2^2}{x+1} + \frac{3^2}{x+2} + \cdots + \frac{(n+1)^2}{x+n} + x^2 + \cdots + x^2 &\geqslant \frac{(2+3+\cdots+n+1+x+\cdots+x)^2}{x+1+x+2\cdots+x+n+1+\cdots+1} \\ &= \frac{(nx+\frac{n(n+3)}{2})^2}{nx+n+\frac{n(n+1)}{2}} = nx + \frac{n(n+3)}{2}.\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako $\dfrac{2}{x+1} = \dfrac{3}{x+2}$, tj. ako i samo ako je $x = 1$.

Treće rješenje.

Matematičkom indukcijom dokazat ćemo da je za svaki prirodni broj n lijeva strana dane jednadžbe veća ili jednaka desnoj za sve pozitivne realne brojeve x te da se jednakost postiže ako i samo ako je $x = 1$.

Za $n = 1$ jednadžba se redom može napisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\frac{2^2}{x+1} + x^2 &= x + 2 \\ 4 + x^2(x+1) &= (x+2)(x+1) \\ x^3 - 3x + 2 &= 0 \\ (x-1)^2(x+2) &= 0\end{aligned}$$

Uočavamo da je jedino pozitivno rješenje ove jednadžbe $x = 1$ te da je lijeva strana dane jednakosti veća od desne za sve pozitivne brojeve $x \neq 1$.

Pretpostavimo da za neki prirodni broj $n = k$ tvrdnja vrijedi, odnosno da je

$$\frac{2^2}{x+1} + \frac{3^2}{x+2} + \cdots + \frac{(k+1)^2}{x+k} + kx^2 \geqslant kx + \frac{k(k+3)}{2}.$$

Prema pretpostavci vrijedi

$$\begin{aligned}&\frac{2^2}{x+1} + \frac{3^2}{x+2} + \cdots + \frac{(k+1)^2}{x+k} + \frac{(k+2)^2}{x+k+1} + (k+1)x^2 \\ &= \left(\frac{2^2}{x+1} + \frac{3^2}{x+2} + \cdots + \frac{(k+1)^2}{x+k} + kx^2\right) + \frac{(k+2)^2}{x+k+1} + x^2 \\ &\geqslant kx + \frac{k(k+3)}{2} + \frac{(k+2)^2}{x+k+1} + x^2\end{aligned}$$

Kako bismo pokazali tvrdnju za $n = k+1$ promotrimo nejednakost

$$kx + \frac{k(k+3)}{2} + \frac{(k+2)^2}{x+k+1} + x^2 \geqslant (k+1)x + \frac{(k+1)(k+4)}{2},$$

koja je redom ekvivalentna sljedećim nejednakostima

$$\begin{aligned}
\frac{(k+2)^2}{x+k+1} + x^2 &\geqslant x+k+2 \\
(k+2)^2 + x^2(x+k+1) &\geqslant (x+k+2)(x+k+1) \\
(x+k+2)(x-1)^2 &\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Budući da je posljednja nejednakost istinita, te jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = 1$, proveli smo korak indukcije.

Prema principu matematičke indukcije zaključujemo da je lijeva strana jednakosti veća ili jednaka desnoj i da se jednakost postiže ako i samo ako je $x = 1$ za svaki prirodni broj n. Dakle, jedino rješenje jednadžbe je $x = 1$.

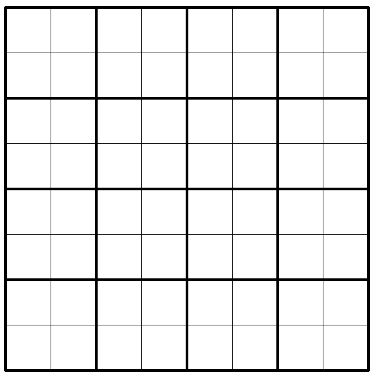
Zadatak A-4.5.

Na ploču dimenzija 8×8 postavljaju se tromino-pločice oblika  tako da svaka tromino-pločica prekriva točno tri polja ploče, a međusobno se ne prekrivaju.

Koliko je najmanje tromino-pločica potrebno postaviti na ploču ako želimo da se nakon toga više ne može postaviti nijedna dodatna tromino-pločica?

Rješenje.

Podijelimo ploču na 16 kvadrata dimenzija 2×2 kvadrata kao na slici.



U svakom od tih kvadrata trebaju biti barem dva polja prekrivena, inače se na neprekrivena polja može postaviti tromino-pločica. Dakle, barem 32 polja trebaju biti prekrivena, a za to nam treba barem 11 tromino-pločica.

Da je 11 tromino-pločica dovoljno pokazujemo konstrukcijom, kao primjerice na slici.