Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

Dubrovnik, 3. travnja 2013.

1. (10) Riješite nejednadžbu

$$\left|\frac{2013}{x+2013}+\frac{2013}{(x+1)(x+2)}+\frac{2013}{(x+2)(x+3)}+\cdots+\frac{2013}{(x+2012)(x+2013)}\right| \leq 1.$$

2. (10) Zbroj znamenaka prirodnog broja x je y, a zbroj znamenaka broja y je z. Odredite sve brojeve x za koje je

$$x+y+z=60.$$

3. (10) Dva vlaka kreću istovremeno s početnih stanica jedan prema drugome. Vlakovi voze konstantnim brzinama i mimoilaze se kod točke M. Jedan vlak vozi dvostruko brže od drugog. Ako sporiji vlak krene 5 minuta kasnije, mimoići će se u točki koja je 4 km dalje od točke M. Koliko iznosi brzina sporijeg vlaka?

4. (10) Točke M i N pripadaju redom stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC. Točka O je sjecište dužina $\overline{AN}$ i $\overline{BM}$. Odredite površinu trokuta CMN ako su površine trokuta OMA, OAB i OBN jednake redom 2, 3, 4.

5. (10) Na otoku živi petero ljudi i majmun. Jednog su dana svi zajedno sakupljali kokosove orahe i stavljali ih na zajedničku hrpu. Dogovorili su se da će sutradan međusobno razdijeliti orahe. Tijekom noći jedna je osoba od petero otočana uzela svoj dio. Podijelila je orahe na 5 jednakih hrpica i pri tome joj je ostao jedan kokosov orah. Njega je dala majmunu, sakrila svoju hrpu, a ostale četiri ponovno spojila u jednu veliku hrpu. Ostala četiri otočana napravila su to isto, jedan za drugim i svatko je jedan kokosov orah dao majmunu da se hrpe mogu jednako raspodijeliti. Koji je najmanji mogući broj oraha u početnoj hrpi?

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

Dubrovnik, 3. travnja 2013.

1. (10) U skupu $\mathbb{R}$ riješite nejednadžbu $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 \geq 6$.

2. (10) Za koju vrijednost varijabli x i y izraz $\frac{4x^2+2y^2-4y+4}{2x^2+y^2-2y+5}$ ima najmanju vrijednost i koliko iznosi ta najmanja vrijednost?

3. (10) Količina kofeina u krvotoku opada svakih 5 sati za 50%. Produžena kava sadrži 330 mg kofeina. Pretpostavimo da se cijela produžena kava popije odjednom. Ako osoba u jednom danu popije produženu kavu u 8 h, 10 h i 12 h, odredite koliko će mg kofeina ta osoba imati u krvotoku u 20 sati?

4. (10) Dundo i Maro su se nadmetali zadavajući jedan drugom neobične matematičke zadatke. Tako je Maro dobio zadatak da izračuna točnu vrijednost kosinusa kuta od 36°. Nije smio koristiti nikakav pribor osim papira i olovke za pisanje i računanje. To je nemoguće, mislio je Maro dok mu Dundo nije nacrtao nekoliko jednakokračnih trokuta kojima je mjera barem jednog kuta iznosila 36°. Maro je promotrio jedan trokut i ubrzo izračunao $\cos 36^\circ$. Koju je vrijednost dobio Maro i na koji način?

5. (10) Na šahovskom turniru sudjelovala su tri učenika prvog razreda i nekoliko učenika drugog razreda. Tri učenika prvog razreda osvojila su ukupno 7 bodova, a svaki učenik drugog razreda osvojio je isti broj bodova. Koliko je na turniru bilo učenika drugog razreda ako svaka pobjeda donosi jedan bod, poraz 0 bodova, a neriješeni rezultat pola boda? Turnir se igra tako da svaki igrač sa svakim od preostalih odigra jednu partiju.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

Dubrovnik, 3. travnja 2013.

1. (10) Riješite nejednadžbu

$$\log_{5+x}(5-x) \cdot \log_{10-x}(10+x) \leq 0.$$

2. (10) Duljina stranice romba $ABCD$ iznosi a. Romb prvo rotira oko pravca na kojem leži stranica $\overline{AB}$, a zatim oko pravca na kojem leži dulja dijagonala $\overline{AC}$. Tim rotacijama dobivamo dva rotacijska tijela. Omjer njihovih obujama je $V_1 : V_2 = 9 : \sqrt{3}$. Odredite šiljasti kut romba i omjer oplošja nastalih rotacijskih tijela.

3. (10) Ako su a, b, c duljine stranice trokuta i α, β, γ redom nasuprotni kutovi, onda je $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{b}{a}$ ako i samo ako je $\beta = 2\alpha$. Dokažite!

4. (10) Odredite nenegativne cijele brojeve p i n takve da su svi brojevi p, $p+3^n$, $p+3^{n+1}$, $p+3^{n+2}$, $p+3^{n+3}$ prosti.

5. (10) Točke A, B i C središta su triju kružnica koje se međusobno dodiruju izvana. Udaljenosti između središta iznose $|AB| = 13$ cm, $|BC| = 8$ cm, $|AC| = 9$ cm. U točkama u kojima se kružnice dodiruju povučene su zajedničke tangente. Pokažite da je središte upisane kružnice trokuta ABC sjecište tih triju tangenti. Odredite udaljenost sjecišta tangenata od središta najveće kružnice.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

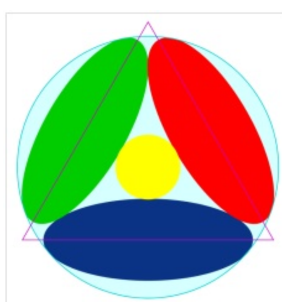
Dubrovnik, 3. travnja 2013.

1\. (10) Duljine stranica 5 jednakostraničnih trokuta čine aritmetički niz. Zbroj opsega tih trokuta je 120 cm. Zbroj površina najmanjeg i najvećeg trokuta je za $10\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ manji od zbroja površina preostala tri trokuta. Odredite duljine stranica tih trokuta. Koliki je zbroj površina svih trokuta?

2\. (10) Neka je n broj koji dobijemo tako da između svake dvije znamenke broja 14 641 napišemo 2013 nula. Odredite sva rješenja jednadžbe $x^4 = n$ u skupu $\mathbb{C}$.

3\. (10) Neka je $f_n(x) = x^{n+1} + x^n$, za $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Za koje će realne brojeve x, beskonačan zbroj $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots$ imati vrijednost u intervalu $\left\langle 0, \frac{2}{3} \right]$?

4\. (10) Tri sukladne elipse s poluosima a i b $(a > b)$ smještene su tako da se svake dvije dodiruju, a glavne osi im leže na stranicama jednog jednakostraničnog trokuta (slika). Dvije koncentrične kružnice, veća polumjera R i manja polumjera r $(R \neq r)$, dodiruju sve tri elipse. Prikažite R i r pomoću a i b.



5\. (10) Kvadratna tablica $n \times n$ popunjena je prirodnim brojevima od 1 do n^2, pri čemu su u prvom redu zapisani po redu brojevi od 1 do n, u drugom redu od $n+1$ do $2n$, u trećem od $2n+1$ do $3n$, itd. Iz ove se tablice izreže kvadrat $m \times m$ $(m < n)$. Dokažite da je dvostruki zbroj brojeva koji su u tom izrezanom kvadratu djeljiv s m^2.