DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

Dubrovnik, 3. travnja 2013.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1. Riješite nejednadžbu

$$\left|\frac{2013}{x+2013}+\frac{2013}{(x+1)(x+2)}+\frac{2013}{(x+2)(x+3)}+\cdots+\frac{2013}{(x+2012)(x+2013)}\right| \leq 1.$$

Prvo rješenje.

Podijelimo cijelu nejednadžbu s 2013. Tada je svaki od razlomaka na lijevoj strani nejednadžbe, osim prvog, oblika

$$\frac{1}{(x+k)(x+k+1)}=\frac{1}{x+k}-\frac{1}{x+k+1}, \quad k=1,2,\ldots,2012.$$

Tada je

$$\left|\frac{1}{x+2013}+\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{(x+2)}+\frac{1}{(x+2)}-\frac{1}{(x+3)}+\cdots+\frac{1}{(x+2012)}-\frac{1}{(x+2013)}\right| \leq \frac{1}{2013}.$$

Nakon sređivanja dobivamo

$$\left|\frac{1}{x+1}\right| \leq \frac{1}{2013}$$

$$|x+1| \geq 2013$$

$$x+1 \geq 2013 \quad \text{ili} \quad x+1 \leq -2013.$$

Odatle je $x \in \langle -\infty, -2014] \cup [2012, \infty\rangle$.

Drugo rješenje.

Također prvo podijelimo cijelu nejednadžbu s 2013.

Zbrojimo li prvi i zadnji član na lijevoj strani dobivamo

$$\frac{1}{x+2013}+\frac{1}{(x+2012)(x+2013)}=\frac{x+2012+1}{(x+2012)(x+2013)}=\frac{1}{x+2012}.$$

Tada se početna nejednadžba svodi na

$$\left|\frac{1}{x+2012}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\cdots+\frac{1}{(x+2011)(x+2012)}\right| \leq \frac{1}{2013}.$$

Ako postupak nastavimo, doći ćemo do nejednadžbe

$$\left|\frac{1}{x+2}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right| \leq \frac{1}{2013},$$

odnosno

$$\left|\frac{1}{x+1}\right| \leq \frac{1}{2013},$$

pa je kao i u prvom rješenju $x \in \langle -\infty, -2014] \cup [2012, \infty\rangle$.

Zadatak B-1.2. Zbroj znamenaka prirodnog broja x je y, a zbroj znamenaka broja y je z. Odredite sve brojeve x za koje je

$$x + y + z = 60.$$

Rješenje.

Iz $x + y + z = 60$ slijedi da je x dvoznamenkasti broj.
Pišemo $x = 10a + b$, gdje su a i b znamenke i $a \neq 0$.
Tada je $y = a + b$, zbroj znamenaka broja x.
Ako je $a + b \leq 9$, onda je $z = a + b$ pa iz $x + y + z = 60$ slijedi

$$\begin{aligned}
&10a + b + 2(a + b) = 60 \\
&12a + 3b = 60 \\
&4a + b = 20 \\
&b = 20 - 4a = 4(5 - a).
\end{aligned}$$

Kako su a i b znamenke, čiji je zbroj manji ili jednak 9, dobivamo $b = 0$, $a = 5$ ili $b = 4$, $a = 4$.
Ako je $a + b \geq 10$, onda je $z = a + b - 9$, pa iz $x + y + z = 60$ slijedi

$$\begin{aligned}
&10a + b + 2(a + b) - 9 = 60 \\
&12a + 3b = 69 \\
&4a + b = 23 \\
&4a = 23 - b
\end{aligned}$$

Ako je $b = 3$, onda je $a = 5$ te je $a + b < 10$, nije rješenje.
Ako je $b = 7$, onda je $a = 4$ te je $a + b > 10$, je rješenje.
Dakle, $x \in \{44, 47, 50\}$.

Zadatak B-1.3. Dva vlaka kreću istovremeno s početnih stanica jedan prema drugome. Vlakovi voze konstantnim brzinama i mimoilaze se kod točke M. Jedan vlak vozi dvostruko brže od drugog. Ako sporiji vlak krene 5 minuta kasnije, mimoići će se u točki koja je 4 km dalje od točke M. Koliko iznosi brzina sporijeg vlaka?

Rješenje.
Neka je sporiji vlak A, a brži B. Neka je v brzina vlaka A.
Tada je $2v$ brzina vlaka B. Vrijeme potrebno da oba vlaka dođu do točke M je t sati.
Put koji vlak A prođe do točke M jednak je vt km, a $2vt$ put vlaka B do točke M.

Ako sporiji vlak A krene 5 minuta kasnije (1/12 h) te ako je t_1 vrijeme potrebno vlaku A da dođe do točke mimoilaska, vlak B je do te točke vozio $t_1 + \frac{1}{12}$ sati.

Put vlaka A do točke mimoilaska je $v \cdot t_1$, a put vlaka B je $2v \cdot \left(t_1 + \frac{1}{12}\right)$.

Kako je razlika putova sporijeg vlaka u oba slučaja 4 km, pišemo

$$vt - vt_1 = 4.$$

Isto tako razlika putova bržeg vlaka je

$$2v \cdot \left(t_1 + \frac{1}{12}\right) - 2v \cdot t = 4.$$

Iz prve jednadžbe dobivamo

$$t - t_1 = \frac{4}{v},$$

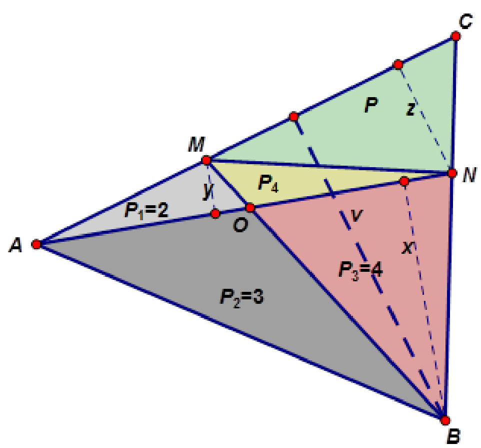
a iz druge jednadžbe

$$-2v \cdot (t - t_1) + \frac{v}{6} = 4.$$

Tada brzina sporijeg vlaka iznosi $v = 72$ km/h.

Zadatak B-1.4. Točke M i N pripadaju redom stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC. Točka O je sjecište dužina $\overline{AN}$ i $\overline{BM}$. Odredite površinu trokuta CMN ako su površine trokuta OMA, OAB i OBN jednake redom 2, 3, 4.

Rješenje.



Neka je

$$P_{\triangle OMA} = P_1 = 2, \quad P_{\triangle OAB} = P_2 = 3, \quad P_{\triangle OBN} = P_3 = 4, \quad \text{a } P_{\triangle ONM} = P_4$$

Traženu površinu, trokuta MNC, označimo s P.
Trokuti OAB i OBN imaju zajedničku visinu x. Isto tako trokuti OMA i ONM imaju zajedničku visinu y. Tada iz omjera njihovih površina slijedi

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\frac{|ON| \cdot x}{2}}{\frac{|OA| \cdot x}{2}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{|ON|}{|OA|} = \frac{4}{3}. \tag{1}$$

Analogno

$$\frac{P_4}{P_1} = \frac{\frac{|ON| \cdot y}{2}}{\frac{|OA| \cdot y}{2}}$$

$$\frac{P_4}{2} = \frac{|ON|}{|OA|}. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) slijedi $P_4 = \frac{8}{3}$.
Nadalje, promotrimo trokute MNC i ANC sa zajedničkom visinom z. Kao i u prethodnom slučaju, iz omjera površina dobivamo omjer stranica

$$\frac{\frac{|CM| \cdot z}{2}}{\frac{|AC| \cdot z}{2}} = \frac{P}{2 + \frac{8}{3} + P}.$$

Slijedi

$$\frac{|CM|}{|AC|} = \frac{3P}{14 + 3P}. \tag{3}$$

Analogno iz trokuta MBC i ABC sa zajedničkom visinom v dobivamo

$$\frac{\frac{|CM| \cdot v}{2}}{\frac{|AC| \cdot v}{2}} = \frac{4 + \frac{8}{3} + P}{9 + \frac{8}{3} + P}.$$

Slijedi

$$\frac{|CM|}{|AC|} = \frac{20 + 3P}{35 + 3P}. \tag{4}$$

Iz (3) i (4) dobivamo

$$\frac{20 + 3P}{35 + 3P} = \frac{3P}{14 + 3P}$$

te površina traženog trokuta iznosi

$$P = \frac{280}{3}.$$

Zadatak B-1.5. Na otoku živi petero ljudi i majmun. Jednog su dana svi zajedno sakupljali kokosove orahe i stavljali ih na zajedničku hrpu. Dogovorili su se da će sutradan međusobno razdijeliti orahe. Tijekom noći jedna je osoba od petero otočana uzela svoj dio. Podijelila je orahe na 5 jednakih hrpica i pri tome joj je ostao jedan kokosov orah. Njega je dala majmunu, sakrila svoju hrpu, a ostale četiri ponovno spojila u jednu veliku hrpu. Ostala četiri otočana napravila su to isto, jedan za drugim i svatko je jedan kokosov orah dao majmunu da se hrpe mogu jednako raspodijeliti. Koji je najmanji mogući broj oraha u početnoj hrpi?

Prvo rješenje.

Nakon što od broja oraha u početnoj hrpi oduzmemo 1 moramo dobiti broj djeljiv s 5. To znači da je početni broj iz skupa 6, 11, 16, 21, 26, ... Nakon što oduzmemo 1, množimo s $\frac{4}{5}$ jer je prva osoba sebi zadržala $\frac{1}{5}$, pa je drugoj osobi za raspodjelu ostalo 4, 8, 12, 16, 20, ...

Kako druga osoba nastavlja postupak, kad od tih brojeva oduzmemo 1 i pomnožimo s $\frac{4}{5}$, rezultat mora biti cijeli broj. To znači da su jedino mogući brojevi (oraha na hrpi poslije prve osobe) 16, 36, 56, 76, 96, ...

Analogno zaključujemo dalje:

Ako prethodnim brojevima oduzmemo 1 i pomnožimo s $\frac{4}{5}$, dobivamo brojeve 12, 28, 44, 60, 76, ...,

No, da bi treća osoba mogla nastaviti postupak, preostaju, nakon druge osobe, samo brojevi 76, 156, 236, 316, 396, ...

Nakon oduzimanja 1 i množenja s $\frac{4}{5}$, dobivamo 60, 124, 188, 252, 316, ..., ali da bi četvrta osoba mogla izvršiti raspodjelu nakon treće osobe, preostaju brojevi 316, 636, 956, 1276, 1596, ...

Nakon četvrte osobe preostaju brojevi 252, 508, 764, 1020, 1276, ..., a najmanji koji je moguć je 1276.

Nakon pete osobe na hrpi ostaje 1020 oraha pa je peta osoba dobila $\frac{1276-1}{5} = 255$ oraha.

Sad kad smo pronašli najmanji (cijeli) broj oraha koji ostaje nakon svih raspodjela, vratimo se unazad.

Prije pete osobe na hrpi je bilo 1276 oraha.

Prije četvrte osobe na hrpi je $\frac{5}{4} \cdot 1276 + 1 = 1596$ oraha. Analogno računamo i dalje.

Prije treće osobe na hrpi je $\frac{5}{4} \cdot 1596 + 1 = 1996$ oraha.

Prije druge osobe na hrpi je $\frac{5}{4} \cdot 1996 + 1 = 2496$.

I na kraju, prije prve osobe na hrpi je $\frac{5}{4} \cdot 2496 + 1 = 3121$ orah.

Drugo rješenje.
Označimo s a broj oraha na hrpi nakon posljednje raspodjele, odnosno nakon raspodjele pete osobe.
Tada je prije pete osobe bilo na hrpi

$$\frac{5}{4}a + 1$$

oraha.
Prije četvrte osobe je na hrpi

$$\frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}a + 1\right) + 1 = \frac{25}{16}a + \frac{9}{4},$$

prije treće osobe je na hrpi

$$\frac{5}{4}\left(\frac{25}{16}a + \frac{9}{4}\right) + 1 = \frac{125}{64}a + \frac{61}{16},$$

prije druge osobe je na hrpi

$$\frac{5}{4}\left(\frac{125}{64}a + \frac{61}{16}\right) + 1 = \frac{625}{256}a + \frac{369}{64},$$

prije prve osobe je na hrpi

$$\frac{5}{4}\left(\frac{625}{256}a + \frac{369}{64}\right) + 1 = \frac{3125}{1024}a + \frac{1845}{256} + 1.$$

To je broj oraha u početnoj hrpi i to mora biti prirodan broj. Tražimo najmanji takav. Zapišimo taj broj u sljedećem obliku

$$\frac{3125}{1024}a + \frac{1845}{256} + 1 = \frac{(3 \cdot 1024 + 53)a}{1024} + \frac{7 \cdot 256 + 53}{256} + 1 = 3a + 8 + \frac{53}{1024}(a + 4)$$

Ovo će biti prirodan broj ako je $a+4$ višekratnik od 1024, a bit će najmanji za $a+4 = 1024$, Tada je $a = 1020$, a najmanji mogući broj oraha u početnoj hrpi je

$$3 \cdot 1020 + 8 + 53 = 3121.$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

Dubrovnik, 3. travnja 2013.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-2.1. U skupu $\mathbb{R}$ riješite nejednadžbu $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 \geq 6$.

Rješenje.

Pomnožimo li nejednadžbu $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 \geq 6$ s $(x+1)^2(x-1)^2$, uz uvjet $x \neq 1, x \neq -1$ redom slijedi:

$$
\begin{aligned}
x^2(x-1)^2+x^2(x+1)^2 &\geq 6(x+1)^2(x-1)^2 \\
x^2\left[(x-1)^2+(x+1)^2\right] &\geq 6(x^2-1)^2 \\
x^2\left[2x^2+2\right] &\geq 6(x^2-1)^2 \\
x^2\left[x^2+1\right]-3(x^2-1)^2 &\geq 0 \\
-2x^4+7x^2-3 \geq 0 \text{ ili } 2x^4-7x^2+3 &\leq 0
\end{aligned}
$$

Rješavanjem bikvadratne jednadžbe $2x^4-7x^2+3=0$ dobivamo

$$x^2=3 \text{ i } x^2=\frac{1}{2}, \text{ odnosno } x_{1,2}=\pm\sqrt{3} \text{ i } x_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pišemo

$$2(x^2-3)\left(x^2-\frac{1}{2}\right) \leq 0 \text{ ili } 2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leq 0.$$

Pomoću grafa (ili tablice) slijedi rješenje nejednadžbe

$$x \in \left[-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3}\right] \setminus \{-1,1\}$$

Zadatak B-2.2. Za koju vrijednost varijabli x i y izraz $\frac{4x^2+2y^2-4y+4}{2x^2+y^2-2y+5}$ ima najmanju vrijednost i koliko iznosi ta najmanja vrijednost?

Rješenje.

$$\frac{4x^2+2y^2-4y+4}{2x^2+y^2-2y+5}=\frac{2(2x^2+y^2-2y+5)-6}{2x^2+y^2-2y+5}=$$
$$=2-\frac{6}{2x^2+y^2-2y+1+4}=2-\frac{6}{2x^2+(y-1)^2+4}$$

Dani izraz ima najmanju vrijednost kada je vrijednost $\frac{6}{2x^2+(y-1)^2+4}$ izraza najveća, odnosno kada je vrijednost izraza $2x^2+(y-1)^2+4$ najmanja. To se postiže za

$$x^2=0,\ (y-1)^2=0 \Leftrightarrow x=0,\ y=1.$$

Najmanja vrijednost danog izraza jednaka je $\frac{1}{2}$.

Zadatak B-2.3. Količina kofeina u krvotoku opada svakih 5 sati za 50%. Produžena kava sadrži 330 mg kofeina. Pretpostavimo da se cijela produžena kava popije odjednom. Ako osoba u jednom danu popije produženu kavu u 8 h, 10 h i 12 h, odredite koliko će mg kofeina ta osoba imati u krvotoku u 20 sati?

Rješenje.

Napravimo tablicu.

t	0	5	10	15	20
$Q(t)$	330	165	82.5	41.25	20.625

Funkcija $Q(t)$ je eksponencijalna funkcija oblika $Q(t)=Q_0b^{\frac{t}{5}}$.

Iz danih podataka $Q(0)=330$ lako se dobije $Q_0=330$, te iz $Q(5)=165$ dobivamo bazu b

$$165=330b,$$

pa je $b=\frac{1}{2}$. Konačno količina kofeina, u mg, u krvotoku nakon t sati iznosi $Q(t)=330\cdot 2^{\frac{-t}{5}}$.
Od kave koju osoba popije u 8h ostat će u krvotoku nakon 12 sati ili točnije u 20h količina $Q(12)=330\cdot 2^{\frac{-12}{5}}$ mg.
Od kave koju osoba popije u 10h ostat će u krvotoku nakon 10 sati ili točnije u 20h, količina $Q(10)=330\cdot 2^{\frac{-10}{5}}$ mg.
Od kave koju osoba popije u 12h ostat će u krvotoku nakon 8 sati ili točnije u 20h, količina $Q(8)=330\cdot 2^{\frac{-8}{5}}$ mg.

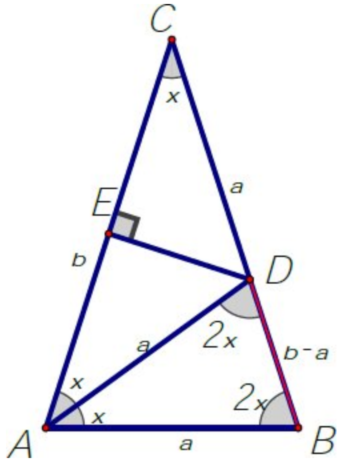
U 20h ukupno će u krvotoku ostati $330\cdot 2^{\frac{-12}{5}}+330\cdot 2^{-2}+330\cdot 2^{\frac{-8}{5}}=330\cdot 2^{\frac{-8}{5}}\left(2^{\frac{-4}{5}}+2^{\frac{-2}{5}}+1\right)$ mg kofeina.

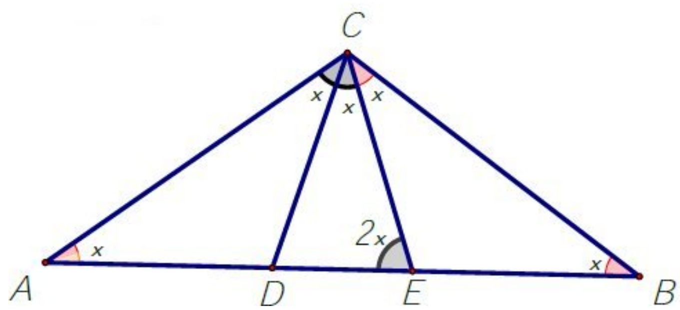
Zadatak B-2.4. Dundo i Maro su se nadmetali zadavajući jedan drugom neobične matematičke zadatke. Tako je Maro dobio zadatak da izračuna točnu vrijednost kosinusa kuta od $36°$. Nije smio koristiti nikakav pribor osim papira i olovke za pisanje i računanje.

To je nemoguće, mislio je Maro dok mu Dundo nije nacrtao nekoliko jednakokračnih trokuta kojima je mjera barem jednog kuta iznosila $36°$. Maro je promotrio jedan trokut i ubrzo izračunao $\cos 36°$. Koju je vrijednost dobio Maro i na koji način?

Rješenje.

Razlikujemo dva slučaja - trokut može imati jedan ili dva kuta od $36°$.





Prvi slučaj. Neka je Maro izabrao jednakokračan trokut kojemu je mjera kuta nasuprot osnovice $36°$ i označio njegove vrhove s A, B, C. Označimo s x kut od $36°$.
Povučemo li simetralu kuta pri vrhu A uz osnovicu, dobit ćemo trokut ΔABD koji je sličan zadanom trokutu ΔABC (poučak K-K).
Pišemo $b : a = a : (b - a)$, a odatle je

$$a^2 = b^2 - ab.$$

(Ova se jednakost može dobiti i pomoću poučka o simetrali kuta.)
Iz pravokutnog trokuta ΔCDE dobivamo

$$\cos x = \frac{\frac{b}{2}}{a}, \text{odnosno } b = 2a \cos x.$$

Sada je

$$a^2 = (2a \cos x)^2 - a(2a \cos x).$$

Dobivamo kvadratnu jednadžbu $4\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$. Njezino pozitivno rješenje je

$$\cos x = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Drugi slučaj. Maro je mogao izabrati i jednakokračan trokut ABC u kojemu su dva kuta $36°$.

Tada je kut nasuprot osnovice dužinama $\overline{CE}$ i $\overline{CD}$ podijeljen na tri kuta po $36°$. Uočimo trokut ΔAEC. To je jednakokračan trokut s jednim kutom od $36°$ pa smo zadatak sveli na prethodni slučaj.

Zadatak B-2.5. Na šahovskom turniru sudjelovala su tri učenika prvog razreda i nekoliko učenika drugog razreda. Tri učenika prvog razreda osvojila su ukupno 7 bodova, a svaki učenik drugog razreda osvojio je isti broj bodova. Koliko je na turniru bilo učenika drugog razreda ako svaka pobjeda donosi jedan bod, poraz 0 bodova, a neriješeni rezultat pola boda? Turnir se igra tako da svaki igrač sa svakim od preostalih odigra jednu partiju.

Rješenje.

Neka je na turniru sudjelovalo x učenika drugog razreda i neka je svaki od njih skupio y bodova. Tada je ukupan broj bodova koje su skupili učenici i prvog i drugog razreda $xy+7$. Kako na turniru sudjeluje $x+3$ učenika to je zbroj osvojenih bodova $\frac{(x+3)(x+2)}{2}$. Tada vrijedi

$$
\begin{aligned}
xy+7 &= \frac{(x+3)(x+2)}{2} \\
2xy+14 &= (x+3)(x+2) \\
2y &= x+5-\frac{8}{x}.
\end{aligned}
$$

Kako su x, $2y \in \mathbb{N}$, slijedi $x \in \{2,4,8\}$. Na turniru su bila 2 ili 4 ili 8 učenika drugih razreda.

Pokažimo da su dobivena rješenja moguća. Označimo učenike prvog razreda s A, B, i C, a učenike drugog razreda s $1, 2, \ldots$. Za svako pojedino rješenje ishodi partija dani su odgovarajućim dijelom sljedeće tablice (za $x=2$ promatramo gornju lijevu 5×5 tablicu, za $x=4$ promatramo gornju lijevu 7×7 tablicu i za $x=8$ promatramo cijelu 11×11 tablicu). Broj u retku s oznakom r i stupcu s oznakom s označava bodove koje je r osvojio u partiji sa s.

	A	B	C	1	2	3	4	5	6	7	8
A	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
B	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
C	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1/2	1	1	1	1	0	1/2
2	1	0	0	1/2	0	1	1	1	0	1/2	1
3	1	1	1	0	0	0	1/2	0	1/2	1	1
4	1	1	1	0	0	1/2	0	1/2	1	1	0
5	1	1	1	0	0	1	1/2	0	1	0	1/2
6	1	1	1	0	1	1/2	0	0	0	1/2	1
7	1	1	1	1	1/2	0	0	1	1/2	0	0
8	1	1	1	1/2	0	0	1	1/2	0	1	0

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

Dubrovnik, 3. travnja 2013.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-3.1. Riješite nejednadžbu

$$\log_{5+x}(5-x) \cdot \log_{10-x}(10+x) \leq 0.$$

Rješenje.
Početni uvjeti su $x > -5$, $x < 5$, $x > -10$, $x < 10$, $x \neq -4$, $x \neq 9$.
Dakle, za rješenje nejednadžbe mora vrijediti $x \in \langle -5, 5\rangle$, $x \neq -4$.
Danu nejednadžbu možemo pisati u obliku

$$\frac{\log(5-x)}{\log(5+x)} \cdot \frac{\log(10+x)}{\log(10-x)} \leq 0.$$

Zbog uvjeta $x \in \langle -5, 5\rangle$, $x \neq -4$ razlomak

$$\frac{\log(10+x)}{\log(10-x)}$$

ima pozitivnu vrijednost pa zadatak svodimo na rješavanje nejednadžbe

$$\frac{\log(5-x)}{\log(5+x)} \leq 0$$

Dva su slučaja:

- Prvi slučaj. Rješavamo sustav nejednadžbi

$$\begin{cases} \log(5-x) \leq 0 \\ \log(5+x) > 0 \end{cases}$$

kojemu je rješenje $x \geq 4$ i $x > -4$, tj. $x \in [4, 5\rangle$.

- Drugi slučaj je sustav nejednadžbi

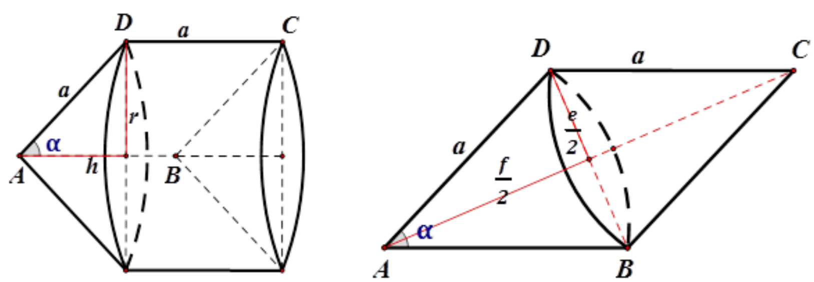
$$\begin{cases} \log(5-x) \geq 0 \\ \log(5+x) < 0 \end{cases}$$

kojemu je rješenje $x < -4$ i $x \leq 4$, tj. $x \in \langle -5, -4\rangle$.

Rješenje zadatka je $\langle -5, -4\rangle \cup [4, 5\rangle$.

Zadatak B-3.2. Duljina stranice romba $ABCD$ iznosi a. Romb prvo rotira oko pravca na kojem leži stranica $\overline{AB}$, a zatim oko pravca na kojem leži dulja dijagonala $\overline{AC}$. Tim rotacijama dobivamo dva rotacijska tijela. Omjer njihovih obujama je $V_1 : V_2 = 9 : \sqrt{3}$. Odredite šiljasti kut romba i omjer oplošja nastalih rotacijskih tijela.

Rješenje.



Rotacijom oko pravca AB nastaje rotacijsko tijelo koje se sastoji od stošca i valjka kojem taj isti stožac nedostaje iznutra. Obujam tog tijela je

$$V_1 = V_{\text{stošca}} + V_{\text{valjka}} - V_{\text{stošca}} = V_{\text{valjka}}$$
$$V_1 = r^2\pi v, \quad r_{\text{valjka}} = v_{\text{romba}} = a\sin\alpha, \quad v_{\text{valjka}} = a$$

Slijedi $V_1 = a^3\pi\sin^2\alpha$.
Ako romb rotira oko pravca AC nastaje rotacijsko tijelo koje se sastoji od dva jednaka stošca, a njegov je obujam

$$V_2 = 2V_{\text{stošca}} = \frac{2}{3}r^2\pi v.$$

Kako je $r_{\text{stošca}} = \dfrac{e}{2} = a\sin\dfrac{\alpha}{2}$, a $v_{\text{stošca}} = \dfrac{f}{2} = a\cos\dfrac{\alpha}{2}$.
Obujam je

$$V_2 = \frac{2}{3}a^3\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Iz danog omjera $V_1 : V_2 = 9 : \sqrt{3}$ slijedi

$$\frac{\sin^2\alpha}{\frac{2}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{9}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\frac{2}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{9}{\sqrt{3}}.$$

Odatle je $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ pa je $\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{6}$, a $\alpha=\frac{\pi}{3}$.
Odredimo omjer oplošja. Oplošje prvog tijela je

$$\begin{aligned}O_1&=2\cdot \mathrm{Pl}_{\text{stošca}}+\mathrm{Pl}_{\text{valjka}}=2\cdot v_{\text{romba}}\cdot\pi\cdot a+2\cdot v_{\text{romba}}\cdot\pi\cdot a\\&=4v_{\text{romba}}a\pi=4a\sin\alpha\cdot a\pi=4\pi a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\pi\sqrt{3}a^2.\end{aligned}$$

Oplošje drugog tijela je $O_2=2r_{\text{stošca}}\pi a=2a\sin\frac{\alpha}{2}\pi a=a^2\pi$.
Omjer je $O_1:O_2=2\sqrt{3}:1$.

Zadatak B-3.3. Ako su a, b, c duljine stranice trokuta i α, β, γ redom nasuprotni kutovi, onda je $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{b}{a}$ ako i samo ako je $\beta=2\alpha$. Dokažite!

Prvo rješenje.
Treba dokazati da tvrdnja vrijedi u oba smjera.
Neka je $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{b}{a}$. Tada je $ac=b^2-a^2$.
Koristeći poučak o kosinusu dobivamo

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha&=2\cos^2\alpha-1\\&=2\cdot\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2-1=2\cdot\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}-1\\&=\frac{(ac+c^2)^2}{2b^2c^2}-1=\frac{(a+c)^2}{2b^2}-1=\frac{a^2+2ac+c^2-2b^2}{2b^2}=\frac{c^2-a^2}{2a(a+c)}=\frac{c-a}{2a}.\end{aligned}$$

Također je

$$\cos\beta=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\frac{c^2-ac}{2ac}=\frac{c\cdot(c-a)}{2ac}=\frac{c-a}{2a}.$$

Zato je $\beta=2\alpha$.
Dokažimo i drugi smjer tvrdnje.
Neka je $\beta=2\alpha$. Tada je

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{b}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

odnosno,

$$2\cos\alpha=\frac{b}{a}.$$

Ako je $\gamma=180^\circ-(\alpha+2\alpha)=180^\circ-3\alpha$, tada je

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{2\sin 2a\cos\alpha}{\sin 2\alpha}=2\cos\alpha=\frac{b}{a}.$$

Drugo rješenje.
Primijenimo poučak o sinusu na danu jednakost. Tada je

$$\begin{aligned}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}&=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\\\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}&=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\\\frac{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}&=\frac{\sin(180^\circ-(\alpha+\beta))}{\sin\beta}.\end{aligned}$$

Nakon množenja s nazivnikom dobivamo

$$(\sin\beta - \sin\alpha)(\sin\beta + \sin\alpha) = \sin\alpha \cdot \sin(\alpha+\beta).$$

Pretvorbom zbroja u umnožak dobivamo

$$\begin{aligned}
2\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2} &= \sin\alpha\sin(\alpha+\beta)\\
\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha) = \sin\alpha\sin(\alpha+\beta).&
\end{aligned}$$

Slijedi $\sin(\beta-\alpha) = \sin\alpha$.
Tada je $\beta = 2\alpha$ ili $\beta - \alpha = 180^\circ - \alpha$ što je nemoguće pa je jedino moguće $\beta = 2\alpha$.
Drugi se smjer dokaže kao i u prvom rješenju.

Zadatak B-3.4. Odredite nenegativne cijele brojeve p i n takve da su svi brojevi p, $p+3^n$, $p+3^{n+1}$, $p+3^{n+2}$, $p+3^{n+3}$ prosti.

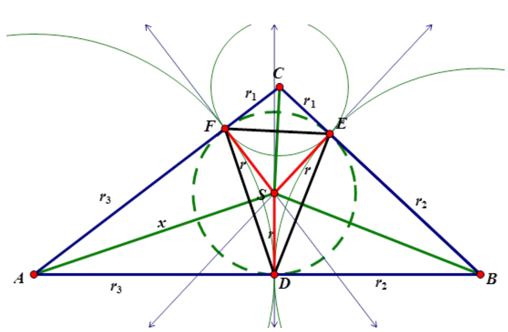
Rješenje.
Brojevi 3^n, 3^{n+1}, 3^{n+2}, 3^{n+3} su neparni brojevi, pa ako im dodamo neparan broj p dobit ćemo paran broj, što znači da p mora biti paran. Kako p mora biti prost broj, jedina je mogućnost $p = 2$.
Promatramo niz brojeva

$$2, \quad 2+3^n, \quad 2+3^{n+1}, \quad 2+3^{n+2}, \quad 2+3^{n+3}$$

Potencije 3^n, 3^{n+1}, 3^{n+2}, 3^{n+3} završavaju (nekim redom) znamenkama 1, 3, 7, 9. Ako završava s 3, dodavanjem broja 2 jedan član će završavati s 5, što znači da je djeljiv s 5 te nije prost, osim u slučaju $n = 0$ ili $n = 1$.
Traženi niz brojeva je 2, 5, 11, 29, 83 ili 2, 3, 5, 11, 29.

Zadatak B-3.5. Točke A, B i C središta su triju kružnica koje se međusobno dodiruju izvana. Udaljenosti između središta iznose $|AB| = 13$ cm, $|BC| = 8$ cm, $|AC| = 9$ cm. U točkama u kojima se kružnice dodiruju povučene su zajedničke tangente. Pokažite da je središte upisane kružnice trokuta ABC sjecište tih triju tangenti. Odredite udaljenost sjecišta tangenata od središta najveće kružnice.

Rješenje.



Promotrimo trokut DEF, gdje su D, E, F međusobna dirališta danih kružnica. Simetrale kutova trokuta ABC su ujedno i simetrale stranica trokuta DEF (jer su trokuti ADF, BDE, CEF jednakokračni), pa je kružnica kroz točke D, E i F kružnica opisana trokutu DEF, a upisana trokutu ABC. Označimo je s k, a njezino središte sa S. Zaključujemo da su točke D, E i F dirališta kružnice k i stranica trokuta ABC tj. da su stranice trokuta ABC tangente kružnice k. Tada su zajedničke tangente danih kružnica (sa središtima u A, B i C) u točkama D, E, F istovremeno normale na kružnicu k. Kako normala kružnice prolazi njezinim središtem, tvrdnja je dokazana, odnosno sve tri zajedničke tangente sijeku se u središtu upisane kružnice trokutu ABC.

Za polumjere danih kružnica vrijedi:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 8 \\ r_2 + r_3 &= 13 \\ r_1 + r_3 &= 9 \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je

$$\begin{aligned} &r_1 = 2 \text{ cm}, \quad r_2 = 6 \text{ cm}, \quad r_3 = 7 \text{ cm}. \\ &s = \frac{a+b+c}{2} = 15, \\ &P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 6\sqrt{35} \text{ cm}^2, \\ &r = \frac{P}{s} = \frac{2\sqrt{35}}{5} \text{ cm}. \end{aligned}$$

Tražena je udaljenost $|SA| = \sqrt{r_3^2 + r^2} = \sqrt{7^2 + \left(\frac{2\sqrt{35}}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{273}{5}}$ cm.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

Dubrovnik, 3. travnja 2013.

UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-4.1. Duljine stranica 5 jednakostraničnih trokuta čine aritmetički niz. Zbroj opsega tih trokuta je 120 cm. Zbroj površina najmanjeg i najvećeg trokuta je za $10\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ manji od zbroja površina preostala tri trokuta. Odredite duljine stranica tih trokuta. Koliki je zbroj površina svih trokuta?

Rješenje.

Označimo stranice trokuta s $a_1 = a - 2d$, $a_2 = a - d$, $a_3 = a$, $a_4 = a + d$, $a_5 = a + 2d$, gdje je d razlika niza.

Kako je zbroj opsega tih trokuta 120 cm to vrijedi

$$\begin{aligned}&3(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = 120\\ &a - 2d + a - d + a + a + d + a + 2d = 40.\end{aligned}$$

Slijedi $a = 8$, pa je dani niz $8 - 2d, 8 - d, 8, 8 + d, 8 + 2d$.
Za površine vrijedi

$$\frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a_5^2\sqrt{3}}{4} + 10\sqrt{3} = \frac{a_2^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a_3^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a_4^2\sqrt{3}}{4} / : \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Tada je

$$\begin{aligned}a_1^2 + a_5^2 + 40 &= a_2^2 + a_3^2 + a_4^2\\ (8-2d)^2 + (8+2d)^2 + 40 &= (8-d)^2 + 8^2 + (8+d)^2.\end{aligned}$$

Slijedi $d^2 = 4$, $d = 2$ ili $d = -2$.

Stavimo li $d = 2$ dobivamo: $a_1 = 4$ cm, $a_2 = 6$ cm, $a_3 = 8$ cm, $a_4 = 10$ cm, $a_5 = 12$ cm.
(Stavimo li d = -2 dobivamo iste brojeve samo u silaznom poretku).

Zbroj površina svih trokuta iznosi

$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}(16 + 36 + 64 + 100 + 144) = 90\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

.

Zadatak B-4.2. Neka je n broj koji dobijemo tako da između svake dvije znamenke broja 14 641 napišemo 2013 nula. Odredite sva rješenja jednadžbe $x^4 = n$ u skupu $\mathbb{C}$.

Rješenje.

Ako između svake dvije znamenke broja 14 641 napišemo 2013 nula dobivamo broj oblika $1\underbrace{0\ldots0}_{2013}4\underbrace{0\ldots0}_{2013}6\underbrace{0\ldots0}_{2013}4\underbrace{0\ldots0}_{2013}1$, a njega možemo zapisati pomoću potencija s bazom 10. Tada je

$$\begin{aligned} n &= 1\underbrace{0\ldots0}_{2013}4\underbrace{0\ldots0}_{2013}6\underbrace{0\ldots0}_{2013}4\underbrace{0\ldots0}_{2013}1 \qquad (1)\\ &= 10^{4\cdot2013+4} + 4\cdot10^{3\cdot2013+3} + 6\cdot10^{2\cdot2013+2} + 4\cdot10^{2013+1} + 1 = \\ &= \left(10^{2013+1}\right)^4 + 4\cdot\left(10^{2013+1}\right)^3 + 6\cdot\left(10^{2013+1}\right)^2 + 4\cdot10^{2013+1} + 1 = \\ &= \binom{4}{0}\left(10^{2014}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(10^{2014}\right)^3\cdot1 + \binom{4}{2}\left(10^{2014}\right)^2\cdot1^2 + \binom{4}{3}10^{2014}\cdot1^3 + \binom{4}{4}\cdot1^4 \end{aligned}$$

Tada su rješenja jednadžbe $x^4 = n$, odnosno $x^4 = \left(10^{2014}+1\right)^4$ brojevi

$$x_{1,2} = \pm\left(10^{2014}+1\right), \quad x_{3,4} = \pm\left(10^{2014}+1\right)\cdot i.$$

Zadatak B-4.3. Neka je $f_n(x) = x^{n+1} + x^n$, za $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Za koje će realne brojeve x, beskonačan zbroj $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots$ imati vrijednost u intervalu $\left\langle 0, \frac{2}{3}\right]$?

Rješenje.

Dani je niz funkcija geometrijski niz, kojemu je prvi član $a_1 = f_1(x) = x^2 + x$, a kvocijent $q = x$. Tada je beskonačan zbroj $f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+f_4(x)+\ldots$ geometrijski red. Ovaj će geometrijski red konvergirati ako je $|q| < 1$, odnosno ako je $|x| < 1$, $x \neq 0$. Tada je njegov zbroj

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + \ldots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{x^2+x}{1-x}.$$

Ako je $x = 0$, traženi zbroj je 0 što ne ulazi u dani interval.
Treba odrediti sve $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ za koje vrijedi sustav nejednadžbi

$$0 < \frac{x^2+x}{1-x} \leq \frac{2}{3}.$$

Rješenja nejednadžbi su

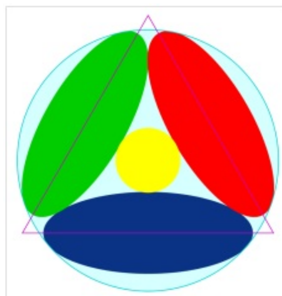
$$\frac{x^2+x}{1-x} \leq \frac{2}{3}, \text{ za } x \in \left[-2, \frac{1}{3}\right] \cup \langle 1, \infty\rangle,$$

$$0 < \frac{x^2+x}{1-x}, \text{ za } x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 0, 1\rangle.$$

Presjek ovih rješenja uz uvjet konvergencije da je $|x| < 1$ daje konačno rješenje

$$x \in \left\langle 0, \frac{1}{3} \right] .$$

Zadatak B-4.4. Tri sukladne elipse s poluosima a i b $(a > b)$ smještene su tako da se svake dvije dodiruju, a glavne osi im leže na stranicama jednog jednakostraničnog trokuta (slika). Dvije koncentrične kružnice, veća polumjera R i manja polumjera r $(R \neq r)$, dodiruju sve tri elipse. Prikažite R i r pomoću a i b.



Rješenje.

Neka se osi elipse c podudaraju s koordinatnim osima, a središte s ishodištem.
Tada je njezina jednadžba $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, a jednadžba kružnice k_1 je $x^2 + (y-p)^2 = R^2$.
Očito je pravac AS tangenta elipse c. Njegov je koeficijent smjera $k = \operatorname{tg}30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, a odsječak na y-osi je $l = p$.
Stoga ima jednadžbu

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + p.$$

Iz uvjeta dodira $a^2k^2 + b^2 = l^2$ pravca i elipse, dobivamo

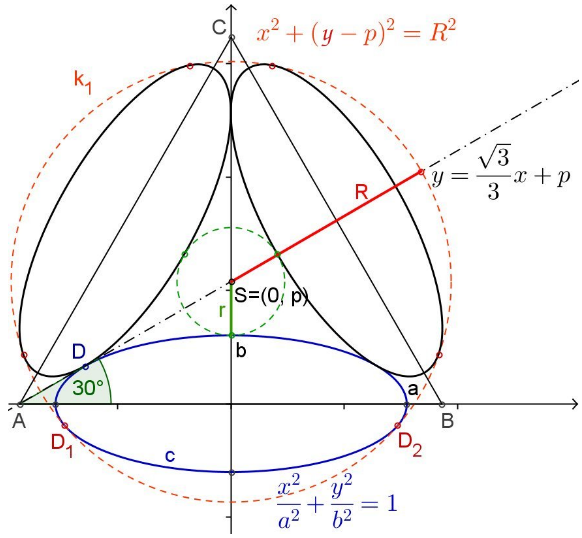
$$a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + b^2 = p^2 \quad \Rightarrow \quad p^2 = \frac{a^2 + 3b^2}{3}. \tag{$*$}$$

Tada je $r = p - b$, odnosno

$$r = \sqrt{\frac{a^2 + 3b^2}{3}} - b.$$

Kružnica k_1 dira elipsu c u točkama D_1 i D_2 čije su ordinate jednake.
Iz sustava što ga čine jednadžba kružnice k_1 i elipse c

$$\begin{cases} x^2 + (y-p)^2 = R^2 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$



dobivamo

$$\frac{R^2-(y-p)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Odavde nakon sređivanja slijedi

$$(a^2-b^2)y^2+2b^2py+b^2(R^2-p^2-a^2)=0.$$

Ova jednadžba mora imati samo jedno rješenje pa joj je diskriminanta jednaka nuli, tj.

$$(2b^2p)^2-4(a^2-b^2)b^2(R^2-p^2-a^2)=0$$
$$\Rightarrow R^2=\frac{a^2(p^2+a^2-b^2)}{a^2-b^2}.$$

Uvrštavanjem $(*)$ u ovaj izraz, nakon sređivanja dobivamo da je $R=\frac{2a^2}{\sqrt{3(a^2-b^2)}}$.

Zadatak B-4.5. Kvadratna tablica $n\times n$ popunjena je prirodnim brojevima od 1 do n^2, pri čemu su u prvom redu zapisani po redu brojevi od 1 do n, u drugom redu od $n+1$ do $2n$, u trećem od $2n+1$ do $3n$, itd. Iz ove se tablice izreže kvadrat $m\times m$ $(m<n)$. Dokažite da je dvostruki zbroj brojeva koji su u tom izrezanom kvadratu djeljiv s m^2.

Rješenje.

Naša tablica je ovog oblika:

1	2	3	4	...	n
$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	...	$2n$
$2n+1$	$2n+2$	$2n+3$	$2n+4$	...	$3n$
.	.	.	.		.
.	.	.	.		.
.	.	.	.		.
$(n-1)n+1$	$(n-1)n+2$	$(n-1)n+3$	$(n-1)n+4$	...	$(n-1)n+n$

Izdvojimo jedan kvadrat $m \times m$:

$$\begin{array}{cccccc}
x & x+1 & x+2 & x+3 & ... & x+m-1 \\
n+x & n+x+1 & n+x+2 & n+x+3 & ... & n+x+m-1 \\
2n+x & 2n+x+1 & 2n+x+2 & 2n+x+3 & ... & 2n+x+m-1 \\
. & . & . & . & & . \\
. & . & . & . & & . \\
. & . & . & . & & . \\
(m-1)n+x & (m-1)n+x+1 & (m-1)n+x+2 & (m-1)n+x+3 & ... & (m-1)n+x+m-1
\end{array}$$

Izračunajmo dvostruki zbroj brojeva koji se nalaze u ovoj tablici.
Zbroj u prvom retku je $S_1 = mx + \frac{m(m-1)}{2}$,
u drugom $S_2 = mx + mn + \frac{m(m-1)}{2}$,
u trećem $S_3 = mx + 2mn + \frac{m(m-1)}{2}$,
...
a u m-tom retku $S_1 = mx + m(m-1) + \frac{m(m-1)}{2}$.

Tada je

$$\begin{aligned}
&2(S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_m) = 2m^2x + n(m-1)m^2 + m^2(m-1) = \\
&m^2(2x + mn - n + m - 1) = m^2(2x + (m-1)(n+1)).
\end{aligned}$$

Izraz u zagradi je prirodni broj pa je tvrdnja zadatka dokazana.