DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

Trogir, 9. travnja 2015.

Zadatak B-1.1.

Ako je $xyz = abc$, koliko je $\dfrac{bx}{xy+ab+bx} + \dfrac{cy}{yz+bc+cy} + \dfrac{az}{zx+ca+az}$?

Rješenje.

Prvi razlomak proširimo sa z, a drugi s a.

$$\frac{bx}{xy+ab+bx} \cdot \frac{z}{z} + \frac{cy}{yz+bc+cy} \cdot \frac{a}{a} + \frac{az}{zx+ca+az} =$$

$$\frac{bxz}{xyz+abz+bxz} + \frac{cay}{ayz+abc+acy} + \frac{az}{zx+ca+az}.$$

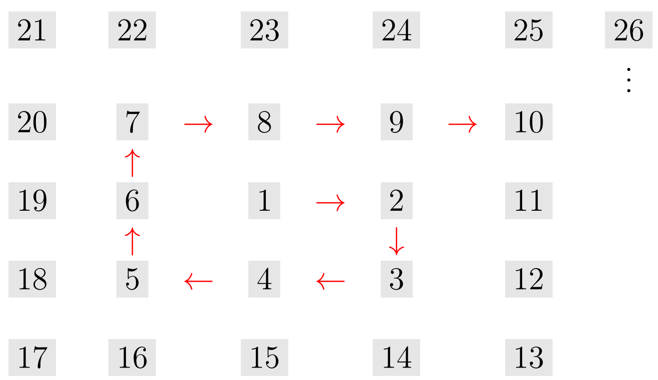
Izraz xyz u nazivniku prvog razlomka zamijenimo s abc, a izraz abc u nazivniku drugog razlomka zamijenimo s xyz.

$$\frac{bxz}{abc+abz+bxz} + \frac{cay}{ayz+xyz+acy} + \frac{az}{zx+ca+az} =$$

$$\frac{bxz}{b(ac+az+xz)} + \frac{acy}{y(az+xz+ac)} + \frac{az}{zx+ca+az} = \frac{xz+ac+az}{ac+xz+az} = 1.$$

Zadatak B-1.2.

Prirodne brojeve redom ispisujemo tako da formiraju spiralu brojeva kao na slici:



Pozicija nekog broja određuje se u odnosu na broj 1. Primjerice, broj 24 nalazi se za 1 mjesto udesno i 2 mjesta prema gore. Odredite poziciju na kojoj se nalazi broj 2015 u odnosu na broj 1.

Rješenje.

Uočimo da su brojevi na dijagonali desno prema gore kvadrati neparnih prirodnih brojeva $1, 9, 25, 49, \ldots$.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
21 & 22 & & 23 & & 24 & & \boxed{25} & 26 \\
 & & & & & & & & \vdots \\
20 & 7 & \rightarrow & 8 & \rightarrow & \boxed{9} & \rightarrow & 10 & \\
 & \uparrow & & & & & & & \\
19 & 6 & & \boxed{1} & \rightarrow & 2 & & 11 & \\
 & \uparrow & & & & \downarrow & & & \\
18 & 5 & \leftarrow & 4 & \leftarrow & 3 & & 12 & \\
 & & & & & & & & \\
17 & 16 & & 15 & & 14 & & 13 &
\end{array}
$$

Broj $9 = (2 \cdot \mathbf{1} + 1)^2$ i njegova je pozicija 1 udesno i 1 prema gore.
Broj $25 = (2 \cdot \mathbf{2} + 1)^2$ i njegova je pozicija 2 udesno i 2 prema gore.
Broj $49 = (2 \cdot \mathbf{3} + 1)^2$ i njegova je pozicija 3 udesno i 3 prema gore...

Kvadrat neparnog prirodnog broja koji je najbliži broju 2015 je $45^2 = 2025$.

Kako je $45 = 2 \cdot \mathbf{22} + 1$, pozicija broja 2025 je 22 mjesta udesno i 22 mjesta prema gore.

Kako je $2025 = 2015 + 10$, to je pozicija broja 2015 u odnosu na broj 1
$22 - 10 = 12$ mjesta udesno i 22 mjesta prema gore.

Zadatak B-1.3.

Svaki je član Maričine obitelji popio 4 decilitra mješavine kave i mlijeka. Količina kave i mlijeka je različita u svakoj šalici, ali nikad nije nula. Marica je popila jednu četvrtinu ukupne količine mlijeka i jednu šestinu ukupne količine kave. Koliko članova ima Maričina obitelj?

Rješenje.

Neka je k količina kave, a m količina mlijeka koju je popila Marica (u dl). Obitelj neka ima n članova. Kako je svaki član obitelji popio 4 dl mješavine kave i mlijeka, ukupno se popilo $4n$ mješavine, pa vrijede sljedeće jednakosti:

$$
\begin{aligned}
&k + m = 4 \\
&6k + 4m = 4n, \\
&k > 0,\ m > 0,\ n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Odredimo k i m u ovisnosti o n.

$$
\begin{aligned}
&m = 4 - k \\
&6k + 4(4 - k) = 4n, \\
&k = 2n - 8, \\
&m = 12 - 2n.
\end{aligned}
$$

S obzirom da količina kave i mlijeka ne može biti 0, za brojeve k i m vrijedi:

$$2n - 8 > 0 \text{ i } 12 - 2n > 0.$$

Slijedi $n > 4$ i $n < 6$, pa je $n = 5$.

Maričina obitelj ima 5 članova.

Zadatak B-1.4.

Skup točaka (x, y) u koordinatnoj ravnini za koje vrijedi

$$|x| \leqslant a,\ a \in \mathbb{Z},\ a > 0,\ x + y \geqslant 0,\ |1 - y| \leqslant 2,$$

sadrži 2015 točaka s cjelobrojnim koordinatama. Odredite broj a i površinu danog skupa točaka.

Rješenje.

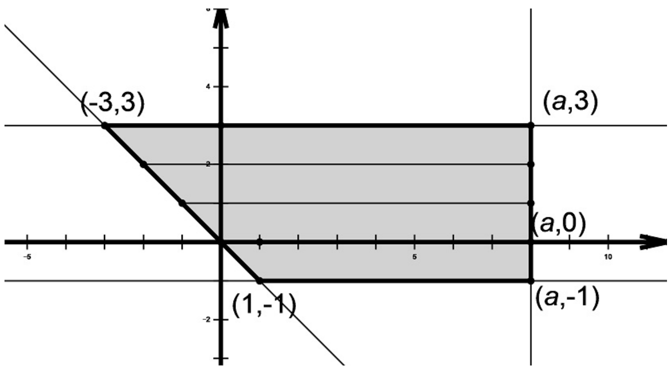
Iz $|x| \leqslant a$ slijedi $-a \leqslant x \leqslant a$, a iz $|1 - y| \leqslant 2$ slijedi da je

$$1 - y \leqslant 2 \text{ i } 1 - y \geqslant -2,$$

$$y \geqslant -1 \text{ i } y \leqslant 3.$$

Dobivamo skup točaka (x, y) koje se nalaze
između pravaca $y = -1, y = 3$,
između pravaca $x = -a$ i $x = a$, te na kraju, zbog $y \geqslant -x$,
iznad simetrale drugog i četvrtog kvadranta.

Broj $a > 3$ jer bi u protivnom unutar danog skupa točaka bilo manje od 2015 (točnije $\leqslant 25$) točaka s cjelobrojnim koordinatama.



Dobiveni je lik trapez $ABCD$ kojemu su osnovice duljine $a + 3$ i $a - 1$, a duljina visine $v = 4$. Prebrojimo točke po segmentima paralelnima s x-osi unutar dobivenog trapeza.

$$\begin{aligned}
2015 &= a + 4 + a + 3 + a + 2 + a + 1 + a \\
2015 &= 5a + 10, \text{ a odavde je} \\
403 &= a + 2, \\
a &= 401.
\end{aligned}$$

Površina dobivenog trapeza je

$$P = \frac{(a - 1) + (a + 3)}{2} \cdot 4 = (400 + 404) \cdot 2 = 1608 \text{ kvadratnih jedinica.}$$

Zadatak B-1.5.

Dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ točno jedan od brojeva $A_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$ i $B_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$ djeljiv s 5.

Prvo rješenje.

Svaki prirodni broj možemo zapisati u obliku $n = 4k + l$ gdje je $l \in \{0, 1, 2, 3\}, k \in \mathbb{N}_0$. Tada je:
$A_n = 2^{2(4k+l)+1} - 2^{4k+l+1} + 1 = 2^{8k+2l+1} - 2^{4k+l+1} + 1$
$B_n = 2^{8k+2l+1} + 2^{4k+l+1} + 1$.
U prvom slučaju neka je $l = 0$. Tada je

$$A_n = 2^{8k+1} - 2^{4k+1} + 1 = 2^{4k+1}(2^{4k} - 1) + 1$$

$$B_n = 2^{8k+1} + 2^{4k+1} + 1 = 2^{4k+1}(2^{4k} + 1) + 1.$$

Zadnja znamenka potencije broja 2 završava znamenkom 6, ako je eksponent oblika $4k$, znamenkom 2 ako je oblika $4k + 1$, znamenkom 4 ako je oblika $4k + 2$ i znamenkom 8 ako je oblika $4k + 3$.
Zadnja znamenka broja A_n jednaka je zadnjoj znamenci broja $2 \cdot (6 - 1) + 1 = 11$ što znači da broj A_n nije djeljiv s 5.
Zadnja znamenka broja B_n jednaka je zadnjoj znamenci broja $2 \cdot (6 + 1) + 1 = 15$ što znači da je broj B_n djeljiv s 5.

Ako je $l = 1$:

$$A_n = 2^{8k+3} - 2^{4k+2} + 1 = 2^{4k+2}(2^{4k+1} - 1) + 1,$$
$$B_n = 2^{8k+3} + 2^{4k+2} + 1 = 2^{4k+2}(2^{4k+1} + 1) + 1.$$

Sličnim zaključivanjem kao u prethodnom slučaju dobivamo da je zadnja znamenka broja A_n jednaka zadnjoj znamenci broja $4 \cdot (2 - 1) + 1 = 5$, što znači da je broj A_n djeljiv s 5.
Zadnja znamenka broja B_n jednaka je zadnjoj znamenci broja $4 \cdot (2 + 1) + 1 = 13$ što znači da broj B_n nije djeljiv s 5.

Ako je $l = 2$:

$$A_n = 2^{8k+5} - 2^{4k+3} + 1 = 2^{4k+3}(2^{4k+2} - 1) + 1,$$
$$B_n = 2^{8k+5} + 2^{4k+3} + 1 = 2^{4k+3}(2^{4k+2} + 1) + 1.$$

Zadnja znamenka broja A_n jednaka je zadnjoj znamenci broja $8 \cdot (4 - 1) + 1 = 25$, što znači da je broj A_n djeljiv s 5.
Zadnja znamenka broja B_n jednaka je zadnjoj znamenci broja $8 \cdot (4 + 1) + 1 = 41$, što znači da broj B_n nije djeljiv s 5.

Ako je $l = 3$:

$$A_n = 2^{8k+7} - 2^{4k+4} + 1 = 2^{4k+4}(2^{4k+3} - 1) + 1,$$
$$B_n = 2^{8k+7} + 2^{4k+4} + 1 = 2^{4k+4}(2^{4k+3} + 1) + 1.$$

Zadnja znamenka broja A_n jednaka je zadnjoj znamenci broja $6 \cdot (8 - 1) + 1 = 43$ što znači da broj A_n nije djeljiv s 5.
Zadnja znamenka broja B_n jednaka je zadnjoj znamenci broja $6 \cdot (8 + 1) + 1 = 55$ što znači da je broj B_n djeljiv s 5.

Drugo rješenje.

Pomnožimo dane brojeve i primijetimo da se umnožak može napisati kao razlika kvadrata:

$$\begin{aligned} A_nB_n &= (2^{2n+1}+1-2^{n+1})(2^{2n+1}+1+2^{n+1}) = (2^{2n+1}+1)^2 - 2^{2n+2} \\ &= 2^{4n+2}+2^{2n+2}+1-2^{2n+2} = 2^{4n+2}+1 = 4\cdot 2^{4n}+1 \end{aligned}$$

Budući da je $2^{4n} = 16^n$, a 16 daje ostatak 1 pri dijeljenju s 5, i broj 2^{4n} daje ostatak 1 pri dijeljenju s 5.

Stoga dobiveni produkt $A_nB_n = 4\cdot 2^{4n}+1$ daje isti ostatak kao i $4\cdot 1+1=5$ pri dijeljenju s 5, odnosno A_nB_n je djeljivo s 5. Budući da je 5 prost broj, bar jedan od brojeva A_n i B_n je djeljiv s 5.

Preostaje provjeriti da ne mogu oba broja biti djeljiva s 5.
Kada bi 5 dijelio i $A_n = 2^{2n+1}-2^{n+1}+1$ i $B_n = 2^{2n+1}+2^{n+1}+1$, dijelio bi i njihovu razliku $B_n - A_n = 2\cdot 2^{n+1} = 2^{n+2}$, što je nemoguće jer je to potencija broja 2.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

Trogir, 9. travnja 2015.

Zadatak B-2.1.

Odredite realni parametar k tako da sustav jednadžbi

$$\left[Im\left(z+\frac{1}{2}i\right)\right]^2=|z+2|^2+\frac{5}{4} \quad \text{i} \quad Im(z)-2Re(z)=k, z\in\mathbb{C}$$

ima samo jedno rješenje?

Rješenje.

Neka je $z=x+yi$; $x,y\in\mathbb{R}$.

Tada prva od danih jednadžbi prelazi u

$$\left[Im\left(x+yi+\frac{1}{2}i\right)\right]^2=|x+yi+2|^2+\frac{5}{4},$$

odnosno

$$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=(x+2)^2+y^2+\frac{5}{4}.$$

Sređivanjem dobivamo skup točaka (x,y) koje leže na paraboli $y=x^2+4x+5$.

Druga jednadžba $Im(x+yi)-2Re(x+yi)=k$ određuje skup točaka (x,y) koje leže na pravcu $y=2x+k$.

Rješavanjem sustava jednadžbi dobivamo zajedničke točke parabole i pravca:

$$\begin{aligned}
&y=x^2+4x+5\\
&y=2x+k\\
&x^2+4x+5=2x+k\\
&x^2+2x+5-k=0.
\end{aligned}$$

Dobivena kvadratna jednadžba će imati jedno realno rješenje ako joj je diskriminanta ($D=b^2-4ac$) jednaka nuli, odnosno

$4-4(5-k)=0\Rightarrow k=4.$

Zadatak B-2.2.

U pravokutnom trokutu kojemu je c duljina hipotenuze, a, b duljine kateta te α, β njima redom nasuprotni kutovi, vrijedi nejednakost $5c^4\geqslant 6a^2c^2+8b^4$. Odredite sve vrijednosti koje mogu poprimiti kutovi α i β u tom trokutu.

Rješenje.

Na nejednadžbu $5c^4 \geqslant 6a^2c^2 + 8b^4$ primijenimo neki od oblika Pitagorinog poučka, primjerice $b^2 = c^2 - a^2$. Uvrštavanjem dobivamo

$5c^4 \geqslant 6a^2c^2 + 8\left(c^2 - a^2\right)^2$.

Sređivanjem dobivamo $8a^4 - 10a^2c^2 + 3c^4 \leqslant 0$.

Podijelimo dobivenu nejednadžbu s c^4 i slijedi

$8\left(\dfrac{a}{c}\right)^4 - 10\left(\dfrac{a}{c}\right)^2 + 3 \leqslant 0.$

Kako je $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, slijedi $8\sin^4\alpha - 10\sin^2\alpha + 3 \leqslant 0$.

Nakon uvođenja supstitucije $t = \sin^2\alpha$, dobivamo nejednadžbu $8t^4 - 10t^2 + 3 \leqslant 0$.

Rješenje te nejednadžbe je $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3}{4}$. Tada je

$\frac{1}{2} \leqslant \sin^2\alpha \leqslant \frac{3}{4}$.

Kako je $\sin\alpha \in \langle 0, 1\rangle$, vrijedi $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \sin\alpha \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, odnosno $\alpha \in [45°, 60°]$.

Zbog $\beta = 90° - \alpha$ slijedi $\beta \in [30°, 45°]$

Zadatak B-2.3.

Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{gathered} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 126 \\ x + y - 12(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 36 + 2\sqrt{xy} = 0. \end{gathered}$$

Rješenje.

Zapišimo dane jednadžbe u pogodnijem obliku.

Zbog $x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = (\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3$ prva jednadžba prelazi u

$$\begin{aligned} &(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (x - \sqrt{xy} + y) = 126 \\ &(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot ((\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 3\sqrt{xy}) = 126. \quad (*) \end{aligned}$$

Druga jednadžba prelazi u

$$\begin{aligned} &x + y - 12(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 36 + 2\sqrt{xy} = 0 \\ &(x + 2\sqrt{xy} + y) - 12(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 36 = 0 \\ &(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 12(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 36 = 0 \\ &(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 6)^2 = 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobivene jednakosti u $(*)$ slijedi $6 \cdot (36 - 3 \cdot \sqrt{xy}) = 126$, odnosno $\sqrt{xy} = 5$.

Rješavamo sustav

$$\begin{gathered} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6 \\ \sqrt{xy} = 5. \end{gathered}$$

Uvođenjem zamjene $\sqrt{x}=a$, $\sqrt{y}=b$ dobivamo

$$
\begin{aligned}
a+b&=6\\
ab&=5
\end{aligned}
$$

što daje $a=1$, $b=5$ ili $a=5$, $b=1$, odnosno $x=1$, $y=25$ ili $x=25$, $y=1$.

Zadatak B-2.4.

Pinokio ponedjeljkom i utorkom govori istinu, subotom uvijek laže, a ostale dane u tjednu ili govori istinu ili laže. Na pitanje "Koji ti je predmet u školi najdraži?" šest uzastopnih dana u tjednu davao je redom sljedeće odgovore: "Povijest", "Matematika", "Zemljopis", "Fizika", "Kemija", "Fizika". Koji predmet Pinokio najviše voli? Objasnite svoj odgovor.

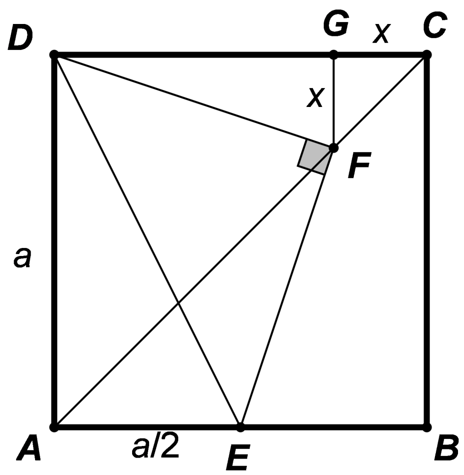
Rješenje.

Ako bi među onih šest uzastopnih dana tijekom kojih je Pinokio davao nama poznate odgovore bili i ponedjeljak i utorak, morali bismo imati dva uzastopna ista odgovora (budući da Pinokio i ponedjeljkom i utorkom govori istinu), što nemamo pa su jedine dvije mogućnosti koje preostaju da je niz pitanja počeo u utorak (a šesti odgovor dobili smo u nedjelju), kao i mogućnost da je niz pitanja počeo u srijedu (a šesti odgovor dobili smo u ponedjeljak). Ako je niz pitanja počeo u srijedu tada smo u subotu dobili odgovor "Fizika", kao i u ponedjeljak što je nemoguće budući da subotom Pinokio uvijek laže, a ponedjeljkom uvijek govori istinu. Dakle, ostaje jedino mogućnost da je niz pitanja počeo u utorak. U tom je slučaju Pinokio u utorak dao odgovor "Povijest". Kako Pinokio utorkom uvijek govori istinu, zaključujemo da je "Povijest" njegov najdraži predmet.

Zadatak B-2.5.

Točka E je polovište stranice $\overline{AB}$ kvadrata $ABCD$. Na dijagonali $\overline{AC}$ odabrana je točka F tako da je trokut EFD pravokutan s pravim kutom u F. U kojem omjeru točka F dijeli dijagonalu $\overline{AC}$?

Rješenje.



$|DE|=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a}{2}\sqrt{5}.$

$\overline{DE}$ je promjer kružnice na kojoj leže točke A i F (Tales).

Kutovi DAF i DEF su obodni nad tetivom DF i jednaki $45°$ pa je trokut EFD jednakokračan.

$|DF| = \dfrac{|DE|}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

Iz trokuta DGF dobivamo

$(a-x)^2 + x^2 = |DF|^2$, tj. kvadratnu jednadžbu $16x^2 - 16ax + 3a^2 = 0$.

Rješenja su $x_1 = \dfrac{3a}{4}$ i $x_2 = \dfrac{a}{4}$.

Dakle, $|GC| = \dfrac{a}{4}$.

Trokut FCG je jednakokračan pravokutan pa je $|FC| = x\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4} = \dfrac{|AC|}{4}$.

Dakle, $|AF| = \dfrac{3|AC|}{4}$, odnosno točka F dijeli dijagonalu u omjeru $3:1$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

Trogir, 9. travnja 2015.

Zadatak B-3.1.

Uređeni parovi (a, b) i (c, d) su rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} \log_{225} x + \log_{64} y &= 4 \\ \log_x 225 - \log_y 64 &= 1. \end{aligned}$$

Izračunajte $\log_{30}(abcd)$.

Rješenje.

Rješenja x i y zadatka moraju biti pozitivni realni brojevi različiti od 1. Uočimo da je

$$\log_x 225 = \frac{1}{\log_{225} x} \quad \text{i} \quad \log_y 64 = \frac{1}{\log_{64} y}.$$

Uvedemo li zamjene $\log_{225} x = m$ i $\log_{64} y = n$, sustav prelazi u

$$\begin{aligned} m + n &= 4 \\ \frac{1}{m} - \frac{1}{n} &= 1. \end{aligned}$$

Iz prve jednadžbe izrazimo m i uvrstimo u drugu jednadžbu. Dobijemo

$$\begin{aligned} \frac{1}{4-n} - \frac{1}{n} &= 1 \\ n - (4 - n) &= 4n - n^2 \\ n^2 - 2n - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Rješenja posljednje jednadžbe i pripadni m_1, m_2 su:

$$n_1 = 1 - \sqrt{5}, \quad n_2 = 1 + \sqrt{5}, \quad \text{odnosno} \quad m_1 = 3 + \sqrt{5}, \quad m_2 = 3 - \sqrt{5}.$$

Izračunjamo sad $x = 225^m$ i $y = 64^n$. Imamo

$$a = x_1 = 225^{3+\sqrt{5}}, \quad b = y_1 = 64^{1-\sqrt{5}}, \quad c = x_2 = 225^{3-\sqrt{5}} \quad \text{i} \quad d = y_2 = 64^{1+\sqrt{5}},$$

pa je konačno rješenje

$$\begin{aligned} \log_{30}(abcd) &= \log_{30}\left(225^{3+\sqrt{5}} \cdot 64^{1-\sqrt{5}} \cdot 225^{3-\sqrt{5}} \cdot 64^{1+\sqrt{5}}\right) = \log_{30}\left(225^6 \cdot 64^2\right) \\ &= \log_{30}\left(15^{12} \cdot 2^{12}\right) = \log_{30} 30^{12} = 12. \end{aligned}$$

Zadatak B-3.2.

Ako su a, b, c duljine stranica trokuta, α, β, γ njima nasuprotni kutovi i R polumjer trokutu opisane kružnice, dokažite da vrijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2(1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma).$$

Rješenje.

Iz poučka o sinusu slijedi

$$\begin{aligned} a = 2R\sin\alpha &\implies a^2 = 4R^2\sin^2\alpha \\ b = 2R\sin\beta &\implies b^2 = 4R^2\sin^2\beta \\ c = 2R\sin\gamma &\implies c^2 = 4R^2\sin^2\gamma. \end{aligned}$$

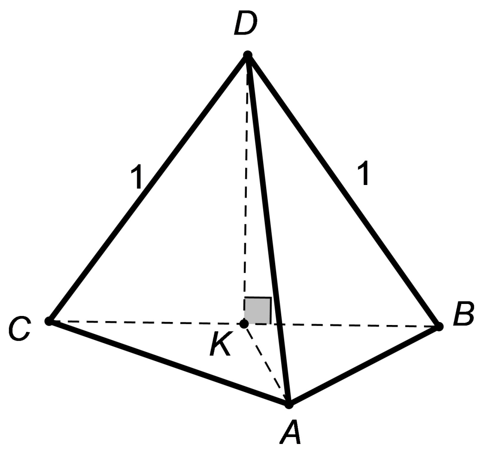
Sada imamo

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 4R^2\big(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma\big) \\ &= 2R^2\big(1 - \cos 2\alpha + 1 - \cos 2\beta + 1 - \cos 2\gamma\big) \\ &= 2R^2\big(3 - (\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma)\big) \\ &= 2R^2\big(3 - [\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos(2\alpha + 2\beta)]\big) \\ &= 2R^2\big(3 - [2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 2\cos^2(\alpha+\beta) - 1]\big) \\ &= 2R^2\big(4 - 2\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]\big) \\ &= 2R^2\big(4 - 4\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha\cos\beta\big) \\ &= 8R^2\big(1 - \cos(\pi-\gamma)\cos\alpha\cos\beta\big) \\ &= 8R^2(1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma). \end{aligned}$$

Zadatak B-3.3.

U trostranoj piramidi $ABCD$ pobočka BDC okomita je na osnovku ABC, $|BD| = |DC| = 1$, a svi bočni bridovi pri vrhu D zatvaraju kut od $60°$. Odredite obujam trostrane piramide.

Rješenje.



Prema uvjetu zadatka je $\sphericalangle BDC = \sphericalangle CDA = \sphericalangle ADB = 60^\circ$ i $|BD| = |DC| = 1$, te je trokut BCD jednakostraničan, a visina trokuta $|DK| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pravac DK leži u ravnini BCD koja je okomita na ravninu ABC, pa je okomit na svaki pravac koji leži u ravnini ABC, tj. $DK \perp AK$, odnosno $\sphericalangle DKA = 90^\circ$.

Uočimo da je $\triangle CKA \cong \triangle BKA$ ($|CK| = |BK|$, $\sphericalangle CKA = \sphericalangle AKB = 90^\circ$), pa je $|AC| = |AB|$.

Neka je sad $|KA| = x$, $|DA| = m$ i $|AB| = n$. Iz pravokutnog trokuta DKA slijedi:

$$m^2 = x^2 + \frac{3}{4} \implies x^2 = m^2 - \frac{3}{4}. \tag{1}$$

Iz pravokutnog trokuta CKA slijedi:

$$n^2 = x^2 + \frac{1}{4} \implies x^2 = n^2 - \frac{1}{4}. \tag{2}$$

U trokutu ABD primjenimo poučak o kosinusu:

$$n^2 = m^2 + 1 - 2m\cos 60^\circ \implies n^2 = m^2 - m + 1. \tag{3}$$

Sada iz (1) i (2) slijedi

$$n^2 = m^2 - \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Iz (3) i (4) slijedi

$$m^2 - \frac{1}{2} = m^2 - m + 1 \implies m = \frac{3}{2},$$

pa uvrštavanjem u (1) dobivamo

$$x^2 = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{6}{4} \implies x = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

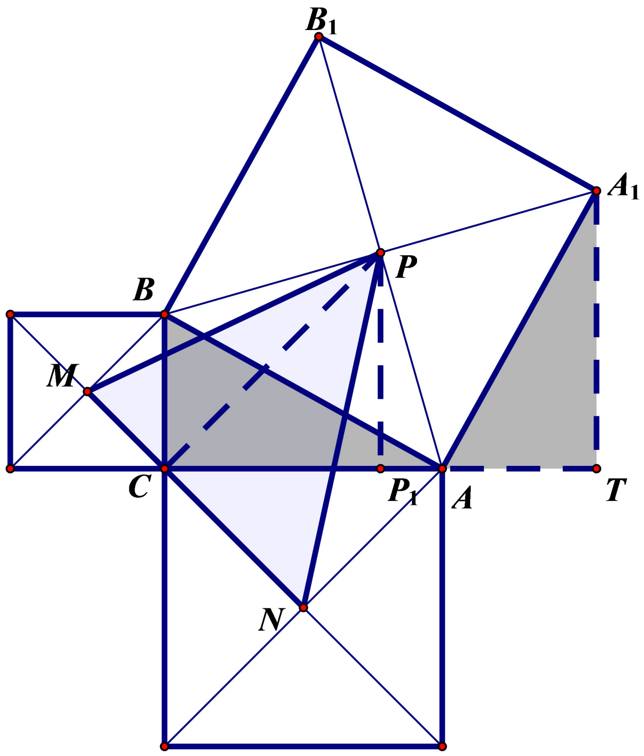
Na kraju je volumen dane trostrane piramide

$$V = \frac{1}{3}B \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{24} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Zadatak B-3.4.

Nad stranicama pravokutnog trokuta kojemu su a, b duljine kateta, konstruirani su prema van kvadrati. Izračunajte (u ovisnosti o a i b) površinu trokuta kojemu su vrhovi u središtima konstruiranih kvadrata.

Prvo rješenje.



Treba izračunati površinu trokuta MNP. Duljina stranice $\overline{MN}$ iznosi

$$|MN| = |MC| + |CN| = \frac{a\sqrt{2} + b\sqrt{2}}{2}.$$

Trokuti ATA_1 i BCA su sukladni ($|AB| = |AA_1|$, $\sphericalangle A_1AT = \sphericalangle ABC$, oba trokuta su pravokutna).

Tada je $\overline{PP_1}$ srednjica trapeza CTA_1B i vrijedi $|PP_1| = \frac{a+b}{2}$, a s druge strane je i

$$|CP_1| = \frac{1}{2}|CT| = \frac{1}{2}(a+b).$$

Pravokutnom trokutu CP_1P su dvije stranice jednake, te su njihovi nasuprotni kutevi jednaki $45°$. Zaključujemo da je $\sphericalangle PCN = 90°$ (jer je zbroj dva kuta od $45°$), a $\overline{PC}$ je visina trokuta MNP. Tada je površina trokuta MNP jednaka

$$P = \frac{|MN| \cdot |PC|}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2} + b\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}(a+b)}{2} = \frac{(a+b)^2}{4}.$$

Drugo rješenje.

Smjestimo dani trokut i konstruirane kvadrate u koordinatni sustav tako da je ishodište koordinatnog sustava u vrhu C, vrh A na osi x, a vrh B na osi y. Kao i u prvom rješenju treba prvo pokazati da je $\overline{PP_1}$ srednjica trapeza CTA_1B.

Tada su koordinate vrhova M, N i P sljedeće

$$M\Big(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\Big), \quad N\Big(\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}\Big), \quad P\Big(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\Big).$$

Površina trokuta iznosi

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \cdot \Big|\frac{b}{2}\Big(\frac{a}{2} - \frac{a+b}{2}\Big) + \frac{-a}{2}\Big(\frac{a+b}{2} + \frac{b}{2}\Big) + \frac{a+b}{2}\Big(-\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\Big)\Big| \\ &= \frac{1}{8} \cdot |2(a^2 + b^2 + 2ab)| = \frac{(a+b)^2}{4}. \end{aligned}$$

Zadatak B-3.5.

Odredite sve proste brojeve p, q i prirodan broj r tako da vrijedi

$$p^2 + q^2 + pq = r^2.$$

Rješenje.

Očito je $r > p$ i $r > q$. Dana jednakost ekvivalenta je s

$$(p+q)^2 - pq = r^2, \quad \text{odnosno}$$
$$(p+q-r)(p+q+r) = pq.$$

Kako su p i q prosti i $p+q-r < p+q+r$ vrijedi:

$$\begin{aligned} p+q-r &= p \\ p+q+r &= q \end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned} p+q-r &= q \\ p+q+r &= p \end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned} p+q-r &= 1 \\ p+q+r &= pq. \end{aligned}$$

Prva dva slučaja nisu moguća jer je $r > p$ i $r > q$, pa razmatramo samo treći slučaj.

Zbrojimo li jednadžbe dobivamo

$$\begin{aligned} 2p + 2q - 1 &= pq \\ 2p + 2q - pq - 4 + 3 &= 0 \\ (p-2)(q-2) &= 3. \end{aligned}$$

Sada je $p = 5, q = 3$ ili $p = 3, q = 5$, a u oba slučaja je $r = 7$.

Dakle, sva rješenja jednadžbe su

$$(p, q, r) = (5, 3, 7) \quad \text{ili} \quad (3, 5, 7).$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

Trogir, 9. travnja 2015.

Zadatak B-4.1.

Odredite područje definicije funkcije $f(x)=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ i odredite broj rješenja jednadžbe $f(x)=a$, u ovisnosti o realnom broju a.

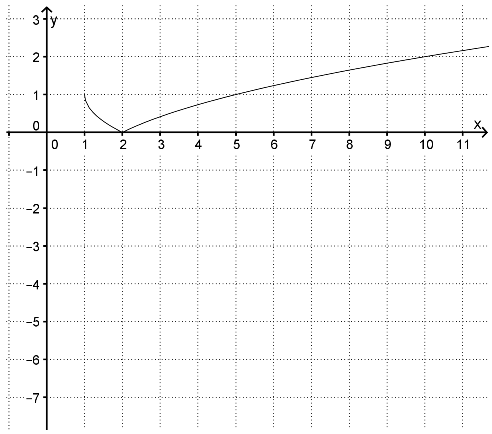
Rješenje.

Zapišimo funkciju f u sljedećem obliku

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} \\ &= |\sqrt{x-1}-1|. \end{aligned}$$

Funkcija f je definirana za sve realne brojeve x za koje je $x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$, pa je njezino područje definicije skup $D_f=[1,\infty\rangle$.

Broj rješenja jednadžbe $f(x)=a$ odredit ćemo grafički. Nacrtajmo graf funkcije f.



Broj rješenja tražene jednadžbe jednak je broju sjecišta pravca $y=a$ i grafa funkcije f.

Ako je $a<0$ jednadžba $f(x)=a$ nema rješenja;

Ako je $a=0$ jednadžba $f(x)=a$ ima jedno rješenje, $x=2$;

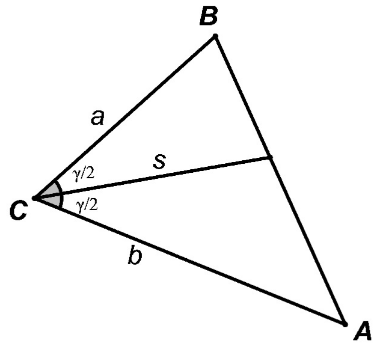
Ako je $0<a\leqslant 1$ jednadžba $f(x)=a$ ima dva rješenja;

Ako je $a>1$ jednadžba $f(x)=a$ ima jedno rješenje.

Zadatak B-4.2.

Izračunajte površinu trokuta kojemu duljine dviju stranica iznose 13 cm i 14 cm, a duljina simetrale kuta između tih dviju stranica iznosi $\frac{28\sqrt{13}}{9}$ cm.

Prvo rješenje.



Neka su a, b stranice danog trokuta i s simetrala kuta između njih. Tada je površina trokuta jednaka

$$P = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma \text{ ili } P = \frac{1}{2}as \cdot \sin\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}bs \cdot \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}s \cdot (a+b) \cdot \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Slijedi:

$$\frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}s \cdot (a+b) \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$$

$$\left(2 \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}\right) \cdot 13 \cdot 14 = \frac{28\sqrt{13}}{9} \cdot 27 \cdot \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Tada je

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \ \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\gamma}{2}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14 \cdot 2 \cdot \frac{3\sqrt{13}}{13} \cdot \frac{2\sqrt{13}}{13} = 84 \text{ cm}^2.$$

Drugo rješenje.

Označimo $x = |BD|$, a $y = |DA|$. Tada je $x : y = a : b = 13 : 14$. Možemo pisati $x = 13k$, $y = 14k$.

Primjenimo poučak o kosinusu na trokute ACD i BCD.

$$x^2 = a^2 + s^2 - 2 \cdot a \cdot s \cdot \cos\frac{\gamma}{2},$$
$$y^2 = b^2 + s^2 - 2 \cdot b \cdot s \cdot \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Slijedi:

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{a^2+s^2-x^2}{2as}, \text{ odnosno}$$

$$\frac{a^2+s^2-x^2}{2as} = \frac{b^2+s^2-y^2}{2bs} \text{ ili}$$

$$\frac{13^2 + \frac{28^2 \cdot 13}{81} - 13^2k^2}{13} = \frac{14^2 + \frac{28^2 \cdot 13}{81} - 14^2k^2}{14}$$

$$k^2 = \frac{25}{81}, \ k = \frac{5}{9}.$$

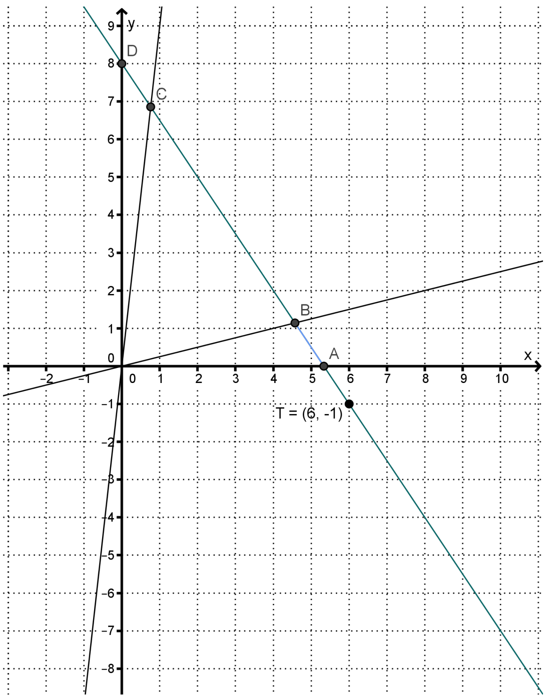
Tada je $c = 27k = 15$ cm. Površinu možemo izračunati Heronovom formulom:

$$s = \frac{13+14+15}{2} = 21,\ P = \sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} = 84\ \text{cm}^2.$$

Zadatak B-4.3.

Zadani su pravci $p_1 ... y = \frac{1}{4}x$, $p_2 ... y = 9x$ i točka $T(6,-1)$. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom T, a os apscisa, pravce p_1, p_2 i os ordinata siječe redom u točkama A, B, C, D tako da vrijedi $|AB| = |CD|$.

Rješenje.



Pravac koji prolazi točkom T ima jednadžbu:

$$y + 1 = k(x-6)$$
$$y = kx - (6k+1)$$

Da bi uopće presjekao x-os, p_1, p_2 i y-os ne smije biti paralelan sa zadanim pravcima i koordinatnim osima, niti prolaziti kroz ishodište, tj. mora vrijediti:

$$k \neq \frac{1}{4},\ k \neq 9,\ k \neq 0,\ k \neq -\frac{1}{6}.$$

Koordinate točaka A, B, C, D određujemo rješavanjem sustava jednadžbi pripadnih pravaca:

$$A\left(\frac{6k+1}{k}, 0\right)$$
$$B\left(\frac{4(6k+1)}{4k-1}, \frac{6k+1}{4k-1}\right)$$
$$C\left(\frac{6k+1}{k-9}, \frac{9(6k+1)}{k-9}\right)$$
$$D\left(0, -6k-1\right)$$

Kako je $|AB| = |CD|$ slijedi

$$\left(\frac{4(6k+1)}{4k-1} - \frac{6k+1}{k}\right)^2 + \left(\frac{6k+1}{4k-1}\right)^2 = \left(\frac{6k+1}{k-9}\right)^2 + \left(\frac{9(6k+1)}{k-9} + (6k+1)\right)^2 \quad / : (6k+1)^2$$

$$\left(\frac{4}{4k-1} - \frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{4k-1}\right)^2 = \left(\frac{1}{k-9}\right)^2 + \left(\frac{9}{k-9} + 1\right)^2$$

$$\frac{1}{(4k-1)^2k^2} + \frac{1}{(4k-1)^2} = \frac{1}{(k-9)^2} + \frac{k^2}{(k-9)^2}$$

$$\frac{1+k^2}{(4k-1)^2k^2} = \frac{1+k^2}{(k-9)^2}$$

$$(4k-1)^2k^2 = (k-9)^2$$

$$|(4k-1)k| = |k-9|$$

Imamo sljedeće mogućnosti:

1.
$$4k^2 - k = k - 9 \Rightarrow 4k^2 - 2k + 9 = 0 \Rightarrow \text{ nema realnih rješenja.}$$

2.
$$4k^2 - k = 9 - k \Rightarrow 4k^2 = 9 \Rightarrow k_{1,2} = \pm\frac{3}{2}.$$

Postoje dva pravca s traženim svojstvom:

$$p' \ldots y = \frac{3}{2}x - 10, \; p'' \ldots y = -\frac{3}{2}x + 8.$$

Zadatak B-4.4.

Zadane su sljedeće funkcije:

$$f(x) = 10^{10x}, \; g(x) = \log\left(\frac{x}{10}\right), \; h_1(x) = g(f(x)), \; h_n(x) = h_1(h_{n-1}(x)),$$

za sve $n \geqslant 2$. Odredite zbroj znamenaka broja $h_{2015}(1)$.

Rješenje.

Odredimo prvo $h_1(x) = g(f(x)) = 10x - 1$. Tada je

$h_2(x) = h_1(h_1(x)) = 10(10x-1) - 1 = 10^2x - 10 - 1$, $h_2(1) = 10^2 - 10 - 1 = 89$.
$h_3(x) = h_1(h_2(x)) = 10(10^2x - 10 - 1) - 1 = 10^3x - 10^2 - 10 - 1$, $h_3(1) = 10^3 - 10^2 - 10 - 1 = 889$.

Očito će n-ti član biti $h_n(1) = 10^n - (10^{n-1} + \ldots + 10 + 1)$. Izraz u zagradi je zbroj n članova geometrijskog niza kojemu je prvi član 1, a kvocijent 10. Slijedi

$$h_n(1) = 10^n - \frac{10^n - 1}{9} = 10^n - \frac{999\ldots9}{9} = 10^n - \underbrace{111\ldots11}_{n \text{ jedinica}}.$$

Tada je traženi broj

$$h_{2015}(1) = 10^{2015} - \underbrace{111\ldots11}_{2015 \text{ jedinica}} = \underbrace{888\ldots88}_{2014 \text{ osmica}}9.$$

Zbroj znamenaka ovog broja je $2014 \cdot 8 + 9 = 16121$.

Zadatak B-4.5.

Na nekom košarkaškom turniru ekipe "Vukovi" i "Medvjedi" su prvu četvrtinu odigrali neriješeno. Bodovi koje su Vukovi osvojili u svakoj od 4 četvrtine čine rastući geometrijski niz, a bodovi koje su Medvjedi osvojili po četvrtinama čine rastući aritmetički niz. Na kraju su Vukovi pobijedili s jednim bodom razlike. Niti jedna ekipa nije osvojila više od 100 bodova. Odredite ukupan broj bodova koje su obje ekipe zajedno osvojile na kraju prvog poluvremena.

Rješenje.

Neka je a broj bodova koji su obje ekipe osvojile u prvoj četvrtini. Tada je niz brojeva, odnosno bodova koje su Vukovi osvojili u svakoj četvrtini posebno jednak redom a, aq, aq^2, aq^3, gdje je q kvocijent geometrijskog niza i $q > 1$ jer je niz rastući.

Niz bodova koji su Medvjedi osvojili u svakoj četvrtini posebno je sljedeći rastući aritmetički niz: a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$, $d > 0$.

Zbroj geometrijskog niza je ukupan broj bodova koje su na kraju osvojili Vukovi, a zbroj aritmetičkog niza je ukupan broj bodova koje su na kraju osvojili Medvjedi. Tada vrijedi

$$
\begin{aligned}
&a + aq + aq^2 + aq^3 \leqslant 100, \\
&a + a + d + a + 2d + a + 3d \leqslant 100,
\end{aligned}
$$

odnosno

$$
\begin{aligned}
&a(1 + q + q^2 + q^3) \leqslant 100, \\
&4a + 6d \leqslant 100, \\
&a(1 + q + q^2 + q^3) = 4a + 6d + 1 \ (*).
\end{aligned}
$$

Iz posljednje jednakosti, promatrajući parnost lijeve i desne strane, zaključujemo da je a neparan broj, a q paran broj. Iz prve nejednakosti zaključujemo da je $q \leqslant 4$.

Imamo sljedeće mogućnosti: $q = 4$ ili $q = 2$.

Ako je $q = 4$ vrijedi $85a \leqslant 100$, odnosno $a = 1$. Iz $(*)$ za $q = 4$ i $a = 1$ dobivamo $d \notin \mathbb{N}$.

Ako je $q = 2$ vrijedi $15a \leqslant 100$, odnosno $a \leqslant 6$, $a \in \{1, 3, 5\}$. Sada pomoću $(*)$ provjeravamo koji od brojeva $a \in \{1, 3, 5\}$ daju cjelobrojno rješenje za d.

$$
\begin{aligned}
&15a = 4a + 6d + 1, \\
&6d = 11a - 1.
\end{aligned}
$$

Posljednja jednakost ima cjelobrojno rješenje jedino za $a = 5$, $d = 9$.

Za te vrijednosti proizlazi da su Vukovi imali sljedeće bodove: 5, 10, 20, 40, a Medvjedi 5, 14, 23, 32.

Treba izračunati koliki je ukupan zbroj bodova koji su na poluvremenu ostvarile obje ekipe zajedno, tj. $a + aq + a + a + d = 3a + aq + d$.

Ukupan zbroj bodova iznosi $5 + 10 + 5 + 14 = 34$.